**提出締切：** 2025 年 2 月 4 日 午前 9:00

**授業内問題 12.1** 整数値確率変数 $X, Y$ に対して，

$$\mathsf{H}(X,Y) = \mathsf{H}(X \mid Y) + \mathsf{H}(Y)$$

が成り立つことを証明せよ．

---

**復習問題 12.2** [**ギブスの不等式**] $n$ を正整数とする．$2n$ 個の正実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

を満たすとき，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 y_i$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：任意の実数 $z$ に対して，$1+z \leq \mathrm{e}^z$ が成り立つことを使うとよい．)

**復習問題 12.3** 確率変数 $X$ が $n$ 個の異なる値しか正の確率で取らないとき，

$$\mathsf{H}(X) \leq \log_2 n$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.2 の結果を用いてもよい．)

**復習問題 12.4** 確率変数 $X, Y$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．このとき，

$$\mathsf{H}(X \mid Y) \leq \mathsf{H}(X)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.2 の結果を用いてもよい．)

**復習問題 12.5** 確率変数 $X, Y$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．このとき，

$$\mathsf{H}(X,Y) \leq \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.1 と 12.4 の結果を用いてもよい．)

**復習問題 12.6** 確率変数 $X, Y, Z$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．このとき，

$$2\,\mathsf{H}(X,Y,Z) \leq \mathsf{H}(X,Y) + \mathsf{H}(X,Z) + \mathsf{H}(Y,Z)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.1 と 12.4 の結果を用いてもよい．)

**復習問題 12.7** $n$ を正整数とする．集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ と各要素 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$p_i = \frac{1}{m}|\{j \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid i \in S_j\}|$$

とする．このとき，

$$\log_2 m \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{H}(p_i)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.11 を用いてよい．)

**復習問題 12.8** 任意の正整数 $n$ と実数 $p \in (0, 1/2]$ に対して

$$\sum_{i=0}^{\lfloor np \rfloor} \binom{n}{i} \leq 2^{n\mathsf{H}(p)}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.7 と 12.10 を用いてもよい．)

**復習問題 12.9** $n$ を正整数とする．集合

$$A \subseteq \{(x,y,z) \mid x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

に対して，

$$\begin{aligned} A_x &= \{(0,y,z) \mid (x,y,z) \in A\}, \\ A_y &= \{(x,0,z) \mid (x,y,z) \in A\}, \\ A_z &= \{(x,y,0) \mid (x,y,z) \in A\} \end{aligned}$$

とする．このとき，

$$|A|^2 \leq |A_x| \cdot |A_y| \cdot |A_z|$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.6 を用いてもよい．)

---

**補足問題 12.10** 二値エントロピー関数 $\mathsf{H}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ は

$$\mathsf{H}(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

で定義される．以下の問いに答えよ．

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathsf{H}(p) = \log_2 \dfrac{1-p}{p}$ となることを示せ．
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\mathsf{H}(p) = -\dfrac{1}{p(1-p)\ln 2}$ となることを示せ．
3. $\mathsf{H}(p)$ が $0 < p < 1/2$ において単調に増加し，$p = 1/2$ において最大値 1 を取り，$1/2 < p < 1$ において単調に減少することを証明せよ．

4. 関数 $\mathsf{H}(p)$ $(0 < p < 1)$ のグラフの概形を描け．

**補足問題 12.11**　任意の正整数 $n$ を考え，確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．このとき，

$$\mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{H}(X_i)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：$n$ に関する数学的帰納法を試してみよ．演習問題 12.1 と 12.4 の結果を用いてもよい．)

**補足問題 (発展) 12.12**　任意の正整数 $n$ を考え，確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．

1. 添字の集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$X_I$ と書いたら，$X_i$ $(i \in I)$ を並べた確率変数とする．つまり，$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_h\}$ のとき，$\mathsf{H}(X_I)$ と書いたら，$\mathsf{H}(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_h})$ を表すとする．このとき，

   $$\mathsf{H}(X_I) \geq \sum_{j=1}^{h} \mathsf{H}(X_{i_j} \mid X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j-1}})$$

   が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.1 と 12.4 の結果を用いてもよい．)
2. 添字の集合 $I_1, I_2, \ldots, I_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ がこの中の $k$ 個以上に含まれるとする．このとき，

   $$k \cdot \mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \mathsf{H}(X_{I_\ell})$$

   が成り立つことを証明せよ．(ヒント：小問 1 の結果と演習問題 12.4 を用いてみよ．)

---

**追加問題 12.13**　任意の整数値確率変数 $X$ に対して，

$$\mathsf{H}(X^2 \mid X) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．一方で，$\mathsf{H}(X \mid X^2) \neq 0$ となる $X$ の例を 1 つ与えよ．

**追加問題 12.14**　確率変数 $X, Y, Z$ が有限個の異なる値しか正の確率で取らないとする．このとき，

$$\mathsf{H}(X, Y, Z) + \mathsf{H}(Y) \leq \mathsf{H}(X, Y) + \mathsf{H}(X, Z)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 12.1 と 12.4 の結果を用いてもよい．)