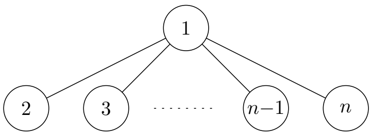
離散数理工学 (10) **2025 年 1 月 14 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2025 年 1 月 21 日 午前 9:00

授業内問題 10.1 $n \geq 2$ として，次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．これは頂点 1 に他の $n-1$ 個の頂点がすべて隣接するが，その他に隣接関係が存在しないものである．



このとき，頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ．

復習問題 10.2 1 人のギャンブラーが n 万円を所持している．彼が賭けを 1 回行うごとに，1/2 の確率で所持金は 1 万円増加し，1/2 の確率で所持金は 1 万円減少する．賭けは繰り返し行われ，所持金が 0 万円か $3n$ 万円になると終了する．以下の問いに答えよ．

1. 所持金が k 万円であるとき，0 万円で終了する確率を p_k で表す．すなわち，

$$p_k = \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = k)$$

と定義する．このとき，次の漸化式が成立することを示せ．

$$p_k = \begin{cases} 1 & (k = 0 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} & (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ 0 & (k = 3n \text{ のとき}). \end{cases}$$

2. 上の小問の漸化式を解き，任意の $k \in \{0, \ldots, 3n\}$ に対する p_k が何であるか，定めよ．

復習問題 10.3 問題 10.2 と同じ状況を考える．ギャンブラーが k 万円所持しているとき，そこから終了までに賭けを行う回数の期待値を $T_{n,k}$ で表す．すなわち，

$$T_{n,k} = \mathsf{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

とする．以下の問いに答えよ．

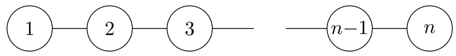
1. $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ となることを示せ．
2. $1 \leq k \leq 3n-1$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}.$$

(ヒント：問題 10.6 を用いてもよい．)

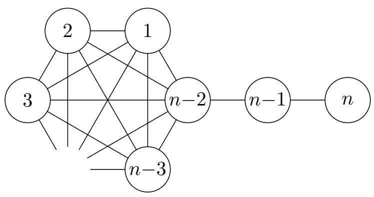
3. 上の小問で得られた漸化式を解き，$T_{n,k}$ の一般項を定めよ．

復習問題 10.4 $n \geq 1$ として，次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．これは頂点数 n の道である．



このとき，頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ．

復習問題 10.5 $n \geq 3$ として，次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．これは頂点数 $n-2$ の完全グラフに長さ 2 の道が貼り付けられたものである．



このとき，頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ．

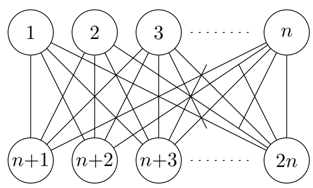
補足問題 10.6 任意の非負整数値確率変数 X, Y と事象 A に対して，$\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathsf{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathsf{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

が成り立つことを証明せよ．ここで，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は非負整数全体から成る集合を表す．

追加問題 10.7 問題 10.2 の状況において，彼が賭けを 1 回行うごとに，2/3 の確率で所持金は 1 万円増加し，1/3 の確率で所持金は 1 万円減少するとする．このとき，所持金が 0 万円となって終了する確率を計算せよ．

追加問題 10.8 $n \geq 2$ として，次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．これはそれぞれの部集合の頂点数が n であるような完全二部グラフである．



このとき，頂点 1 から頂点 $2n$ への到達時刻の期待値を求めよ．