

提出締切：2025 年 1 月 14 日 午前 9:00

以下の演習問題では、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ とする。

授業内問題 9.1 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 ($X_t \mid t \in \mathbb{N}$) を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け。
- 条件つき確率 $\Pr(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$ が何であるか、答えよ。
- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

授業内問題 9.2 $n \times n$ 推移行列 P を持つマルコフ連鎖を考える (ただし、 n は 1 以上の整数)。確率分布 π と μ がこのマルコフ連鎖の定常分布であるとき、 $(\pi + \mu)/2$ もこのマルコフ連鎖の定常分布であることを証明せよ。(注：まず、 $(\pi + \mu)/2$ が確率分布であることを確認する必要がある。)

復習問題 9.3 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 ($X_t \mid t \in \mathbb{N}$) を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- 条件つき確率 $\Pr(X_2 = 3 \mid X_0 = 3)$ が何であるか、答えよ。
- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

復習問題 9.4 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 ($X_t \mid t \in \mathbb{N}$) を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

復習問題 9.5 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 ($X_t \mid t \in \mathbb{N}$) を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

補足問題 9.6 任意の事象 A, B, C に対して、 $\Pr(B \cap C) \neq 0$ のとき

$$\Pr(A \cap B \mid C) = \Pr(A \mid B \cap C) \Pr(B \mid C)$$

が成り立つことを証明せよ。

補足問題 9.7 状態空間 S を $\{1, \dots, n\}$ とするマルコフ連鎖 ($X_t \mid t \in \mathbb{N}$) の推移行列が $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ であるとする。このとき、任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して、 $\Pr(X_t = j \mid X_0 = i)$ が行列積 P^t の第 i, j 成分に等しいことを証明せよ。

追加問題 9.8 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t | t \in \mathbb{N})$ を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ. 存在する場合、その極限が何であるか、答えよ.

追加問題 9.9 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t | t \in \mathbb{N})$ を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ. 存在する場合、その極限が何であるか、答えよ.

追加問題 9.10 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t | t \in \mathbb{N})$ を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ. 存在する場合、その極限が何であるか、答えよ.