提出締切： 2025 年 1 月 7 日 午前 9:00

授業内問題 8.1 n を正の整数として，$G=(V,E)$ を頂点数 $2n$ の無向グラフとする．このとき，G のカット C で，$|C|=n$ かつ

$$|E(C)| \geq \frac{n}{2n-1}|E|$$

を満たすものが存在することを証明せよ．

復習問題 8.2 k,ℓ を正の整数とする．$R(k,\ell)$ で，「頂点数 n の完全グラフの辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を作ったとき，G_1 が頂点数 k の完全グラフを含むか，G_2 が頂点数 ℓ の完全グラフを含む」という性質を満たす正整数 n の最小値とする．以下の問いに答えよ．

1. 任意の $k \geq 1$ に対して $R(k,1)=1$ が成り立ち，任意の $\ell \geq 1$ に対して $R(1,\ell)=1$ が成り立つことを証明せよ．
2. $k,\ell > 1$ のとき，$R(k,\ell) \leq R(k,\ell-1)+R(k-1,\ell)$ が成り立つことを証明せよ．
3. 任意の $k \geq 1$ に対して $R(k,k) > 2^{k/2-1}$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：確率的手法を適用してみよ．)

復習問題 8.3 辺を持つ任意の有限無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，あるカット $C \subseteq V$ が存在して，

$$|E(C)| \geq \frac{1}{2}|E|$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.4 n 個の玉を n 個の箱へランダムに入れる．その確率は玉ごとに独立で，すべての i と j に対して，玉 i を箱 j に入れる確率は $\frac{1}{n}$ である．

n は十分大きいとして，以下の問いに答えよ．

1. 1 つの箱に注目し，それを箱 j とする．自然数 $\ell \geq 1$ に対して，箱 j に玉が ℓ 個 (以上) 入る確率が $\left(\frac{\mathrm{e}}{\ell}\right)^{\ell}$ 以下であることを証明せよ．
2. 上の小問にある確率が，$\ell \geq 3\frac{\ln n}{\ln\ln n}$ のとき $\frac{1}{n^2}$ 以下になることを証明せよ．
3. 以上を踏まえて，どの箱にも高々 $3\frac{\ln n}{\ln\ln n}$ 個しか玉が入っていない確率は，$n \to \infty$ のとき 1 になることを証明せよ．

補足問題 8.5 演習問題 8.2 にある $R(k,\ell)$ に対して

$$R(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 8.2 にある漸化式を利用せよ．)

補足問題 8.6 任意の実数 $0<x<1$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{1+2x} \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

追加問題 8.7 ラムゼー数 $R(3,4)$ について，以下の問いに答えよ．

1. $R(3,4) \leq 10$ を証明せよ．
2. $R(3,4) \geq 9$ を証明せよ．(ヒント：2 分割を具体的に与えよ．)

追加問題 8.8 n を正の整数として，頂点数 n の有向グラフ $G=(V,E)$ を考える．V は G の頂点集合であり，E は V の順序対 (u,v) をいくつか集めた集合であり，G の辺集合と呼ばれる．

このとき，ある全単射 $f\colon V \to \{1,2,\dots,n\}$ で，$f(u) < f(v)$ を満たす辺 $(u,v) \in E$ の総数が $\frac{1}{2}|E|$ 以上であるものが存在することを証明せよ．

追加問題 8.9 演習問題 8.4 の設定を考える．ただし，n 個の箱には 1 から n までの番号がついているとする．以下の量が何になるか答えよ．

1. 箱 $1,2,3$ の中に合わせてちょうど 1 個の玉しか入っていないという条件のもとで，箱 1 に玉が 1 つ入っているという条件つき確率．
2. 箱 2 に玉が入っていないという条件のもとで，箱 1 に入る玉の数の条件つき期待値．
3. 箱 2 より多くの玉が箱 1 に入っている確率．