離散数理工学 (7) **2024 年 12 月 17 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2024 年 12 月 24 日 午前 9:00

授業内問題 7.1 公平な (6 面) サイコロでは，$1, 2, 3, 4, 5, 6$ の目がそれぞれ $1/6$ の確率で出る．このサイコロを続けて何回か独立に投げることを考える．以下の量が何になるか，答えよ．ただし，$n \geq 1$ は整数であるとする．

1. n 回投げて，1 が n 回出る確率.
2. n 回投げて，1 が一度も出ない確率.
3. n 回投げて，1 が一度は出る確率.
4. n 回投げたとき，1 が出る回数の期待値.
5. 1 が出るまで投げ続けたとき，投げる回数の期待値.
6. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のすべてが出るまで投げ続けたとき，投げる回数の期待値.
7. $1, 2, 3$ のすべてが出るまで投げ続けたとき，投げる回数の期待値.

授業内問題 7.2 演習問題 7.1 の設定を考える．n 回サイコロを投げたとき，1 の出る回数が $n/3$ 以上になる確率が $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを証明せよ．(ヒント：演習問題 7.3 の結果を用いてもよい．)

復習問題 7.3 非負整数値を取る確率変数 Z を考える．期待値 $\mathsf{E}[Z]$ が存在するとき，任意の正実数 $t > 0$ に対して

$$\Pr(Z \geq t) \leq \frac{\mathsf{E}[Z]}{t}$$

が成り立つことを証明せよ．(注：これは**マルコフの不等式**と呼ばれる．)

復習問題 7.4 表の出る確率が p であり，裏の出る確率が $1 - p$ であるような硬貨を考える．ただし，$0 < p \leq 1$ である．この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える．以下の量が何になるか，答えよ．ただし，$n \geq 1$ は整数であるとする．

1. n 回投げて，表が n 回出る確率.
2. n 回投げて，表が一度も出ない確率.
3. n 回投げて，表が一度は出る確率.
4. n 回投げたとき，表が出る回数の期待値．(ヒント：演習問題 7.9 の結果を用いてもよい．)
5. 表が出るまで投げ続けたとき，投げる回数の期待値．(ヒント：演習問題 7.10 の結果を用いてもよい．)

復習問題 7.5 演習問題 7.4 の設定を考える．n 回硬貨を投げたとき，表の出る回数が $2pn$ 以上になる確率が $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを証明せよ．(ヒント：演習問題 7.3 の結果を用いてもよい．)

復習問題 7.6 商品を買うと n 種類の景品の中の 1 つが当たる．その確率は景品の間で同一かつ独立であり，$\frac{1}{n}$ である．ここで，n は正整数であるとする．

全種類の景品を集め切るまでに購入する商品の数の期待値が nH_n となることを証明せよ．ただし，H_n は第 n 調和数であり，

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

と定義される．(ヒント：「景品を j 種類所持した瞬間から，新しい景品が当たるまでに購入した商品の数」を確率変数とし，その期待値をまず計算せよ．)

復習問題 7.7 演習問題 7.6 の設定を考える．このとき，商品購入回数が $2nH_n$ を上回る確率が $\frac{1}{n+1}$ 以下になることを証明せよ．

復習問題 7.8 1 年の日数が k であり，部屋には m 人の学生がいるとする．学生 i の誕生日が j である確率は，すべての i と j に対して $\frac{1}{k}$ であり，それらの事象は互いに独立であるとする．ただし，k, m は正整数であるとする．

$m \geq \sqrt{(2 \ln 2) k} + 1$ のとき，この部屋に同じ誕生日を持つ 2 人の学生がいる確率は $\frac{1}{2}$ 以上になることを証明せよ．

補足問題 7.9 任意の複素数 x, y と任意の整数 $n \geq 1$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

(ヒント：二項定理を用いてもよい．)

補足問題 7.10 任意の実数 $0 < r < 1$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

補足問題 7.11 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，第 n 調和数 H_n は次の式

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

で定義される．第 n 調和数 H_n が以下の不等式を満たすことを証明せよ．

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

追加問題 7.12 演習問題 7.4 の設定を考える．以下の問いに答えよ．

1. n 回硬貨を投げたとき，表の出る回数を表す確率変数を X とする．定数 $c > 1$ に対して $\mathsf{E}[c^X]$ が何であるか，答えよ．
2. 次の不等式を証明せよ．

$$\Pr(X \geq 2pn) \leq \left(\frac{1+(c-1)p}{c^{2p}}\right)^n .$$

演習問題 7.3 の結果を用いてもよい．

3. $p = 1/4$ のとき，この右辺を最小とする c を求めよ．

追加問題 7.13 演習問題 7.6 の設定を考える．任意の定数 $c > 0$ に対して，商品購入回数が $n \ln n + cn$ を上回る確率が e^{-c} 以下になることを証明せよ．

追加問題 7.14 演習問題 7.6 の設定を考える．自然数 $k \geq 1$ に対して，k 個の商品を購入した後に得られる景品の種類数を確率変数 X で表す．このとき，X の期待値を計算せよ．(ヒント：標示確率変数をうまく用いてみよ．景品 i に対して，X_i を i が k 個の商品の購入によって得られなかったときに 1，得られたときに 0 となる確率変数とする．このとき，$X = n - \sum_{i=1}^{n} X_i$ と表されることをまず確認せよ．)