提出締切： 2024 年 12 月 3 日 午前 9:00

以下，第 n ベル数を B_n で表し，第 2 種スターリング数を $\left\{ n \atop k \right\}$ で表す．

授業内問題 6.1 第 2 種スターリング数について，次の等式が成り立つことを組合せ的解釈に基づく方法で証明せよ．

1. 任意の整数 $n \geq 1$ に対して
$$\left\{ n \atop n-1 \right\} = \binom{n}{2}.$$
2. 任意の整数 $n \geq 1$ に対して
$$\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

復習問題 6.2 任意の非負整数 n, k (ただし，$k \leq n$) に対して，次が成り立つことを第 2 種スターリング数の組合せ的解釈に基づいて証明せよ．

$$\left\{ n \atop k \right\} = \begin{cases} 1 & (n = k \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 0 \text{ かつ } k = 0 \text{ のとき}), \\ k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

復習問題 6.3 任意の整数 $n \geq 0$ に対して，次が成り立つことをベル数と二項係数の組合せ的解釈に基づいて証明せよ．

$$B_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

復習問題 6.4 ベル数の指数型母関数を $B(x)$ とする．すなわち，

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

と定義する．

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B(x) = \mathrm{e}^x B(x)$ が成り立つことを証明せよ．（演習問題 6.3 の結果を用いてもよい．）
2. 微分方程式の初期値問題を解くことで，$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$ が成り立つことを証明せよ．
3. $B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$ の級数展開から，
$$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$
が成り立つことを導出せよ．

復習問題 6.5 任意の整数 $n \geq k \geq 0$ に対して，

$$\left\{ n+1 \atop k+1 \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ j \atop k \right\}$$

が成り立つことを組合せ的解釈に基づき証明せよ．

復習問題 6.6 任意の非負整数 m, n に対して，

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ m \atop j \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

が成り立つことを組合せ的解釈に基づき証明せよ．ただし，$0^0 = 1$ とする．

追加問題 6.7 任意の非負整数 n, k に対して，次の等式が成り立つことを組合せ的解釈に基づいて証明せよ．

$$\left\{ n+k+1 \atop k \right\} = \sum_{j=0}^{k} j \left\{ n+j \atop j \right\}.$$

追加問題 6.8 $m \geq n$ を満たす任意の正整数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを組合せ的解釈に基づいて証明せよ．

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} \frac{m!}{(m-k)!}$$

（ヒント：$\frac{m!}{(m-k)!} = k! \binom{m}{k}$ であることに着目せよ．）