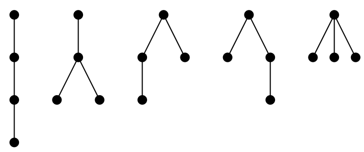
離散数理工学 (5) **2024 年 11 月 19 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2024 年 11 月 26 日 午前 9:00

授業内問題 5.1 整数 $n \geq 1$ に対して，頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木を考える．例えば，$n = 3$ のとき，それらをすべて挙げると次のようになる．各頂点の持つ子の数には制限がないことに注意する．



以下の問いに答えよ．

1. 頂点数 5 の順序付きラベルなし根付き木をすべて挙げ，その総数が何であるか，答えよ．
2. 頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木の総数が第 n カタラン数と等しいことを，全単射による証明によって示せ．入れ子状の括弧列，順序付きラベルなし全二分木，ディック道のどれを用いてもよい．(ヒント：頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木の辺の数が n であることに着目せよ．)

復習問題 5.2 カタラン数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ を次の漸化式で定義する．

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，次に挙げる数が C_n に等しいことを，それが上記の漸化式を満たすことによって証明せよ．

1. 長さ $2n$ の入れ子状になった括弧列の総数.
2. 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数.
3. $(0,0)$ から (n,n) に至るディック道の総数.

復習問題 5.3 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，次の数がそれぞれ等しいことを，全単射を用いて証明せよ．

1. 長さ $2n$ の入れ子状になった括弧列の総数.
2. 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数.
3. $(0,0)$ から (n,n) に至るディック道の総数.

復習問題 (発展) 5.4 演習問題 5.2 に挙げる漸化式で定義される数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ に対して，以下の問いに答えよ．

1. 数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ の通常型母関数を $C(x)$ とする．このとき，$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$ が成り立つことを証明せよ．
2. 通常型母関数 $C(x)$ が
$$C(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$$
と書けることを証明せよ．
3. 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ C_{n-1} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$
で定義する．このとき，任意の整数 $n \geq 0$ に対して
$$a_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n$$
となることを証明せよ．ただし，任意の実数 α と非負整数 $n \geq 0$ に対して，
$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$
として，$|z| < 1$ を満たす複素数 z に対して
$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n$$
が成り立つことを用いてよい．(ヒント：$xC(x)$ が $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数であることに注意せよ．)
4. 数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ の一般項が
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$
と書けることを証明せよ．

復習問題 5.5 整数 $n \geq 0$ に対して，第 n カタラン数を C_n と書くことにする．このとき，

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

が成り立つことを，次の方針に従って異なる 2 つの方法で証明せよ．

1. 第 n カタラン数の一般項の公式
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$
と二項係数の定義を使って．

2. 組合せ的解釈を使って.

復習問題 5.6 整数 $n \geq 0$ に対して，第 n カタラン数を C_n と書くことにすると，演習問題 5.4 によって，

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が成り立つ．これを書き換えると，

$$(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$$

となる．この等式をカタラン数と二項係数の組合せ的解釈に基づいて証明したい.

1. 整数 k は $0 \leq k \leq n$ を満たすものとする．$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，対角線 $y = x$ より下の領域で上に移動する回数がちょうど k であるものの総数が C_n に等しいことを証明せよ.
2. 小問 1 の結果を用いて，$(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$ となることをカタラン数と二項係数の組合せ的解釈に基づいて証明せよ.

追加問題 5.7 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，次を満たす整数列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を考える.

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.
- 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$a_i \leq i$.

例えば，$n = 3$ のとき，この性質を満たす数列をすべて挙げると，以下の 5 つとなる.

$$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,2,3).$$

以下の問いに答えよ.

1. $n = 4$ のとき，この性質を満たす数列をすべて挙げ，その総数が何であるか，答えよ.
2. この性質を満たす数列の総数が第 n カタラン数と等しいことを，全単射による証明によって示せ．入れ子状の括弧列，順序付きラベルなし全二分木，ディック道のどれを用いてもよい.

追加問題 5.8 整数 $n \geq 0$ に対して，第 n カタラン数を C_n と書くことにする．このとき，

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

が成り立つことを，次の方針に従って異なる 2 つの方法で証明せよ.

1. 第 n カタラン数の一般項の公式

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

と二項係数の定義を使って.
2. **(発展)** 組合せ的解釈を使って.