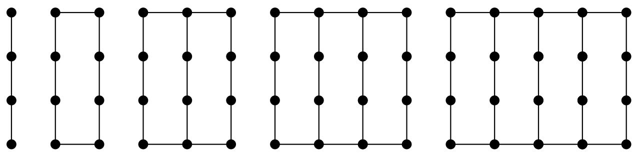
離散数理工学 (2) **2024 年 10 月 29 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2024 年 11 月 5 日 午前 9:00

授業内問題 2.1 正整数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ T_n を考える．

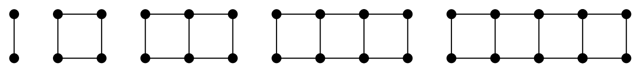


T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

グラフ t_n における完全マッチングの総数を t_n としたとき，ある実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ について次の漸化式が成り立つことを証明せよ．そのとき，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に当てはまる適切な値を定めよ．

$$t_n = \begin{cases} \alpha & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \beta & (n = 2 \text{ のとき}) \\ \gamma t_{n-1} + \delta t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.2 正整数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ A_n を考える．

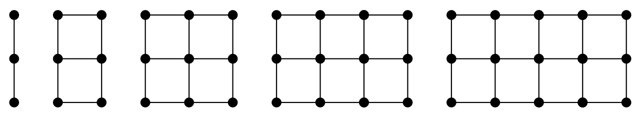


A_1 A_2 A_3 A_4 A_5

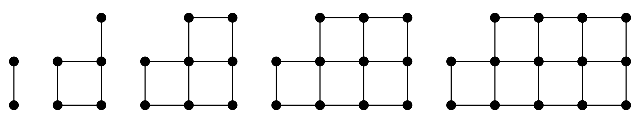
グラフ A_n における完全マッチングの総数を a_n としたとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.3 正整数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ B_n と C_n を考える．



B_1 B_2 B_3 B_4 B_5



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

グラフ B_n における完全マッチングの総数を b_n とし，グラフ C_n における完全マッチングの総数を c_n とする．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4,\ \text{偶数のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.4 次のアルゴリズムを考える．

```
def fnct(n)
  print "a"
  if n > 2
    fnct(n-1)
    fnct(n-2)
  end
end
```

非負整数 $n \geq 0$ に対して，`fnct`(n) を実行したときに出力される「`a`」の数を f_n とする．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.5 正整数 $a, b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ のとき，

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$a \bmod b$ は a を b で割った余りを表す．(注：問題 2.9 の結果を使ってもよい．)

復習問題 2.6 次のアルゴリズムを考える．

```
def gcd(a, b) # precondition: a >= b >= 0
  print "G"
  if b == 0
    return a
  else
    gcd(b, a % b)
  end
end
```

そして，任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して次の量を考える．

$$g_n = \max_{\substack{a \geq 1, \\ b \leq n}} \{\texttt{gcd}(a,\ b) \text{ の実行で出力される G の数}\}$$

このとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

1. 任意の $n \geq 0$ に対して，$g_n \leq g_{n+1}$．

2. $g_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$

(注：問題 2.5 の結果を使ってもよい．)

補足問題 2.7 演習問題 2.3 におけるグラフ B_n, C_n と数 b_n, c_n を考える．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3,\text{ 奇数のとき}). \end{cases}$$

補足問題 2.8 正整数 $a, b \geq 1$ の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す．任意の正整数 $a > b \geq 1$ に対して，$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ が成り立つことを証明せよ．(注意：この事実から，ユークリッドのアルゴリズムの正当性が導かれる．)

補足問題 2.9 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して，

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

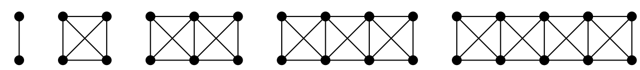
が成り立つことを証明せよ．

追加問題 2.10 問題 2.2 におけるグラフ A_n と数 a_n を考える．整数 n と i が $n \geq 5$ と $3 \leq i \leq n-2$ を満たすとき，次が成り立つことを証明せよ．

$$a_n = a_{i-1}a_{n-i} + a_{i-1}a_{n-i-1} + a_{i-2}a_{n-i}.$$

ヒント：組合せ的解釈を考えてみよ．

追加問題 2.11 正整数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ D_n を考える．



D_1 D_2 D_3 D_4 D_5

グラフ D_n における完全マッチングの総数を d_n とするとき，ある実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．そのとき，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に当てはまる適切な値を定めよ．

$$d_n = \begin{cases} \alpha & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \beta & (n = 2 \text{ のとき}) \\ \gamma d_{n-1} + \delta d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

追加問題 2.12 次のアルゴリズムを考える．

```
def fnct2(n)
  print "K"
  if n == 0
    return
  elsif n % 2 == 0
    fnct2(n/2)
  else
    fnct2(n-1)
  end
end
```

非負整数 $n \geq 0$ に対して，`fnct2(`n`)` が出力する `K` の総数を p_n で表す．次の式が成り立つことを証明せよ．

$$p_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + p_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$