提出締切： 2024 年 10 月 29 日 午前 9:00

授業内問題 1.1 任意の非負整数 n, r を考える．

1. $n \geq r$ ならば，次の等式が成り立つことを，二項係数の定義に基づいて式変形により，証明せよ．
$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$
(ヒント：数学的帰納法を用いてもよい．)
2. 小問 1 の等式に対して，組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.2 任意の非負整数 $n \geq 1$ に対して，
$$n! \leq \mathrm{e}n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
が成り立つことを証明せよ．演習問題 1.10 を用いてよい．

復習問題 1.3 任意の非負整数 $a \geq b \geq 0$ に対して，
$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.4 任意の正整数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば
$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.5 任意の正整数 $a \geq b \geq 1$ に対して
$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式を
$$\binom{a}{b} b = a\binom{a-1}{b-1}$$
と変形することで，組合せ的解釈による証明も与えよ．(部分集合の選択, 着色, 格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.6 任意の正整数 $a \geq 1$ と任意の正整数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，
$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$
が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 1.5 を用いてよい．)

復習問題 1.7 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
が成り立つことを，二項定理を用いて証明せよ．また，この等式に対して，二重の数え上げによる証明を与えよ．

復習問題 1.8 任意の正整数 $n \geq 1$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．

復習問題 1.9 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また, この等式に対して, 二重の数え上げによる証明を与えよ．

補足問題 1.10 任意の実数 x に対して，$1 + x \leq \mathrm{e}^x$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.11 任意の正整数 $n \geq 1$ に対して，
$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$
が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.12 正整数 a と b が $a \geq b$ を満たすとする．

1. 不等式 $\displaystyle\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ．
2. 不等式 $\displaystyle\frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．演習問題 1.10 を用いてよい．
3. 上の 2 つの小問より，$\displaystyle\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.13 [**二項定理**] 任意の複素数 x, y と任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ.(ヒント:演習問題 1.4 を用いてもよい.)

追加問題 1.14 次を証明せよ.演習問題 1.10 を用いてよい.

1. 任意の正整数 $n \geq 1$ に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$.
2. 任意の正整数 $n \geq 1$ に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \mathrm{e}$.
   (ヒント:$1+\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ.)
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.(ヒント:上の 2 つの小問を用いよ.)

追加問題 1.15 問題 1.8 にある等式は係数が -1 である項を移項させると,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{ 偶数}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{ 奇数}}}^{n} \binom{n}{k}$$

となる.この等式の両辺に対して組合せ的解釈を与え,等式自体を全単射による証明で導いてみよ.

追加問題 1.16 任意の正整数 $n \geq 1$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ.二項定理を用いてもよい.また, この等式に対して, 二重の数え上げによる証明を与えよ.

追加問題 1.17

1. 任意の非負整数 $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して,
   $$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$
   が成り立つことを証明せよ.また,この等式に対する,二重の数え上げによる証明を与えよ.
2. 任意の非負整数 $a \geq c \geq 0$ に対して,
   $$\sum_{b=c}^{a} \binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c} 2^{a-c}$$
   が成り立つことを証明せよ.(今まで出てきた等式を用いてもよい.)また,この等式に対する,二重の数え上げによる証明を与えよ.