

1 レポート課題

次の 3 問にすべて答えよ。なお、用語の定義、記法は本講義で用いるものに準拠する。

問 1

有向グラフ $G = (V, A)$, 弧容量関数 $u: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 弧費用関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 供給・需要を表す関数 $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられている。以下の問いに答えよ。

1. 関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ と $f': A \rightarrow \mathbb{R}_+$ がネットワーク (G, u, c) の b -流であるとする。このとき, $(f + f')/2$ もネットワーク (G, u, c) の b -流であることを証明せよ。ただし, $(f + f')/2: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ は, 任意の弧 $a \in A$ に対して,

$$((f + f')/2)(a) = \frac{1}{2}(f(a) + f'(a))$$

とすることで定義される。(使用してもよい性質: 第 9 回講義スライドのページ 38/39 まで。)

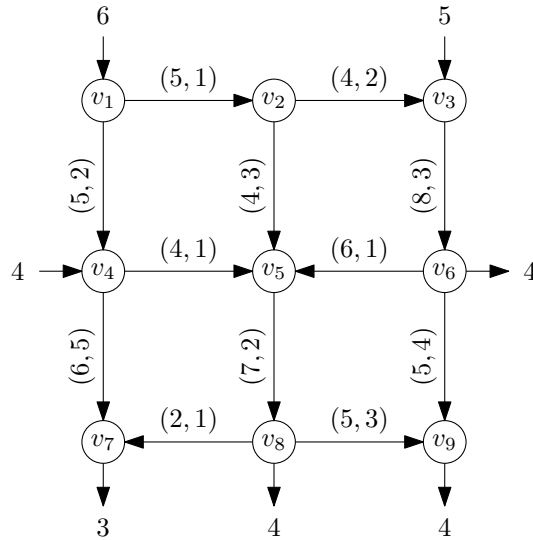
2. 関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ と $f': A \rightarrow \mathbb{R}_+$ がネットワーク (G, u, c) の最小費用 b -流であるとする。このとき, 問 1-1 で導入した関数 $(f + f')/2: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ もネットワーク (G, u, c) の最小費用 b -流であることを証明せよ。(使用してもよい性質: 第 9 回講義スライドのページ 38/39 まで。)

問 2

次のネットワークを考える。ネットワークは有向グラフ $G = (V, A)$, 弧容量関数 $u: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 弧費用関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 供給・需要を表す関数 $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ で定められる。

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.
- $A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_4, v_7), (v_5, v_8), (v_6, v_5), (v_6, v_9), (v_8, v_7), (v_8, v_9)\}$.
- $u((v_1, v_2)) = 5, u((v_1, v_4)) = 5, u((v_2, v_3)) = 4, u((v_2, v_5)) = 4, u((v_3, v_6)) = 8, u((v_4, v_5)) = 4, u((v_4, v_7)) = 6, u((v_5, v_8)) = 7, u((v_6, v_5)) = 6, u((v_6, v_9)) = 5, u((v_8, v_7)) = 2, u((v_8, v_9)) = 5$.
- $c((v_1, v_2)) = 1, c((v_1, v_4)) = 2, c((v_2, v_3)) = 2, c((v_2, v_5)) = 3, c((v_3, v_6)) = 3, c((v_4, v_5)) = 1, c((v_4, v_7)) = 5, c((v_5, v_8)) = 2, c((v_6, v_5)) = 1, c((v_6, v_9)) = 4, c((v_8, v_7)) = 1, c((v_8, v_9)) = 3$.
- $b(v_1) = 6, b(v_2) = 0, b(v_3) = 5, b(v_4) = 4, b(v_5) = 0, b(v_6) = -4, b(v_7) = -3, b(v_8) = -4, b(v_9) = -4$.

このネットワークを図示すると次のようになる。弧 a に付された 2 つの数値は $(u(a), c(a))$ を表す。 $b(v) > 0$ のとき, ネットワークの外部から頂点 v に入る矢印が描かれ, 値 $b(v)$ が付されている。 $b(v) < 0$ のとき, ネットワークの外部へ頂点 v から出る矢印が描かれ, 値 $-b(v)$ が付されている。



以下の問いに答えよ。

- 次に挙げる関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ はこのネットワークにおける b -流であるが、最小費用 b -流ではない。
 - $f((v_1, v_2)) = 4, f((v_1, v_4)) = 2, f((v_2, v_3)) = 0, f((v_2, v_5)) = 4, f((v_3, v_6)) = 5, f((v_4, v_5)) = 3,$
 $f((v_4, v_7)) = 3, f((v_5, v_8)) = 7, f((v_6, v_5)) = 0, f((v_6, v_9)) = 1, f((v_8, v_7)) = 0, f((v_8, v_9)) = 3.$
 負閉路最適性条件を用いて、 f が最小費用 b -流ではない理由を説明せよ。(使用してもよい性質：第 10 回講義スライドのページ 22/34 まで。)
- 次に挙げる関数 $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ はこのネットワークに対するポテンシャルであるが、最適ポテンシャルではない。
 - $p(v_1) = 7, p(v_2) = 6, p(v_3) = 9, p(v_4) = 5, p(v_5) = 3, p(v_6) = 5, p(v_7) = 0, p(v_8) = 0, p(v_9) = 3.$
 正カット最適性条件を用いて、 p が最適ポテンシャルではない理由を説明せよ。(使用してもよい性質：第 11 回講義スライドのページ 31/46 まで。)
- 次に挙げる関数 $f': A \rightarrow \mathbb{R}_+$ はこのネットワークにおける b -流であるが、最小費用 b -流でもある。
 - $f'((v_1, v_2)) = 3, f'((v_1, v_4)) = 3, f'((v_2, v_3)) = 0, f'((v_2, v_5)) = 3, f'((v_3, v_6)) = 5, f'((v_4, v_5)) = 4,$
 $f'((v_4, v_7)) = 3, f'((v_5, v_8)) = 7, f'((v_6, v_5)) = 0, f'((v_6, v_9)) = 1, f'((v_8, v_7)) = 0, f'((v_8, v_9)) = 3.$
 簡約費用最適性条件を用いて、 f' が最小費用 b -流である理由を説明せよ。(使用してもよい性質：第 9 回講義スライドのページ 38/39 まで。)

問 3

逐次最短路法では、補助ネットワークにおいて簡約費用を考えて、簡約費用を長さとした場合の最短路に沿って流を更新することで、最終的に最小費用流を見つけるアルゴリズムである(として授業では説明した)。本問では、簡約費用ではなく、補助ネットワークの費用そのものを長さとした場合の最短路に沿って流を更新するアルゴリズムを考える。すなわち、次のように変更した逐次最短路法を考え、「逐次最短路法 β 」と呼ぶことにする*1。

アルゴリズム： 逐次最短路法 β

入力： 有向グラフ $G = (V, A)$, 弧容量関数 $u: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 弧費用関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, 供給・需要を表す関数 $b: V \rightarrow \mathbb{R}$.

出力： b -流 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$.

初期化： 任意の弧 $a \in A$ に対して、 $f(a) = 0$.

反復： f が b -流になるまで以下を繰り返す。

- ネットワーク (G, u, c) と流 f に対する補助ネットワーク $(G_f = (V, A_f), u_f, c_f)$ を構成する。

*1 授業で説明した逐次最短路法との違いは反復中のステップ 4 のみである。

2. 関数 $b_f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を次に従って構成する.

$$\text{任意の頂点 } v \in V \text{ に対して, } b_f(v) = b(v) - f^+(v) + f^-(v).$$

3. グラフ G_f に頂点 s, t を追加し, 次の弧を追加する.

$b_f(v) > 0$ のとき, 弧 (s, v) を追加して, その容量と費用を $u_f((s, v)) = b_f(v), c_f((s, v)) = 0$ とする.

$b_f(v) < 0$ のとき, 弧 (v, t) を追加して, その容量と費用を $u_f((v, t)) = -b_f(v), c_f((v, t)) = 0$ とする.

4. 弧費用 c_f を長さとして, (前のステップにおける変更を施した後の) 有向グラフ G_f における最短 s - t 路を P とする.

5. P に沿って, f を増加させる.

出力: f を出力する.

以下の問いに答えよ.

1. 反復におけるステップ 1 の冒頭においては常に, 補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) には負閉路が存在しないことを証明せよ. (使用してもよい性質: 第 12 回講義スライドのページ 25/33 まで.)
2. 逐次最短路法 β が停止するとき, 出力 f が最小費用 b -流であることを証明せよ. (使用してもよい性質: 第 12 回講義スライドのページ 25/33 まで.)

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 2 月 10 日 (土) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「レポート 2 提出」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる. 書かれた文字を採点者が判別できない場合, 採点できない (つまり, 点をつけられない) ことがあるので, 注意すること.
- 用語と記法は授業におけるものに従う. また, 提出される答案において, 授業中に「性質」として紹介した事項で, 各問において「使用してもよい」と記載されているものは, (それが授業内で証明されていなくても) レポート内では証明せずに用いてもよい. しかし, その場合は, どの性質を用いているのか明示しなければならない.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上