1 レポート課題

次の 3 問にすべて答えよ．なお，用語の定義，記法は本講義で用いるものに準拠する．

問 1

頂点数 2 以上の有向グラフ $G = (V, A)$ と，その異なる 2 頂点 $s, t \in V$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，ネットワーク $(G, u$ における s-t 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 等式
$$\sum_{v \in V} f^-(v) = \sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v)$$
が成り立つことを証明せよ．ただし，頂点 $v \in V$ に対して
$$f^-(v) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a), \quad f^+(v) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$
と定義する．(使用してもよい性質：第 2 回講義スライドのページ 10/70 まで．)
2. ネットワーク (G, u) における任意の s-t カット $S \subseteq V$ に対して，等式
$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} f(a)$$
が成り立つことを証明せよ．(使用してもよい性質：第 2 回講義スライドのページ 27/70 まで．)

問 2

頂点数 2 以上の有向グラフ $G = (V, A)$ と，その異なる 2 頂点 $s, t \in V$ を考える．有向グラフ G に対して，関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$ と関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}_+$ が与えられているとする．

関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ がネットワーク (G, u, ℓ) における s-t 許容流であることを，f が次の 2 条件を満たすこととして定義する．

- 任意の弧 $a \in A$ に対して，$\ell(a) \le f(a) \le u(a)$ が成り立つ
- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，
$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a)$$
が成り立つ．

ネットワーク (G, u, ℓ) における s-t 許容流 f の値を
$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$
で定義する．また，s-t カット $S \subseteq V$ に対して，ネットワーク (G, u, ℓ) における下限考慮容量を
$$\mathrm{cap}'(S) = \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} \ell(a)$$
と定義する．ただし，$\overline{S}$ は S の補集合 $V - S$ を表すとする．以下の問いに答えよ．

1. 与えられたネットワーク (G, u, ℓ) において，値が最大となる s-t 許容流を 1 つ見つける問題を，線形計画問題として記述せよ．その際，何が変数であり，何が定数であるか明示せよ．(使用してもよい性質：第 4 回講義スライドのページ 45/45 まで．)
2. 小問 1 で記述した線形計画問題を (P) とする．問題 (P) の双対問題 (D) を記述せよ．その際，何が変数であり，何が定数であるか明示せよ．(使用してもよい性質：第 4 回講義スライドのページ 45/45 まで．)
3. ネットワーク (G, u, ℓ) における任意の s-t カット $S \subseteq V$ に対して，双対問題 (D) の許容解で，(D) におけるその目的関数値が S の下限考慮容量と等しいものが存在することを証明せよ．(使用してもよい性質：第 4 回講義スライドのページ 45/45 まで．)

問 3

頂点数 2 以上の有向グラフ $G = (V, A)$ と，その異なる 2 頂点 $s, t \in V$，任意の弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 次のように定められる関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ がネットワーク (G, u) の s-t 前流であることを証明せよ．
$$f(a) = \begin{cases} u(a) & a \in \delta^+(s) \text{ のとき，} \\ 0 & \text{それ以外のとき．} \end{cases}$$
(使用してもよい性質：第 7 回講義スライドのページ 40/48 まで．)
2. 次のように定められる関数 $d\colon V \to \mathbb{Z}_+$ が小問 1 で定められた s-t 前流 f に関する距離ラベルであるこ

とを証明せよ．

$$d(v) = \begin{cases} |V| & v = s \text{ であるとき}, \\ 0 & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

(使用してもよい性質：第 7 回講義スライドのページ 40/48 まで．)

2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 12 月 13 日 (水) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る．
- 提出法は Google Classroom にて，課題「レポート 1 提出」より PDF ファイル をアップロードする．レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること．
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点．
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということを意味する．「(2) 表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか，ということを意味する．「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということを意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる．書かれた文字を採点者が判別できない場合，採点できない (つまり，点がつけられない) ことがあるので，注意すること．
- 用語と記法は授業におけるものに従う．また，提出される答案において，授業中に「性質」として紹介した事項で，各問において「使用してもよい」と記載されているものは，(それが授業内で証明されていなかったとしても) レポート内では証明せずに用いてもよい．しかし，その場合は，どの性質を用いているのか明示しなければならない．
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為が疑われる可能性がある．
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない．

以上