離散最適化基礎論
第 14 回
最小費用流問題：費用スケーリング法

岡本 吉央　（電気通信大学）
okamotoy@uec.ac.jp

2024 年 1 月 23 日

最終更新：2024 年 1 月 22 日　09:21

スケジュール (前半)

1.	最大流と最小費用流：定義	(10/3)
2.	最大流問題：増加道法	(10/10)
＊	休み	(10/17)
3.	線形計画法の復習	(10/24)
4.	最大流問題：線形計画問題として	(10/31)
5.	最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム	(11/7)
6.	最大流問題：容量スケーリング法	(11/14)
7.	最大流問題：Push-Relabel 法 (概要)	(11/21)
8.	最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価)	(11/28)

スケジュール (後半)

∗	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
∗	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
∗	休み	(1/30)

最小費用流問題

最適性条件 $\longrightarrow$ アルゴリズム

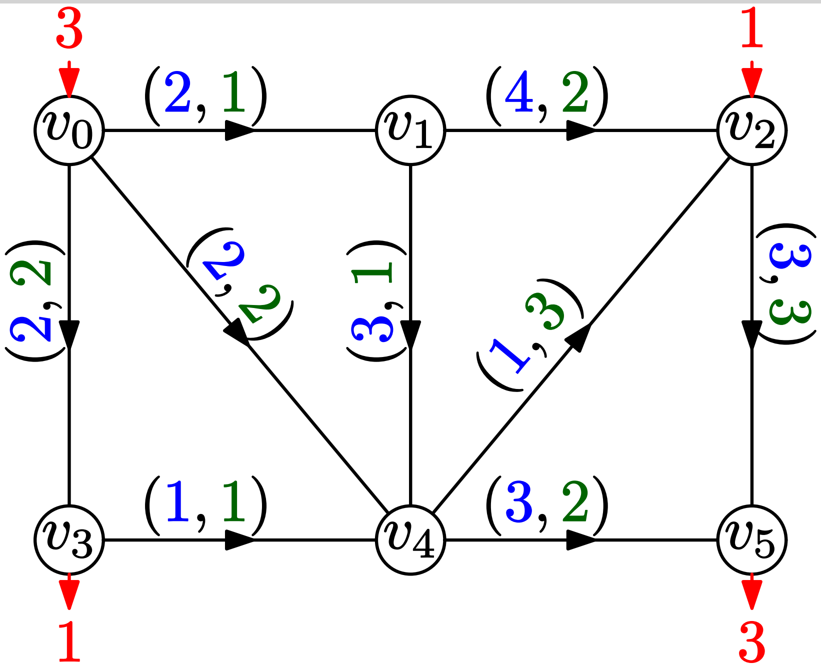
- 簡約費用最適性条件
- 負閉路最適性条件
- 正カット最適性条件

- 逐次最短路法，主双対法
- 負閉路消去法
- 正カット消去法

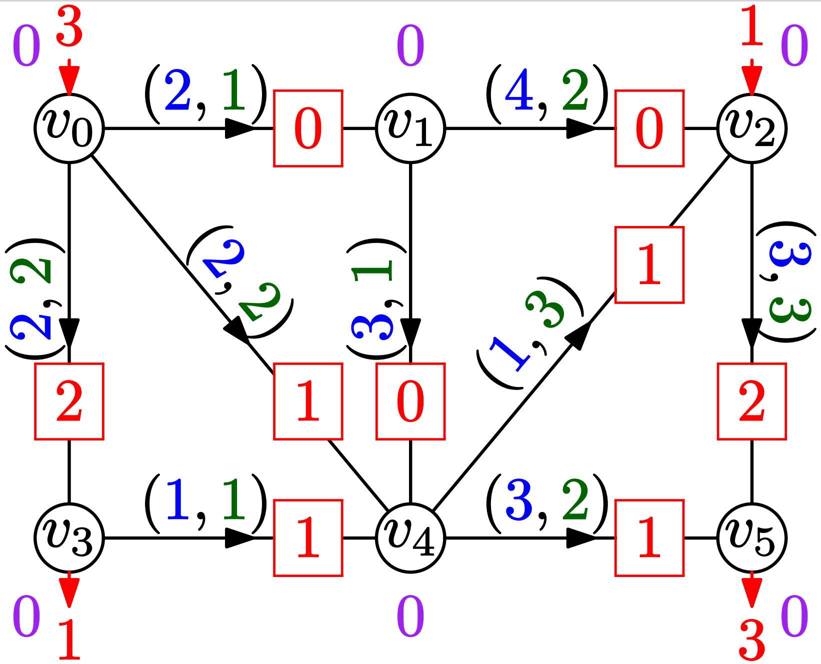
今回の内容

- 主双対法の計算量
  $\rightsquigarrow$ 擬多項式時間
- 主双対法の高速化 (費用スケーリング)
  $\rightsquigarrow$ 弱多項式時間

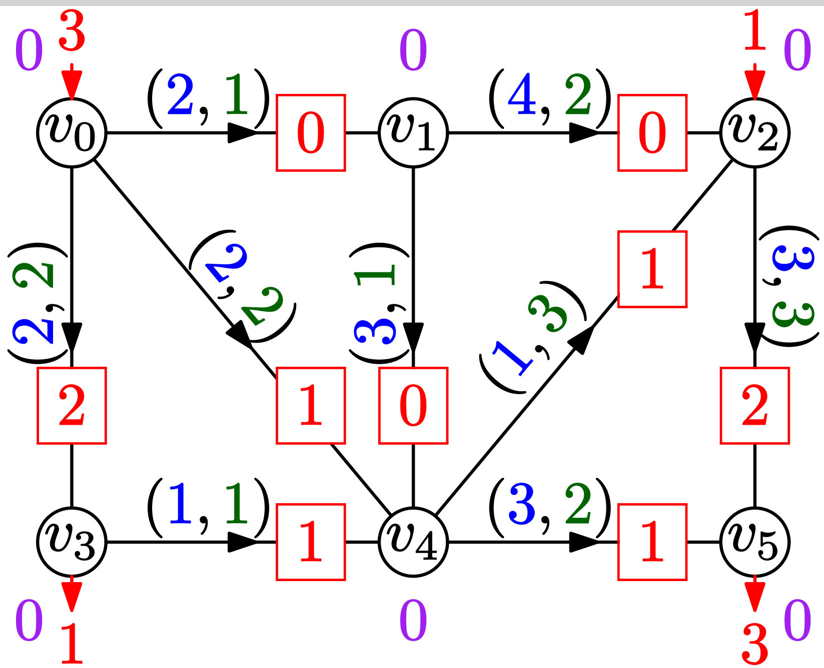
[復習] 主双対法：例 (1/8)

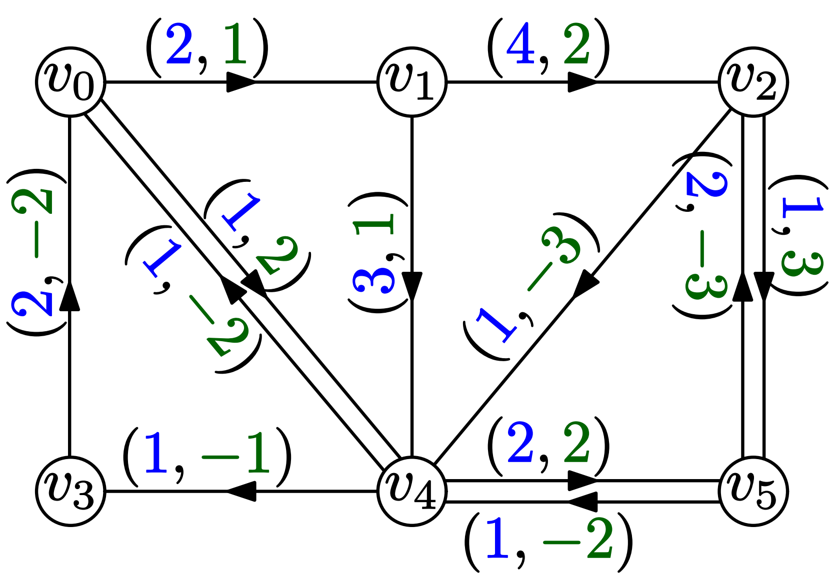


[復習] 主双対法：例 (1/8)



初期化：b-流 f,
ポテンシャル $p = 0$

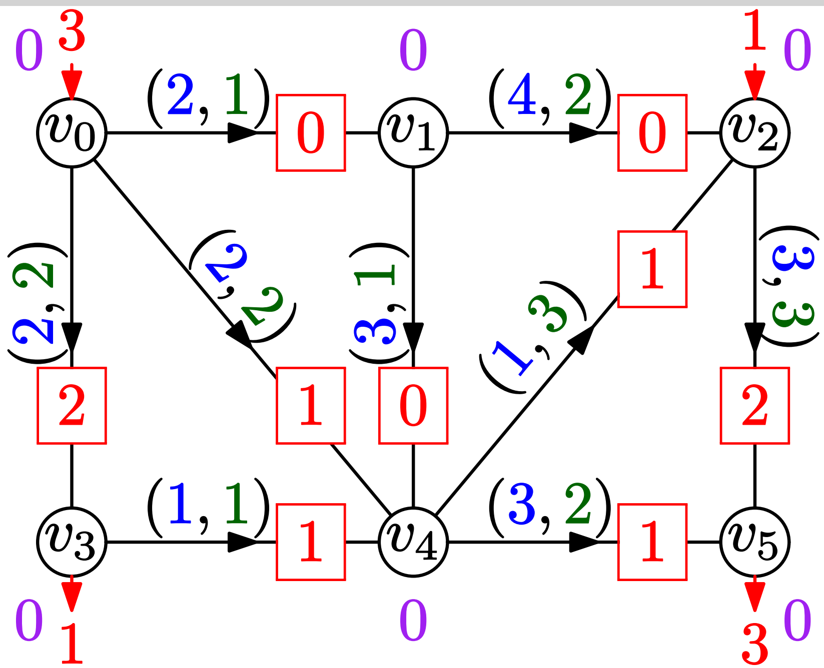


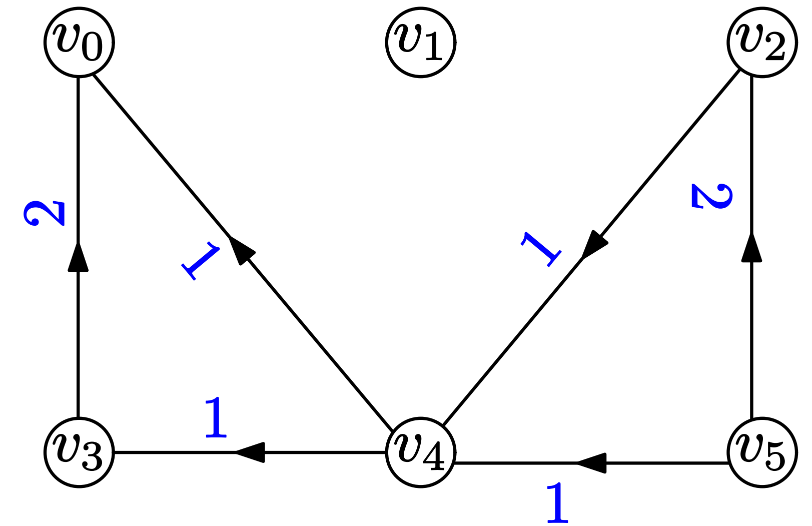


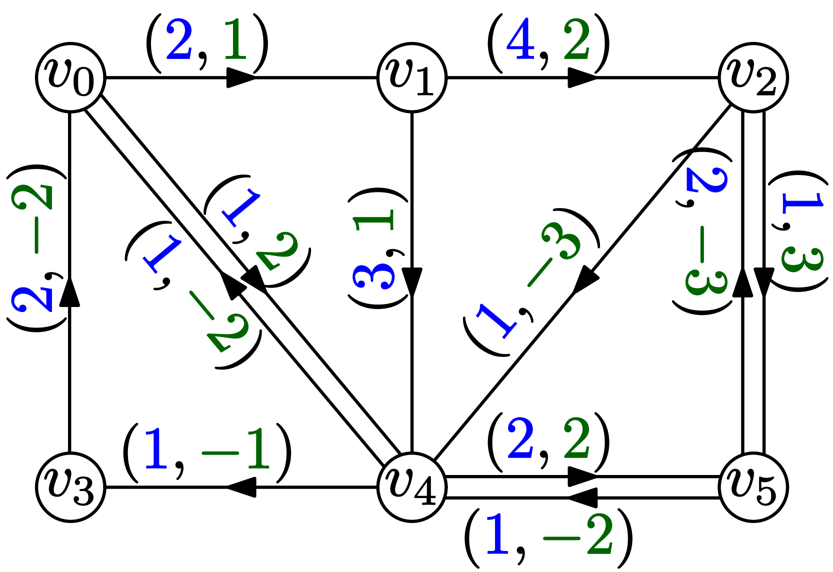
初期化：b-流 f，
ポテンシャル $p = 0$

補助ネットワーク
(費用は簡約費用)

[復習] 主双対法：例 (1/8)



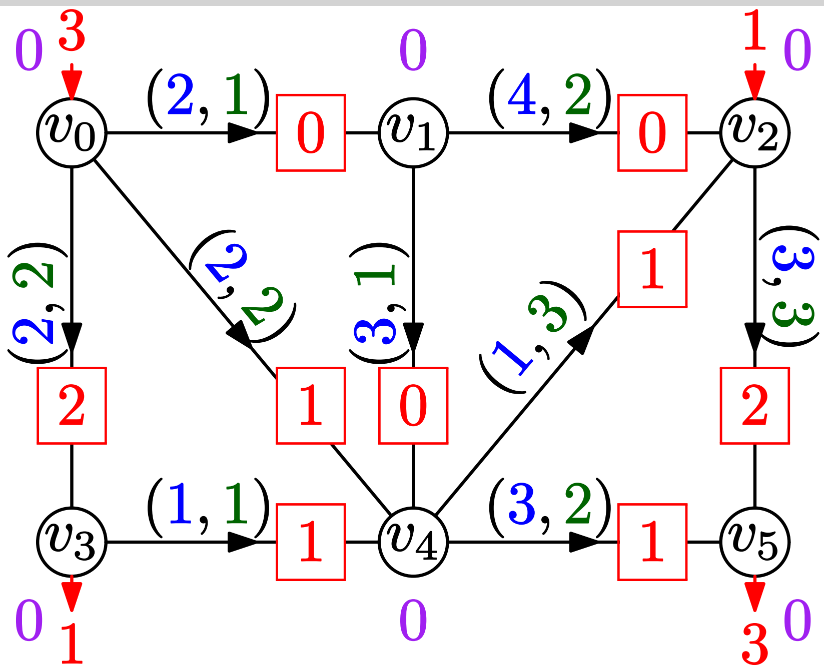




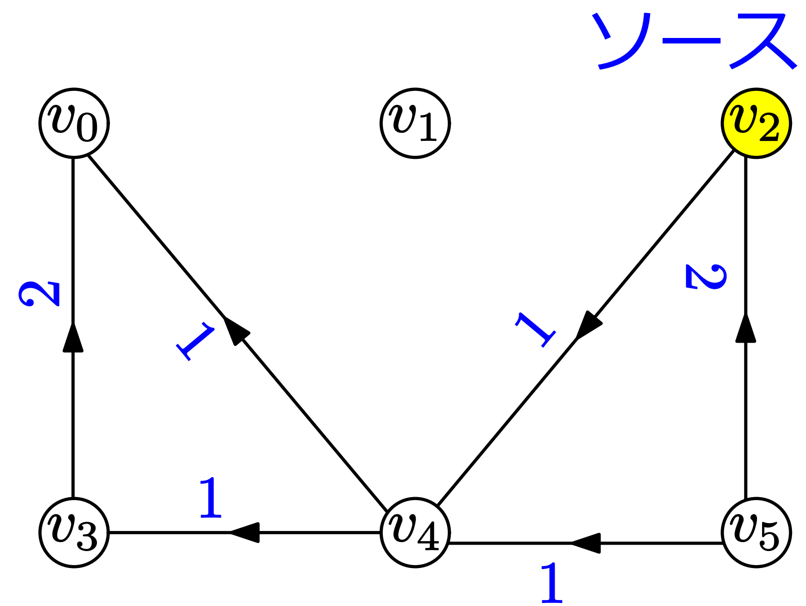
初期化：b-流 f,
ポテンシャル $p = 0$

補助ネットワーク
(費用は簡約費用)

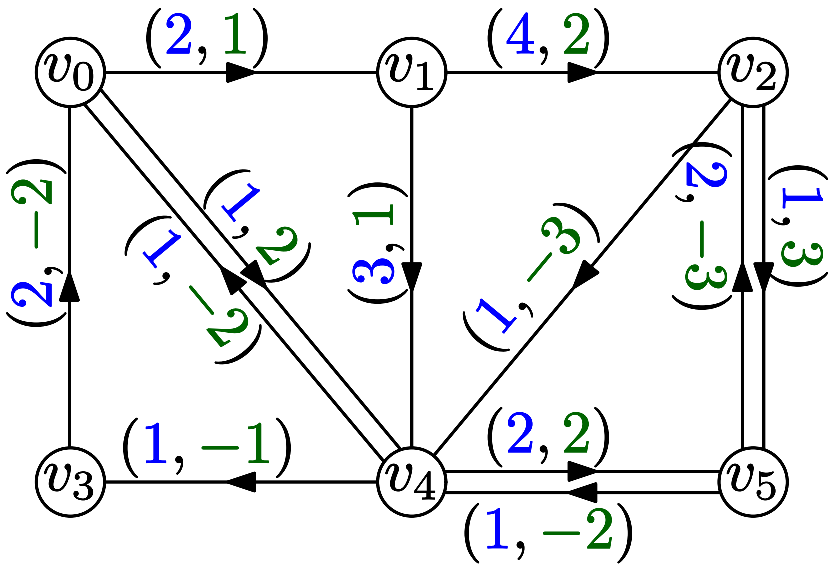
[復習] 主双対法：例 (2/8)



v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
(2, 1)
(4, 2)
(2, 2)
(2, 2)
(3, 1)
(1, 3)
(3, 3)
(1, 1)
(3, 2)

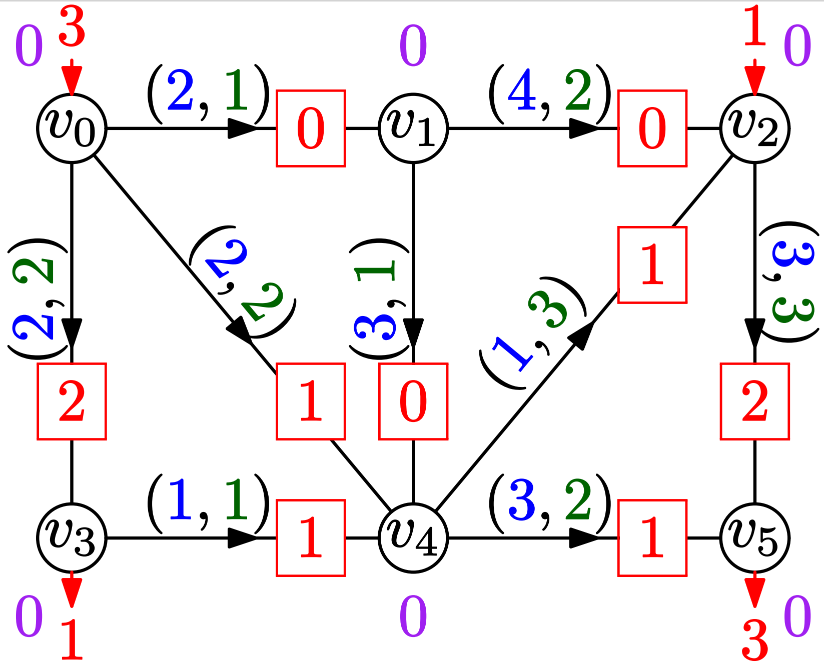


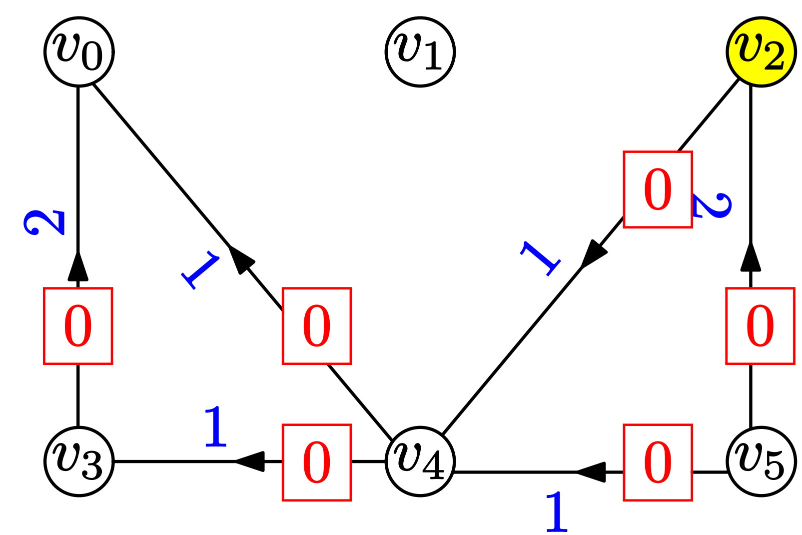
ソース
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

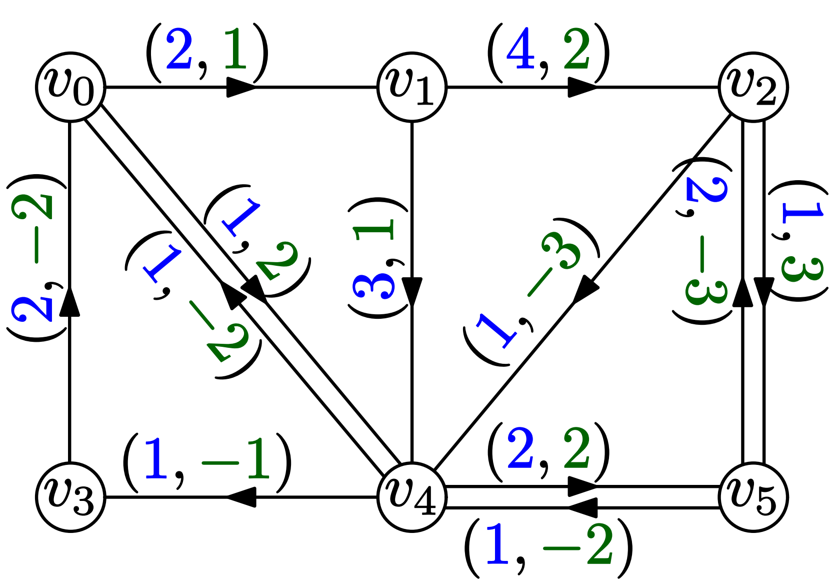


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
(2, 1)
(4, 2)
(2, −2)
(1, 2)
(1, −2)
(3, 1)
(1, −3)
(2, −3)
(1, 3)
(1, −1)
(2, 2)
(1, −2)

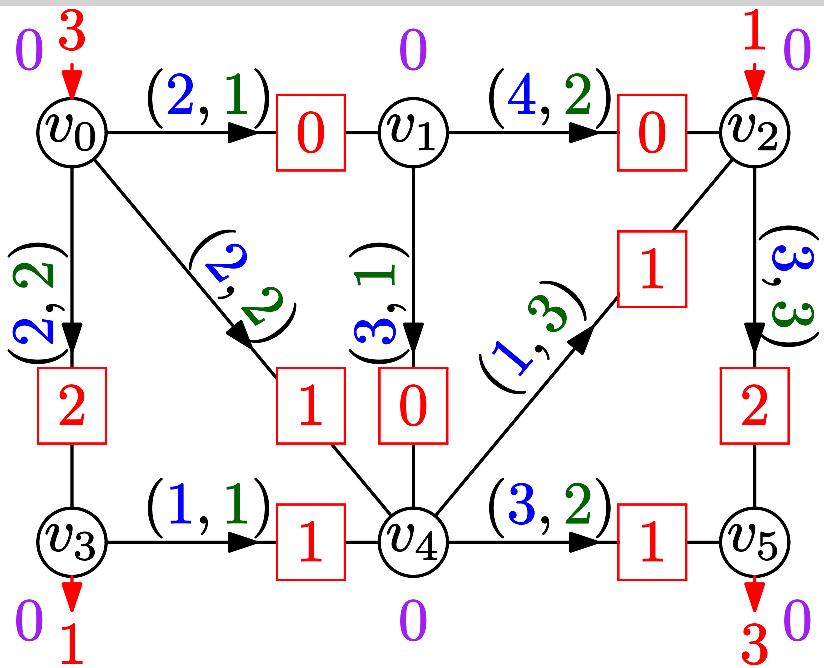
[復習] 主双対法：例 (2/8)

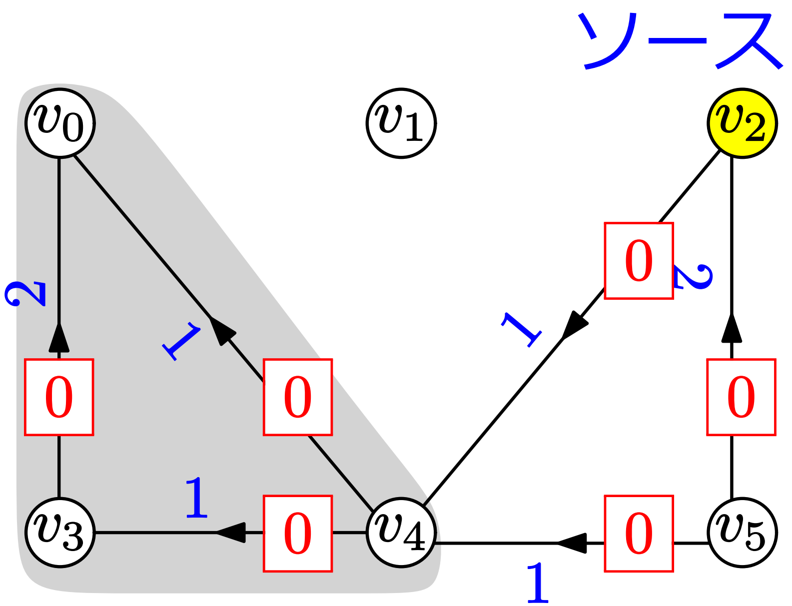


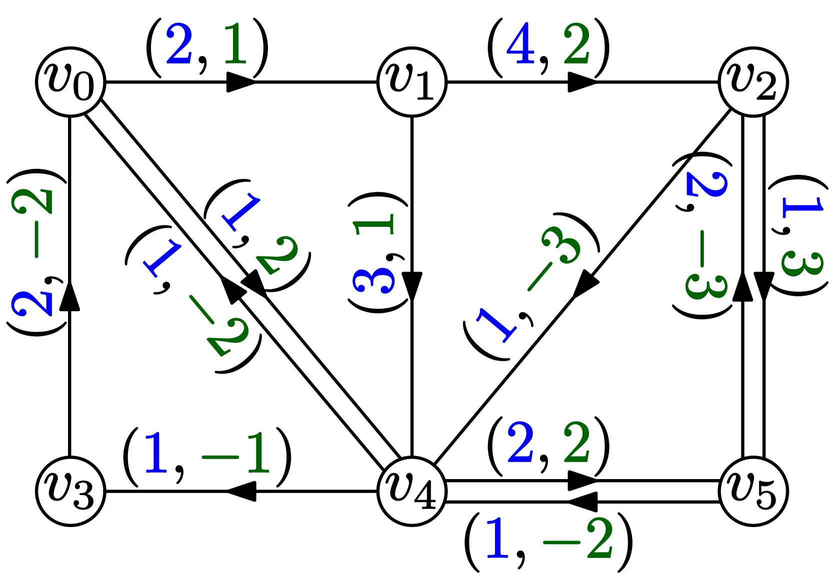




v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける



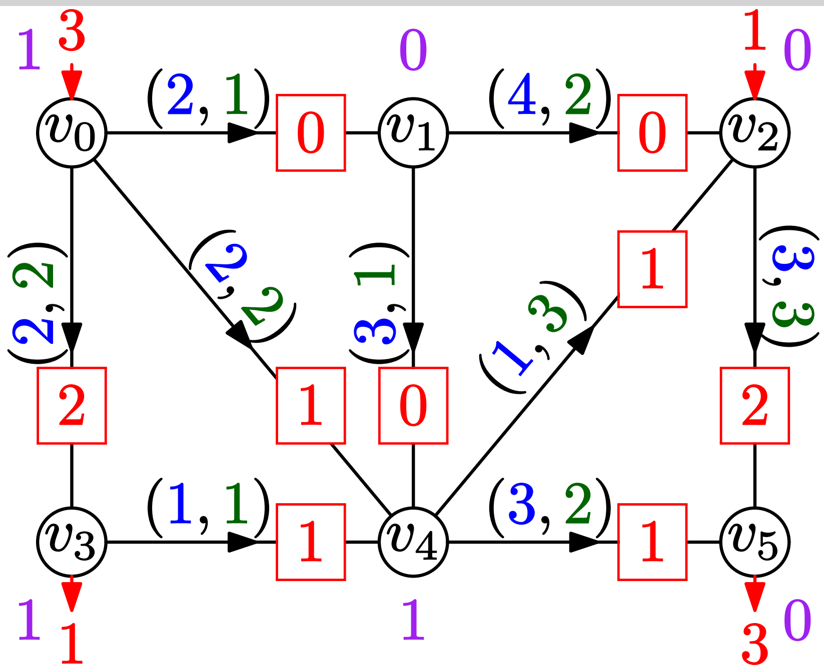


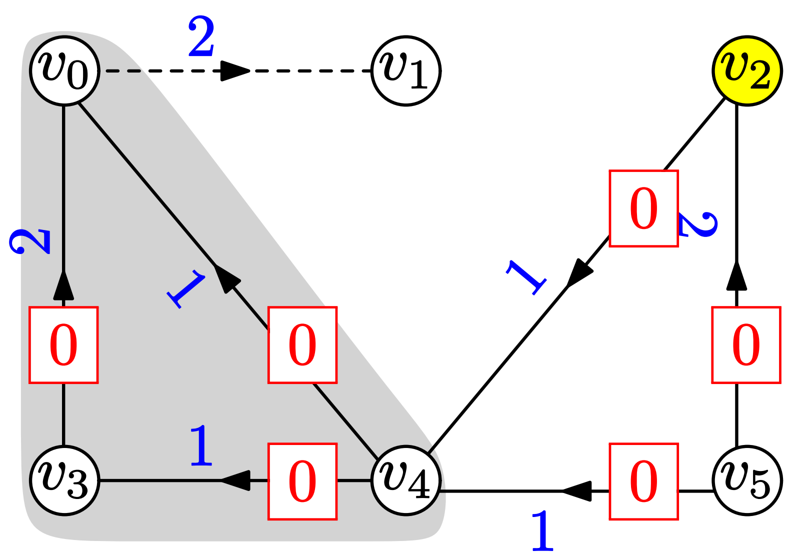


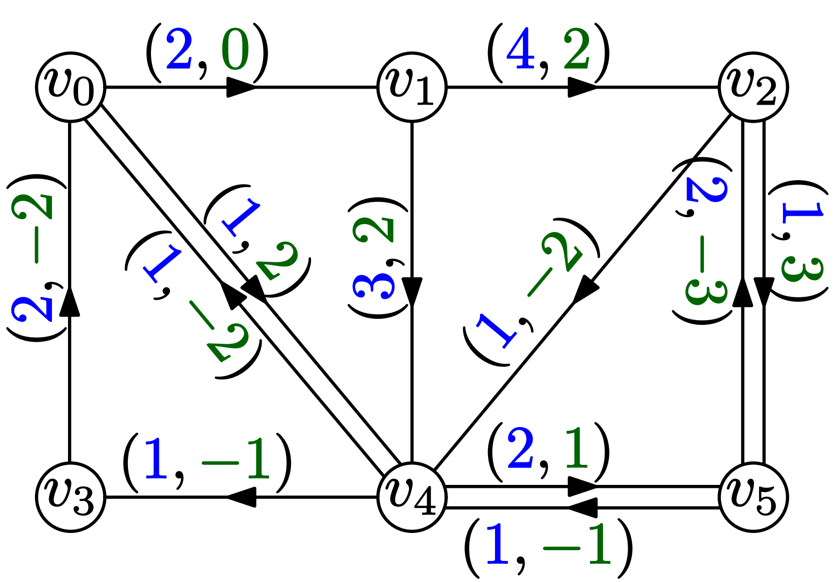
v_2-v_2 流で,
v_2 への流入量を最大に
するものを見つける

v_2 から到達できる (v_2 以外の)
頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (2/8)





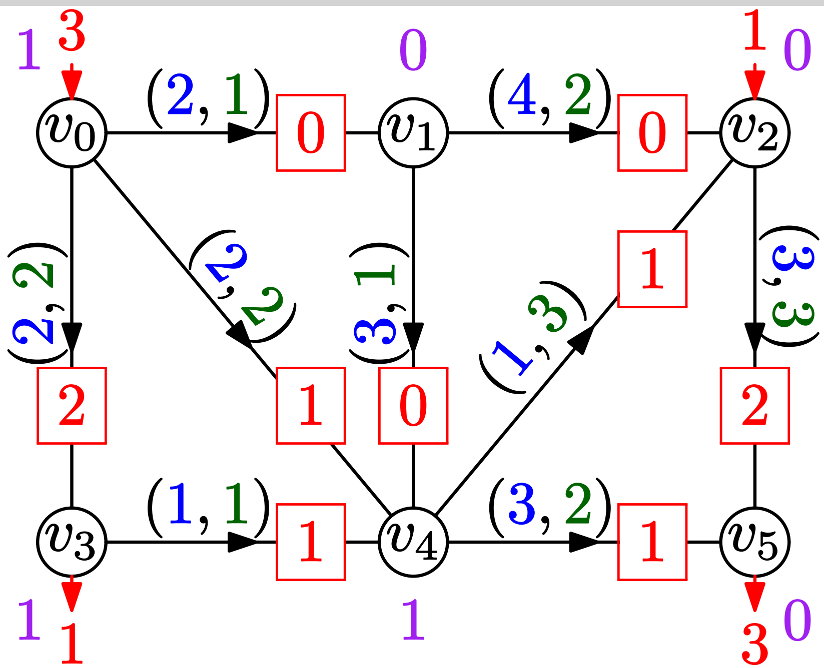


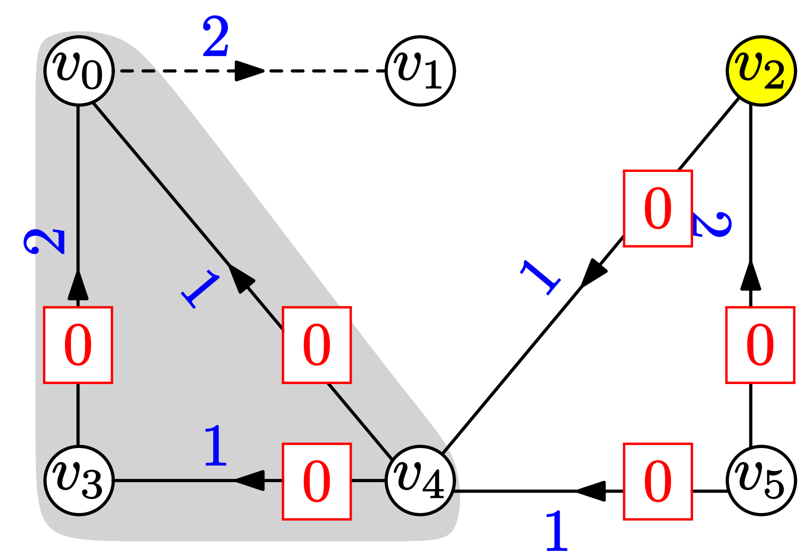
v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける

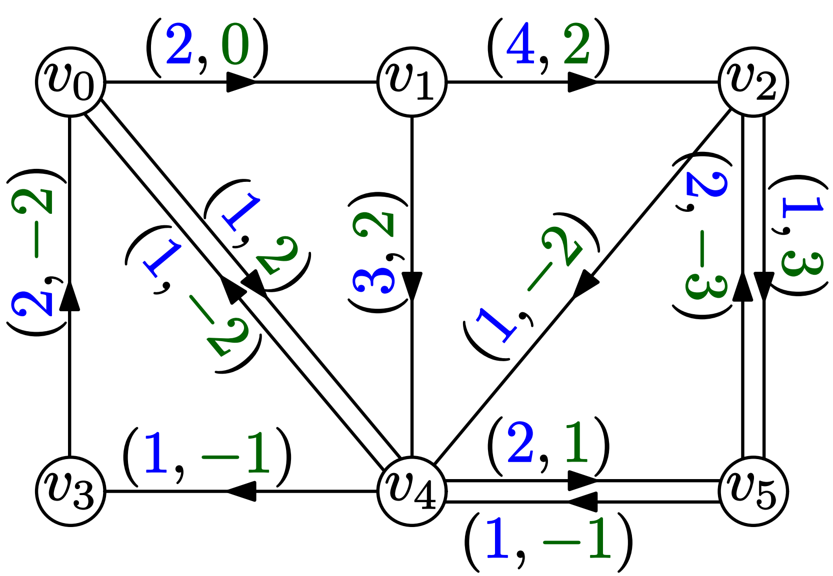
v_2 から到達できる (v_2 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

[復習] 主双対法：例 (2/8)







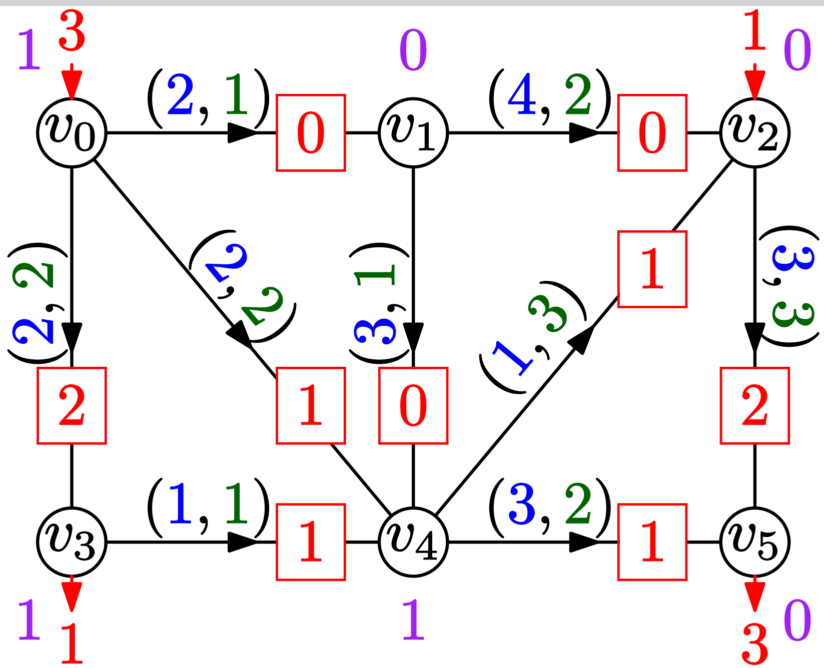
v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける

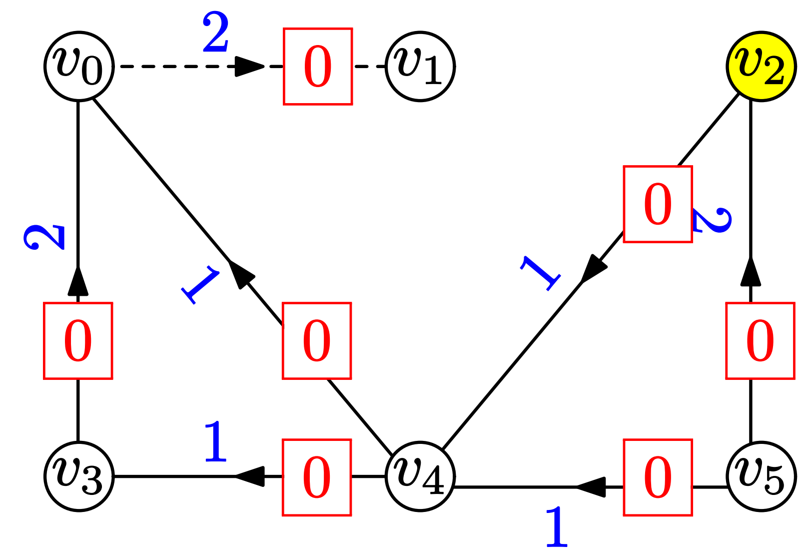
簡約費用が負の弧が減る か
簡約費用が 0 の弧が増える まで

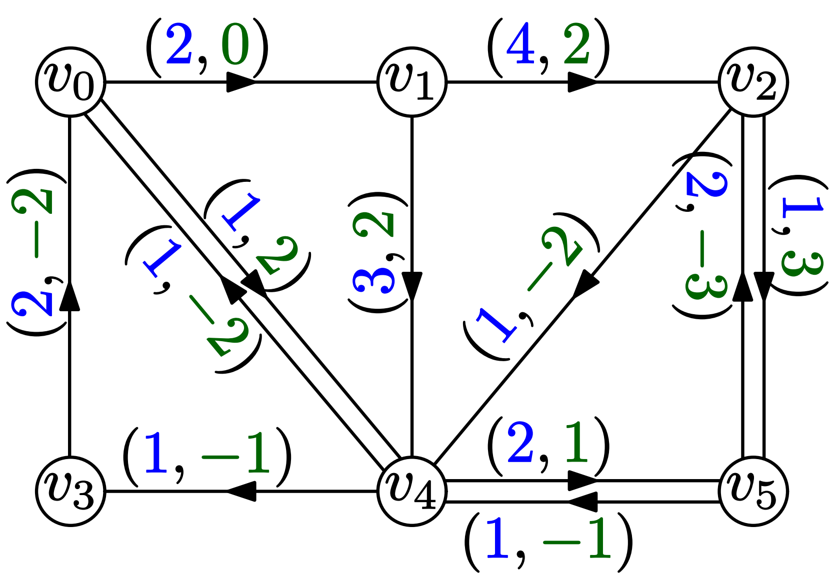
頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

[復習] 主双対法：例 (3/8)

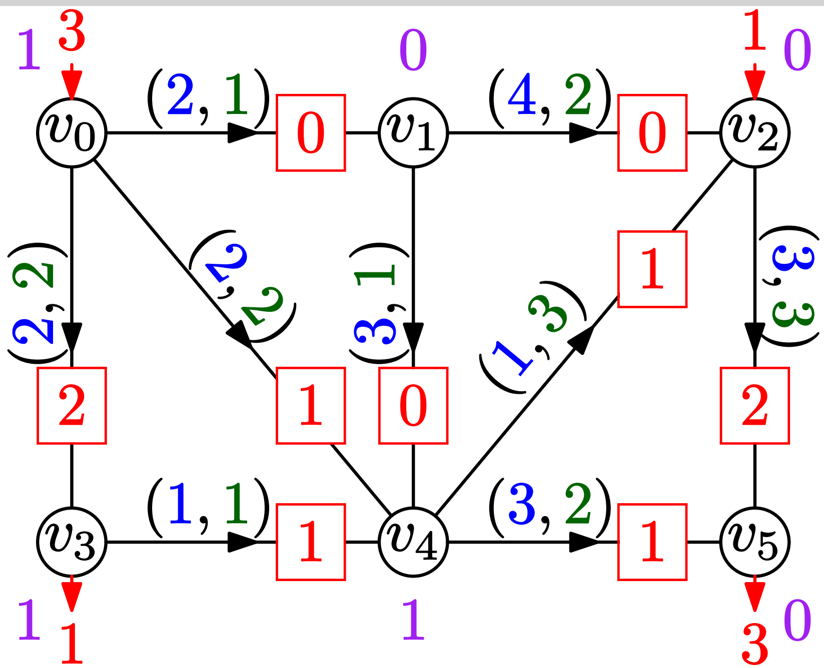


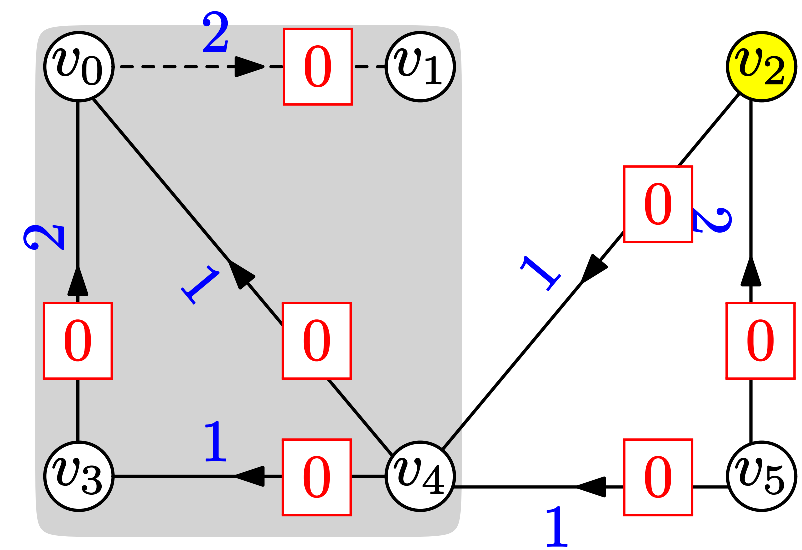


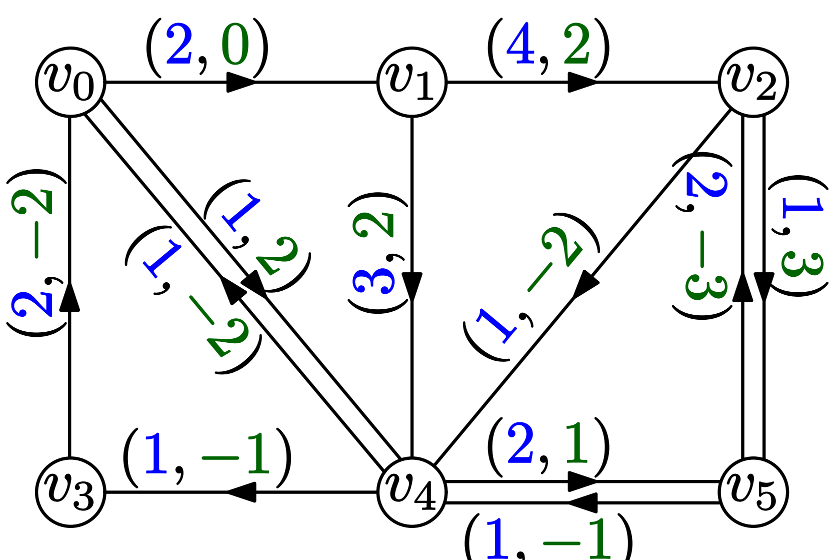


v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける

[復習] 主双対法：例 (3/8)



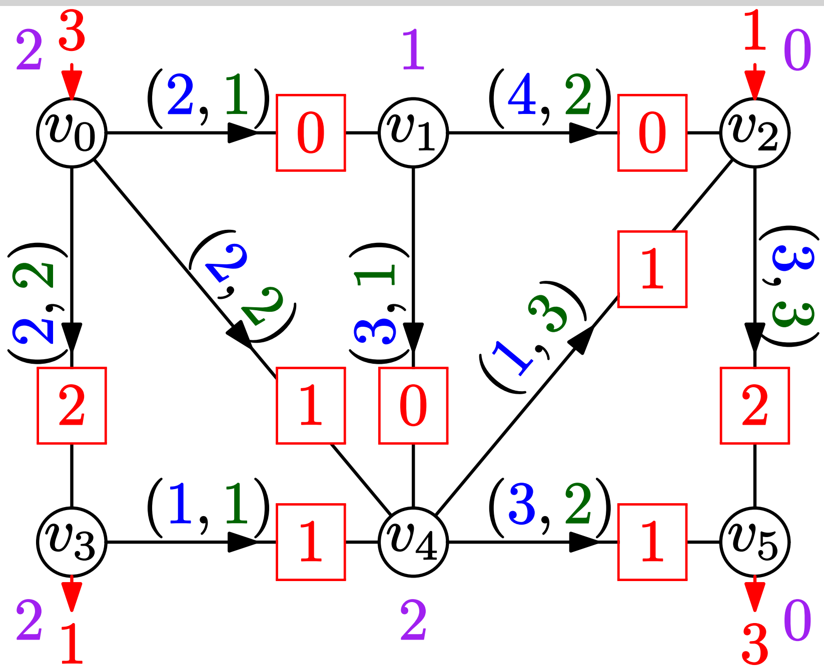


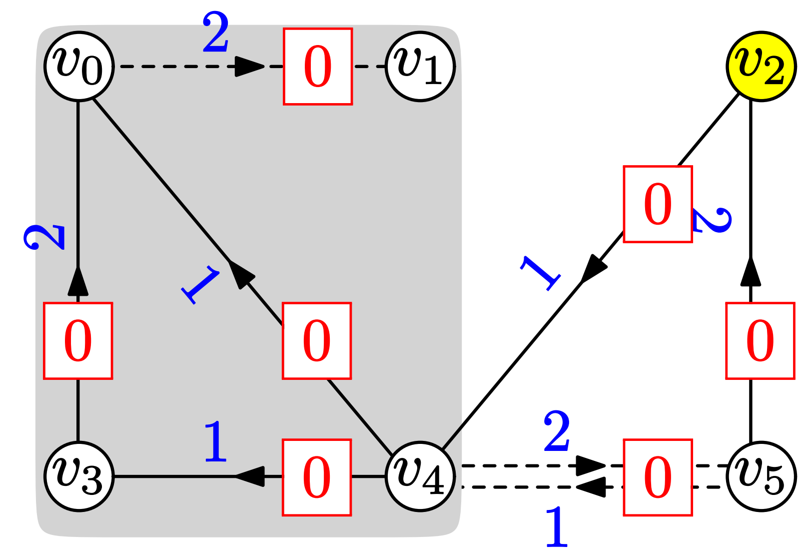


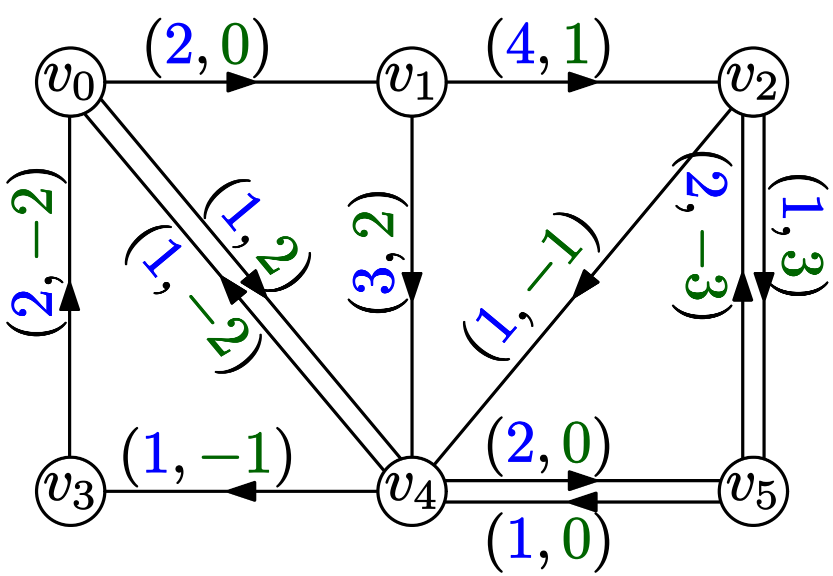
v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける

v_2 から到達できる (v_2 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (3/8)





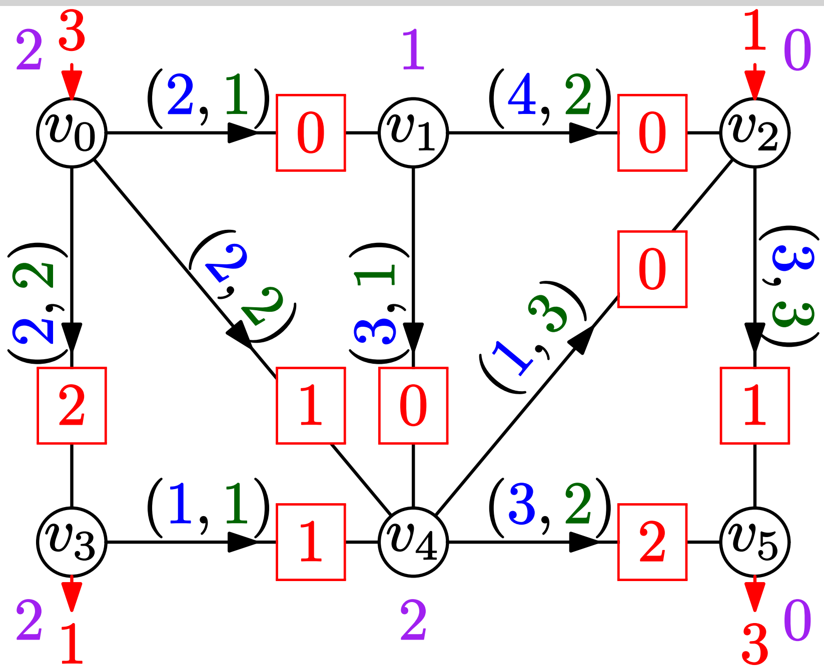


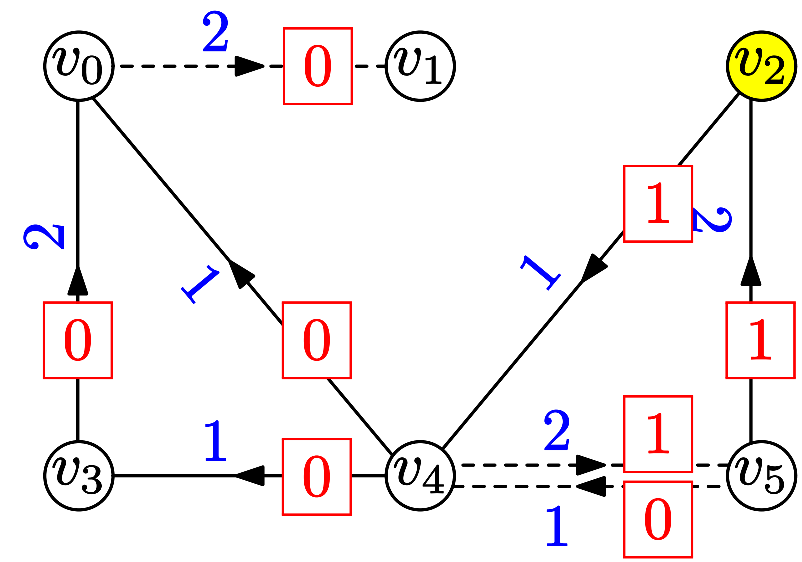
v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大に
するものを見つける

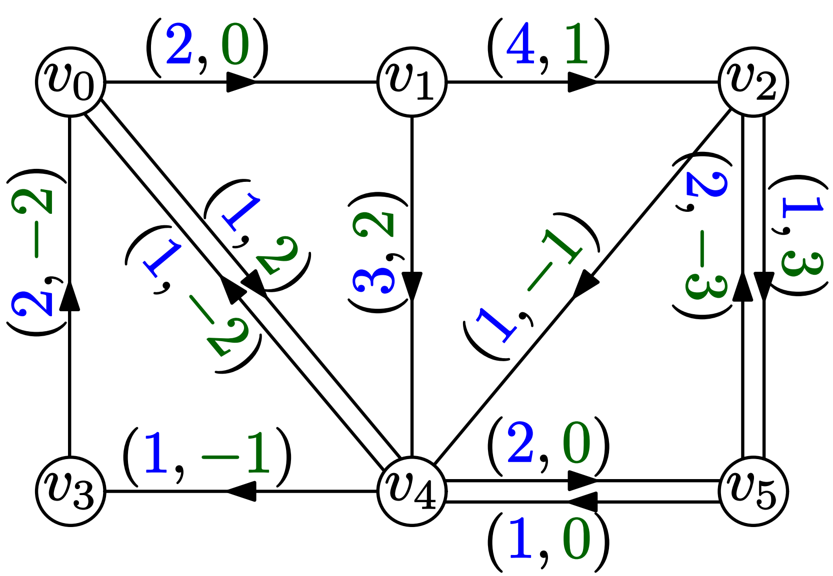
v_2 から到達できる (v_2 以外の)
頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを
上げる

[復習] 主双対法：例 (4/8)

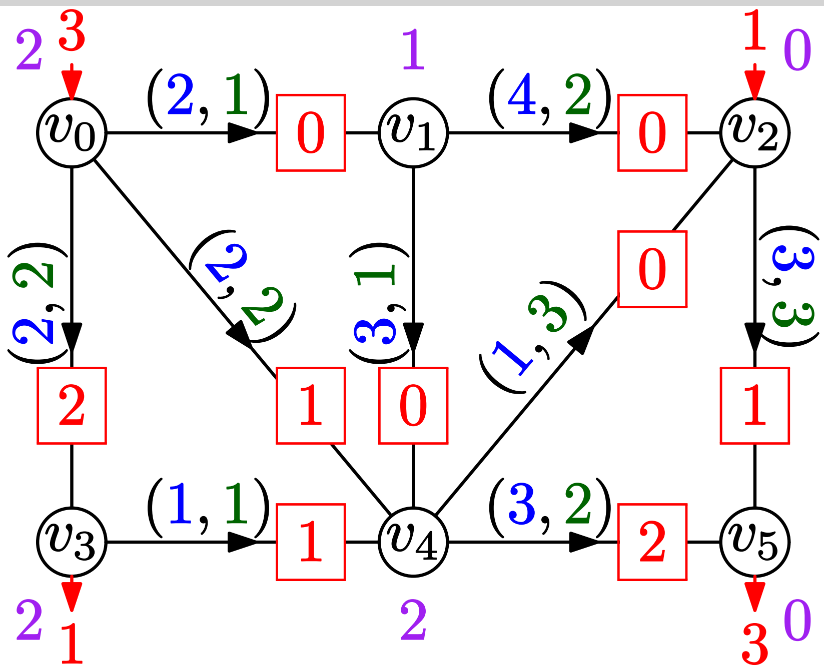


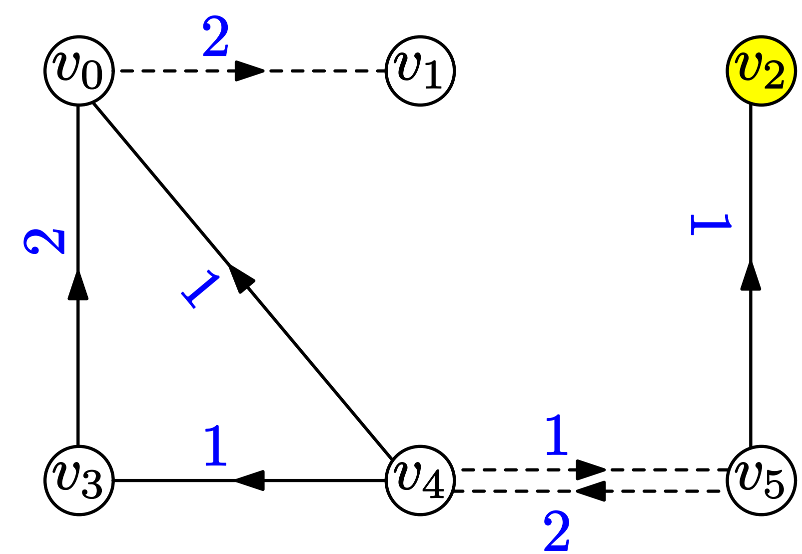


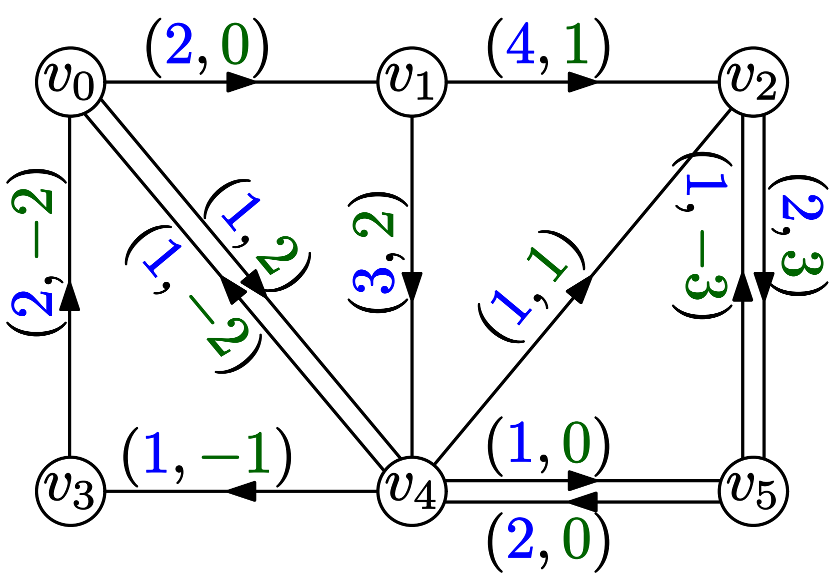


v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大に
するものを見つける

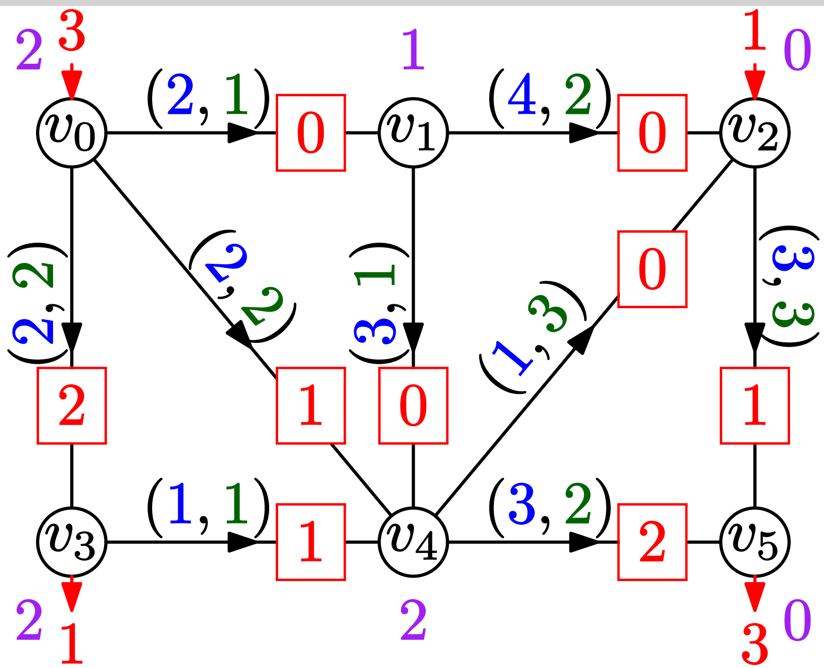
[復習] 主双対法：例 (4/8)

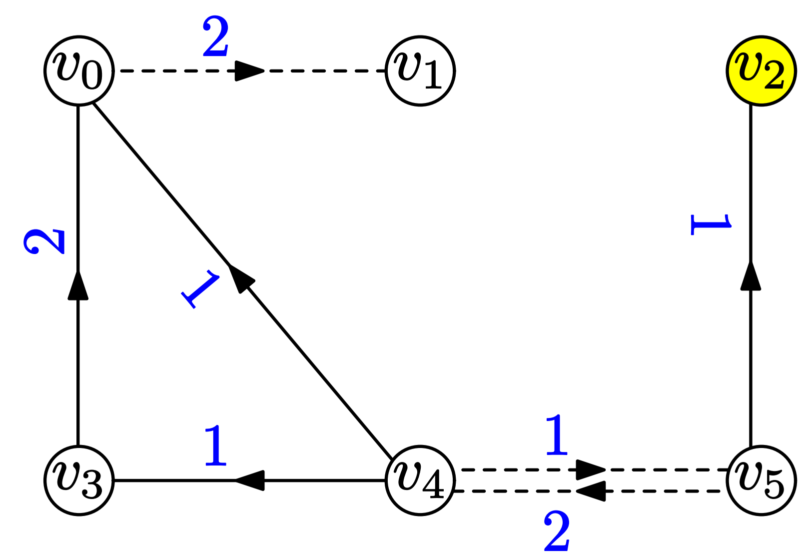


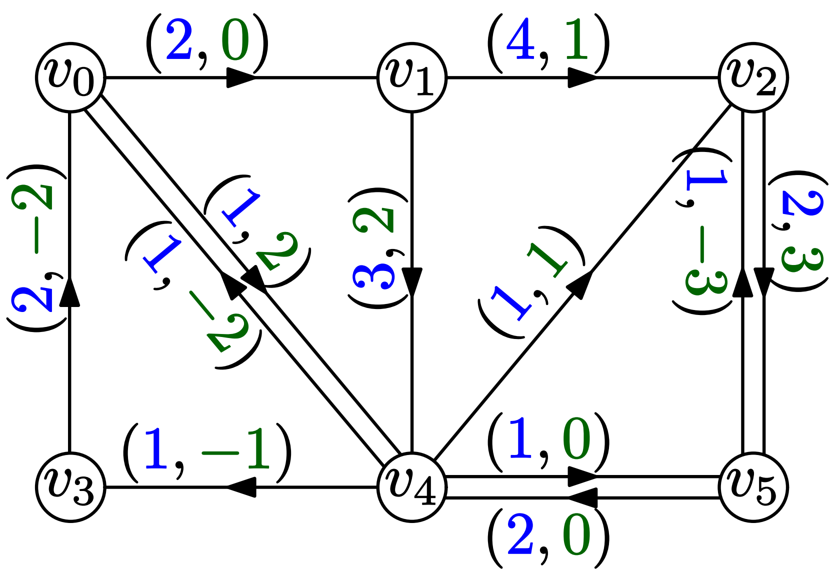




v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける



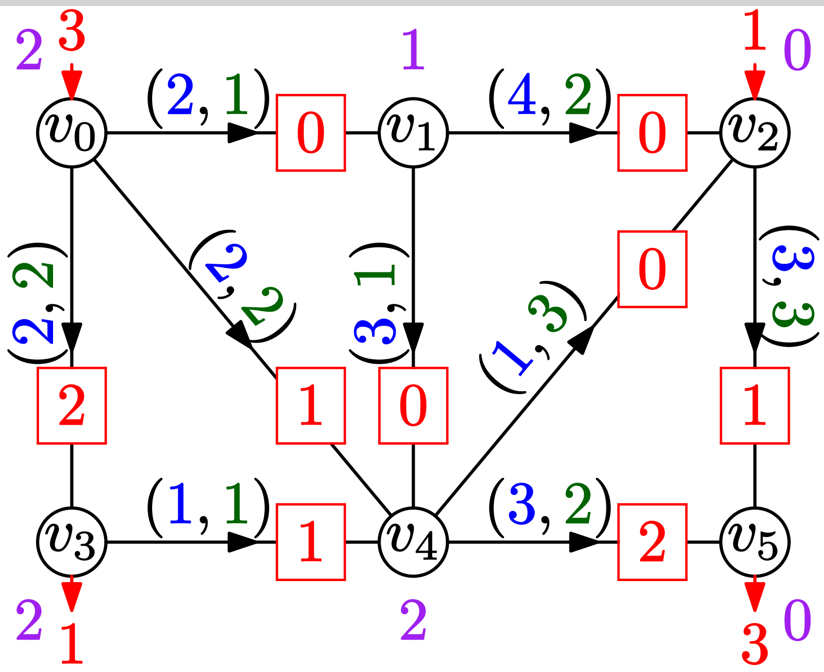


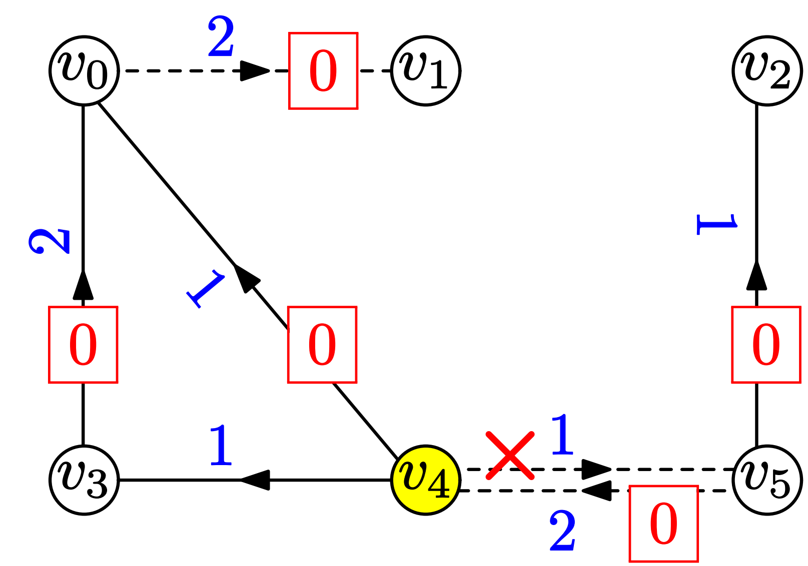


v_2-v_2 流で，
v_2 への流入量を最大にするものを見つける

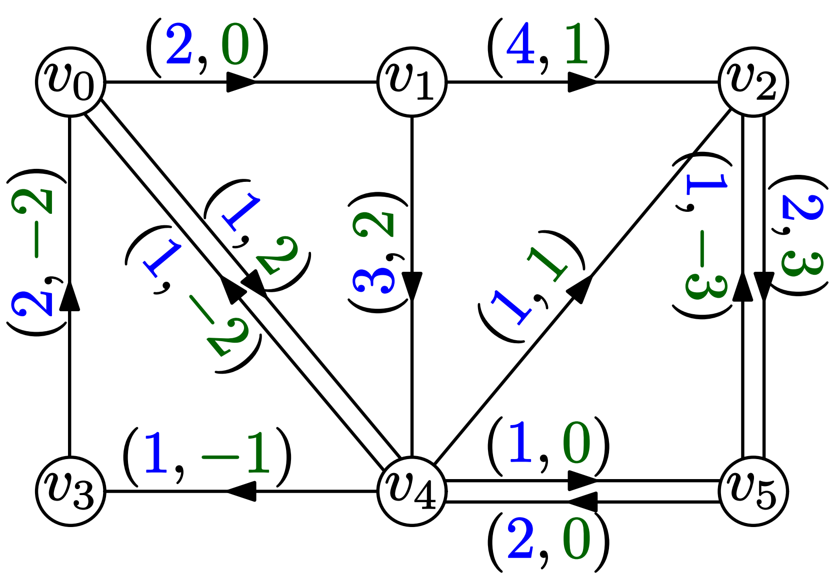
v_2 から到達できる (v_2 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (5/8)

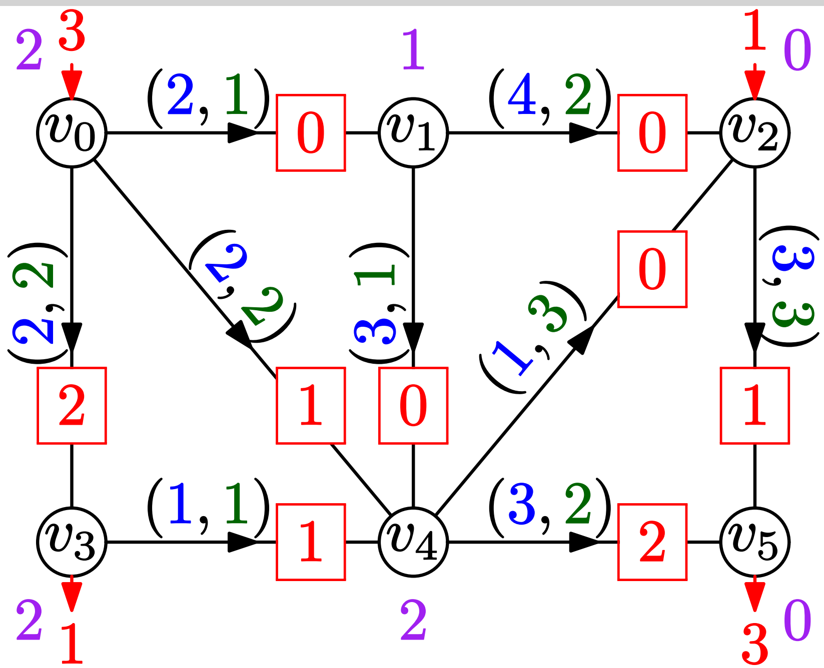


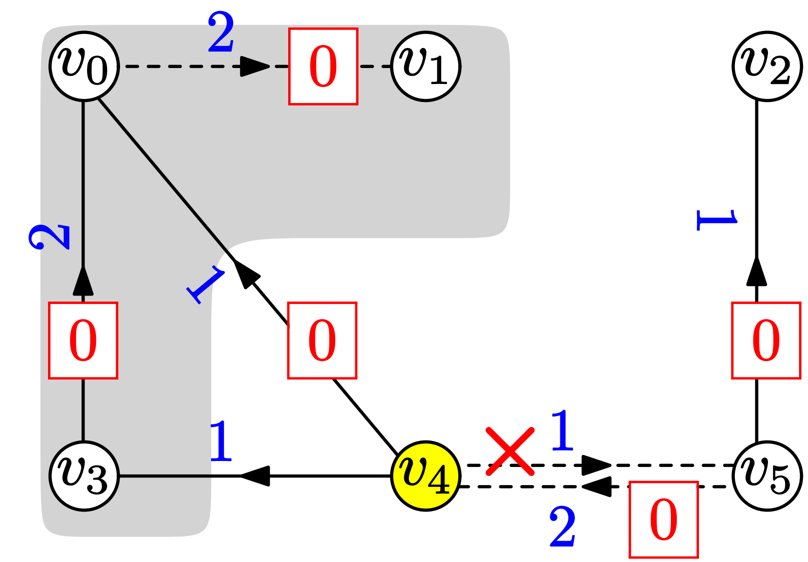


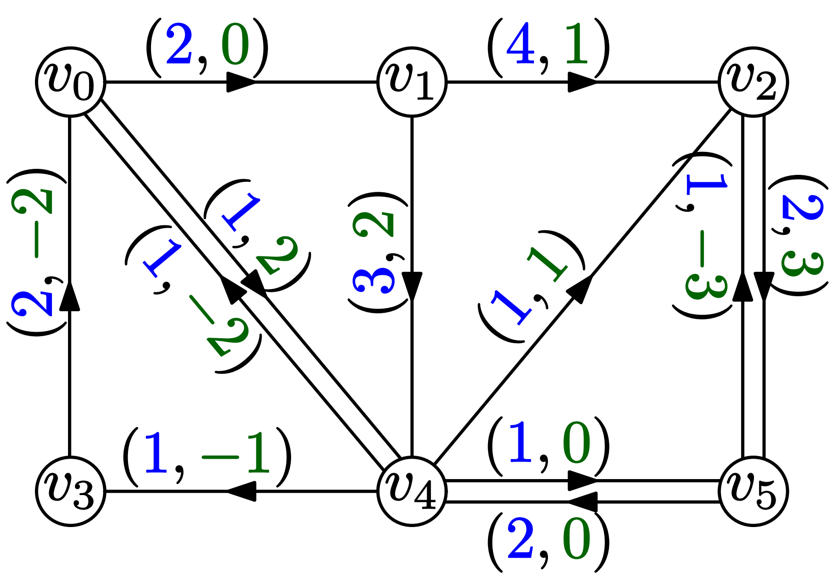
v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける



[復習] 主双対法：例 (5/8)



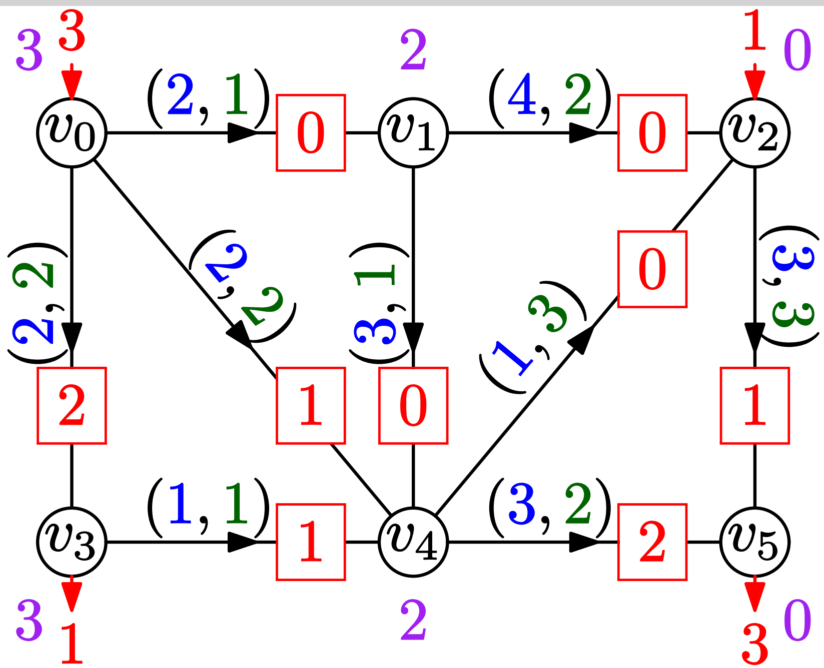


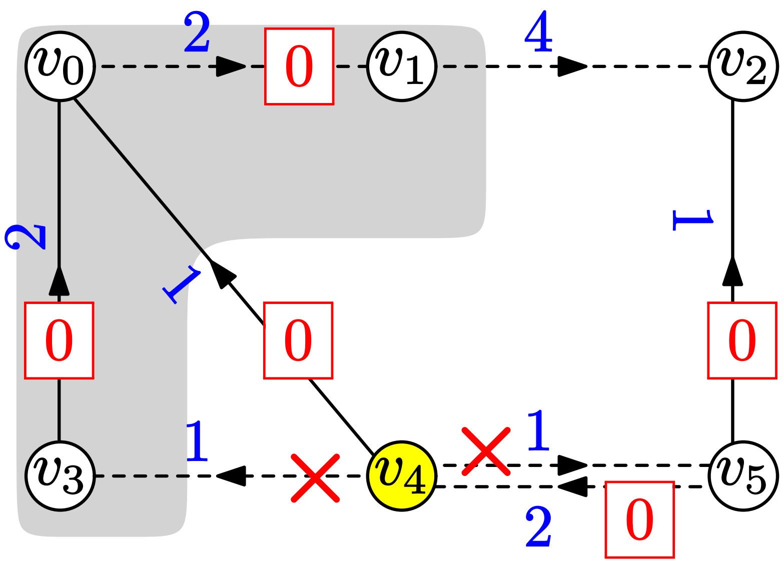


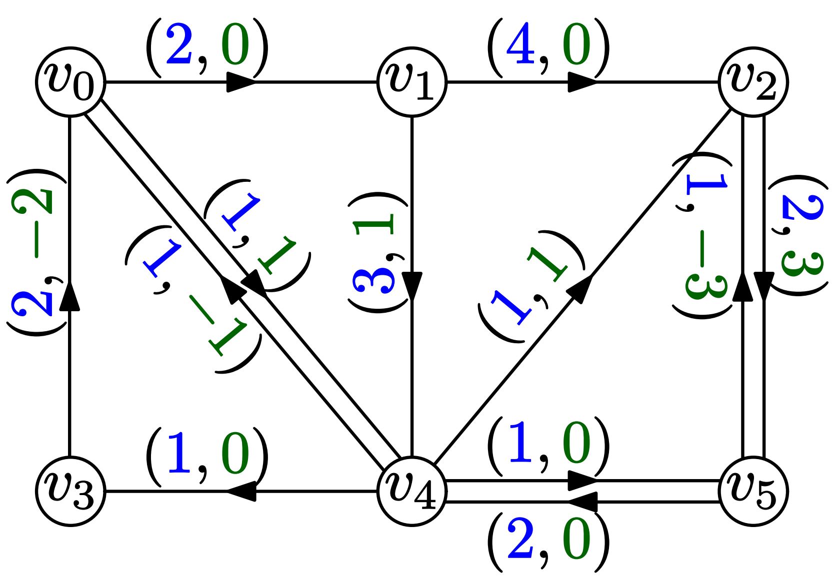
v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける

v_4 から到達できる (v_4 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (5/8)





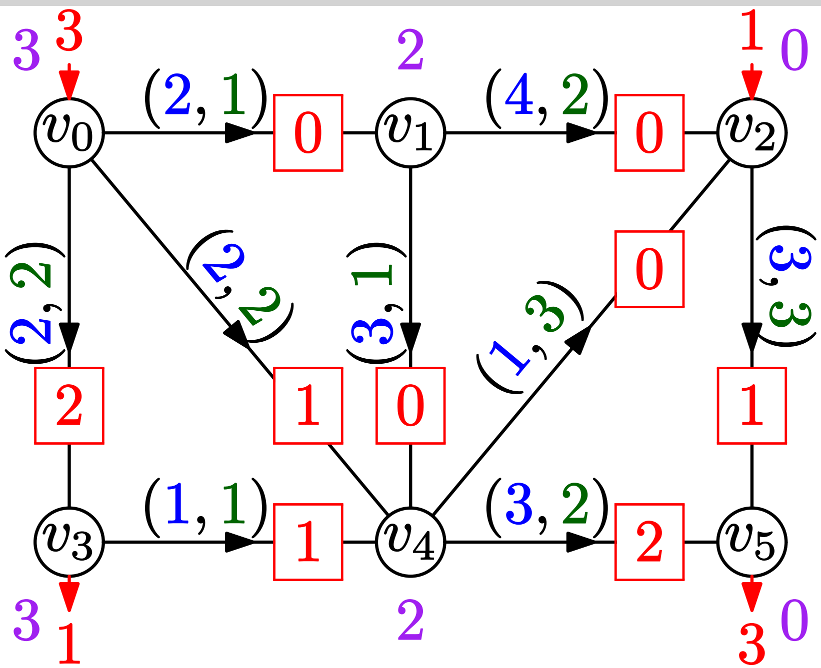


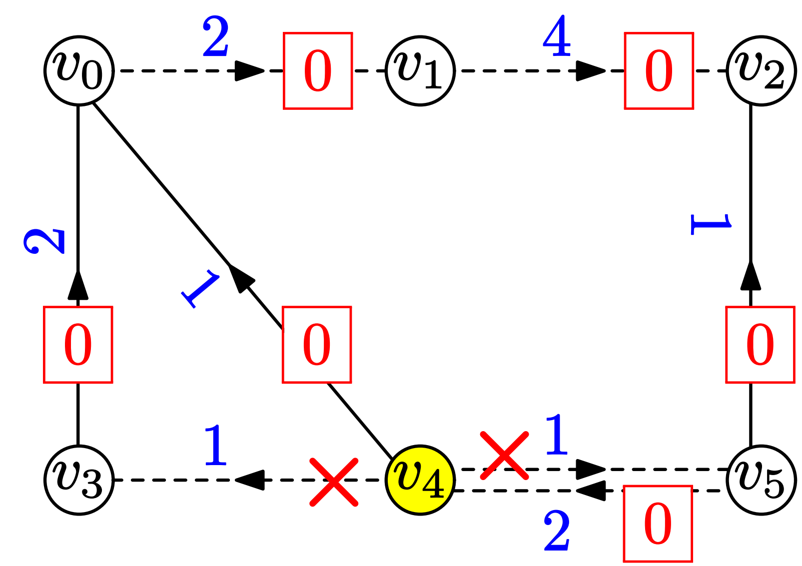
v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける

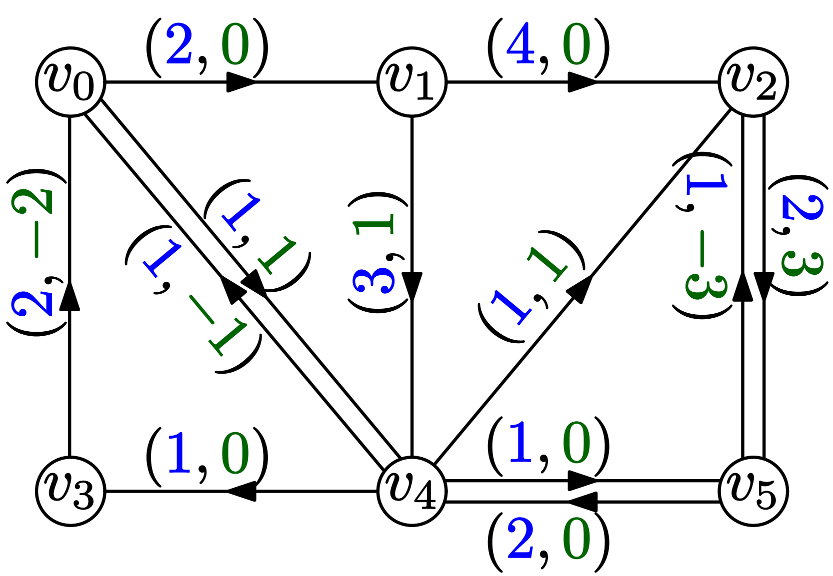
v_4 から到達できる (v_4 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

[復習] 主双対法：例 (6/8)

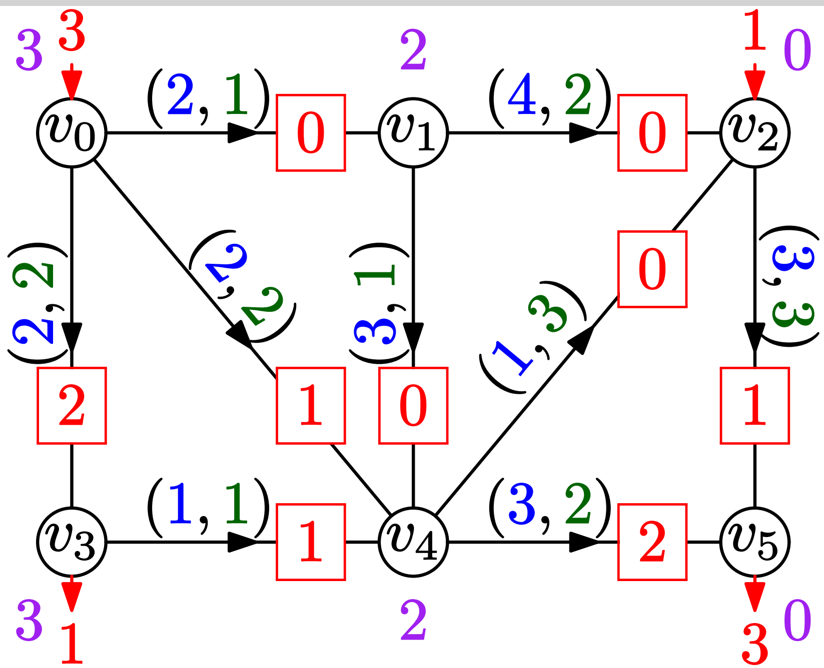


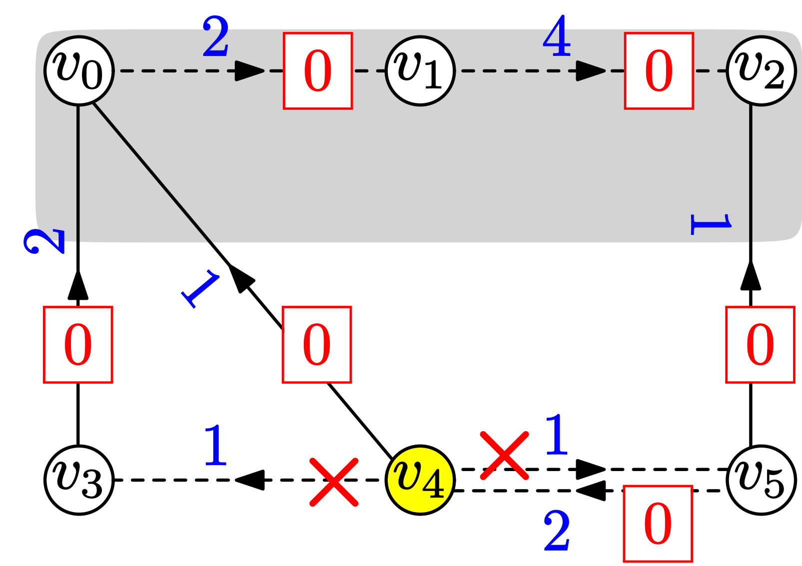


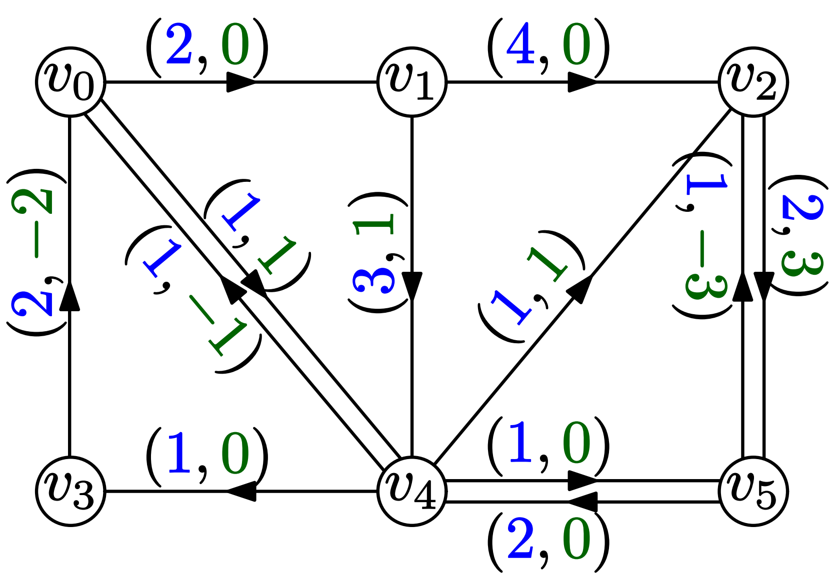


v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける

[復習] 主双対法：例 (6/8)



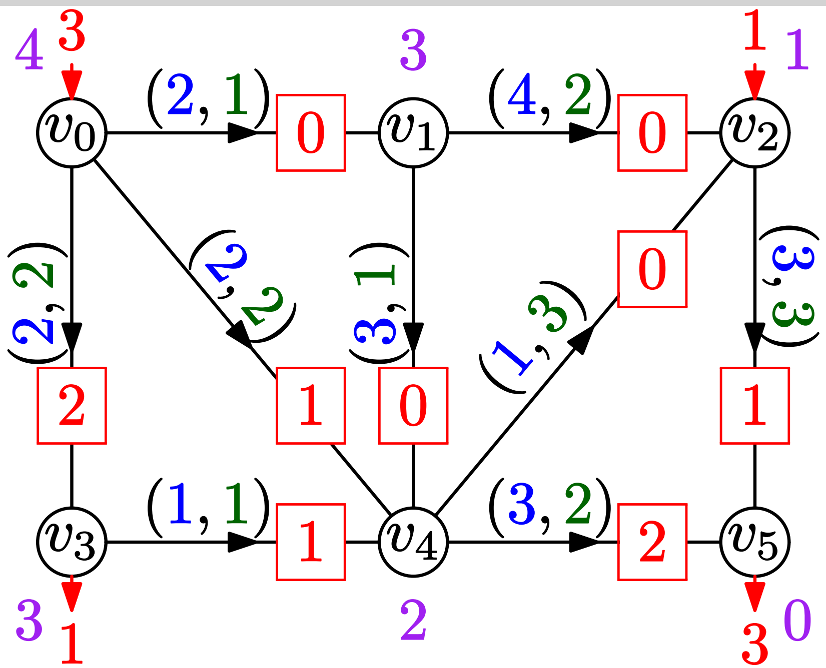


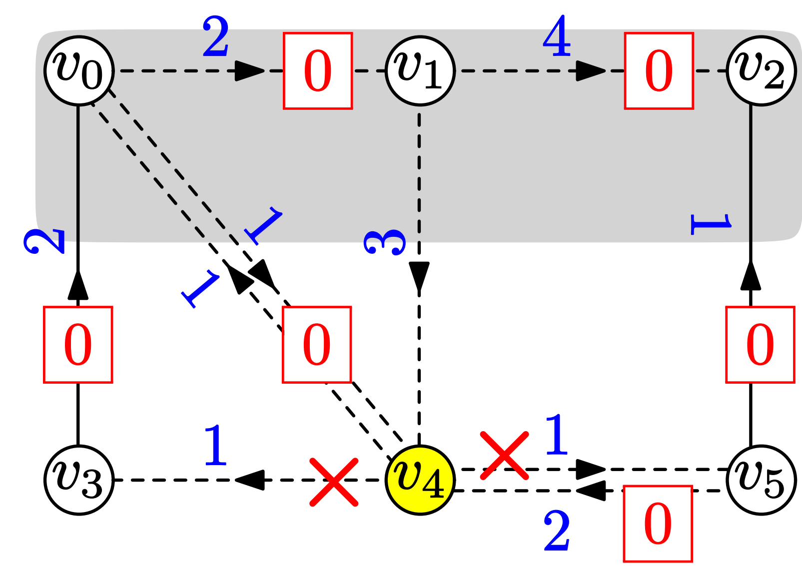


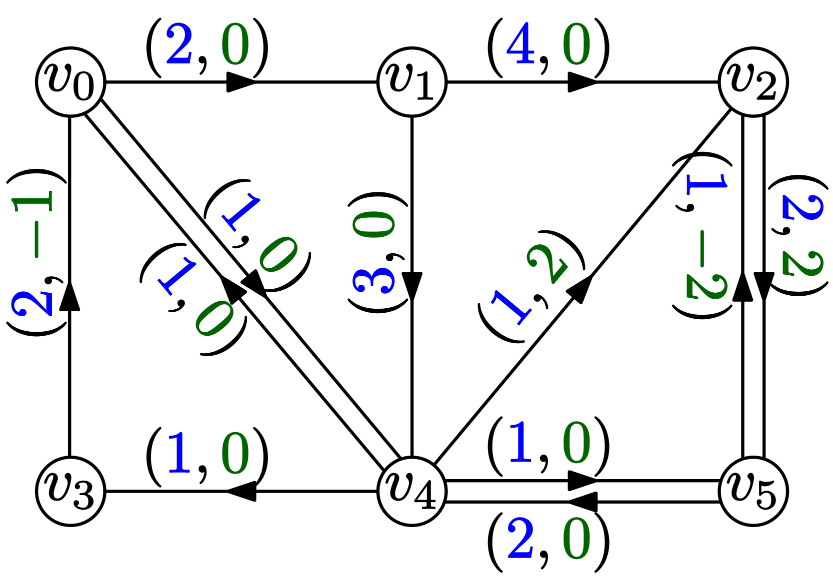
v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける

v_4 から到達できる (v_4 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (6/8)



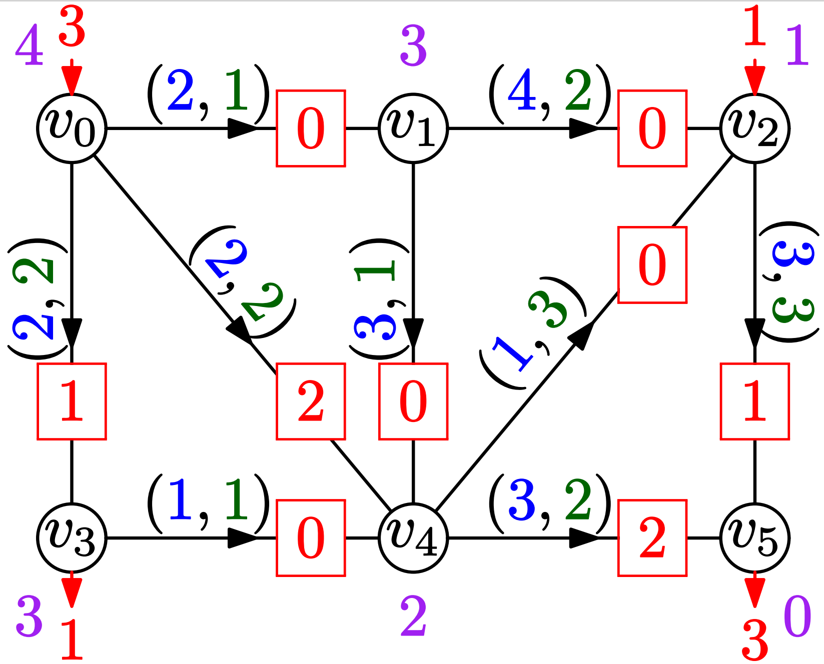


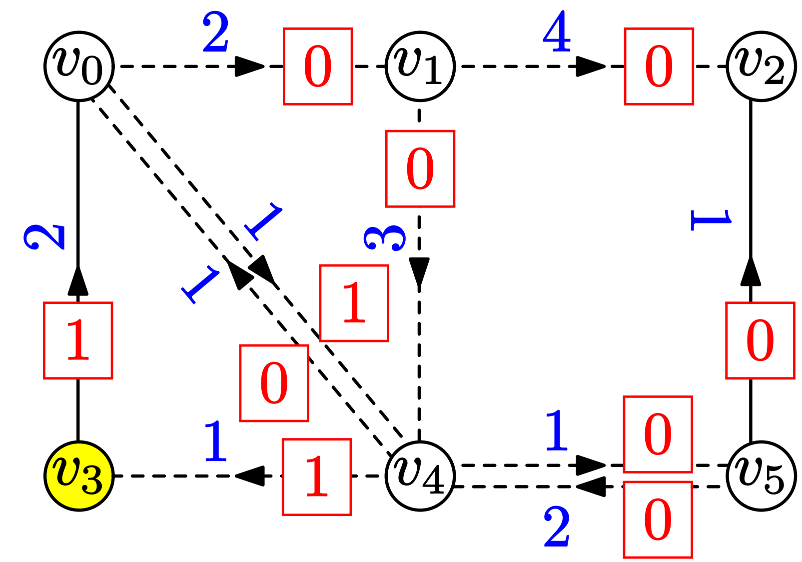


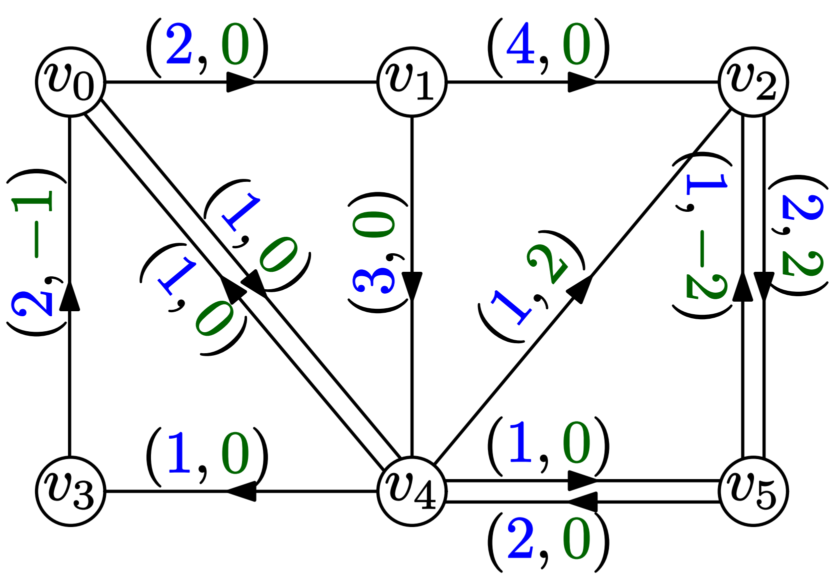
v_4-v_4 流で，
v_4 への流入量を最大にするものを見つける

v_4 から到達できる (v_4 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

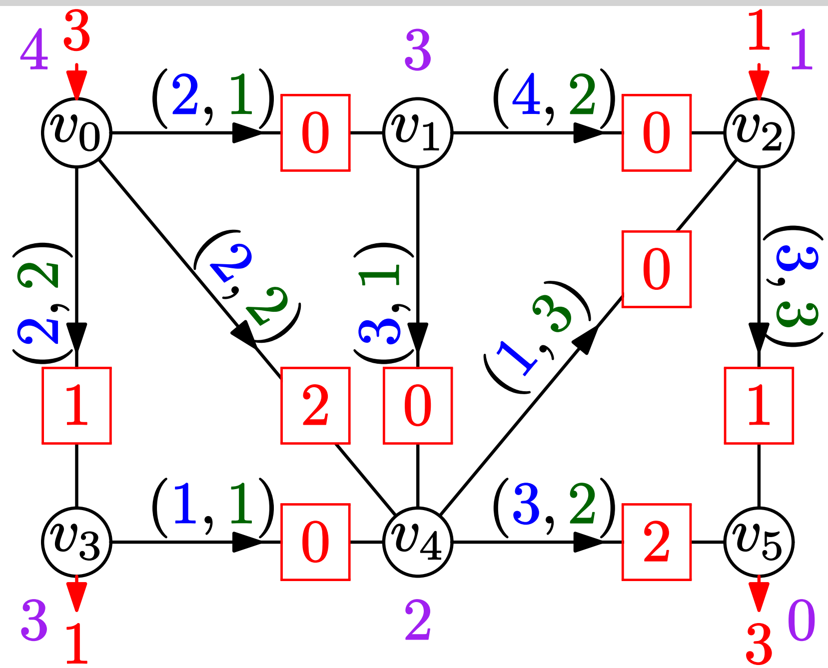


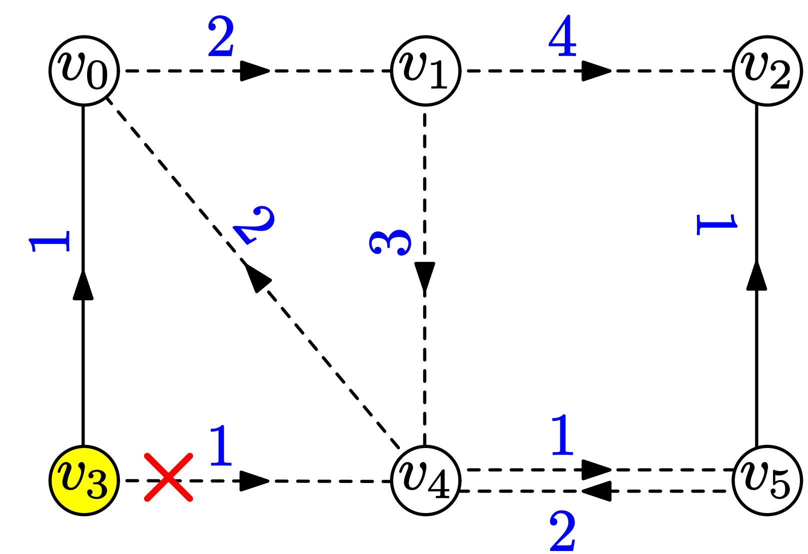




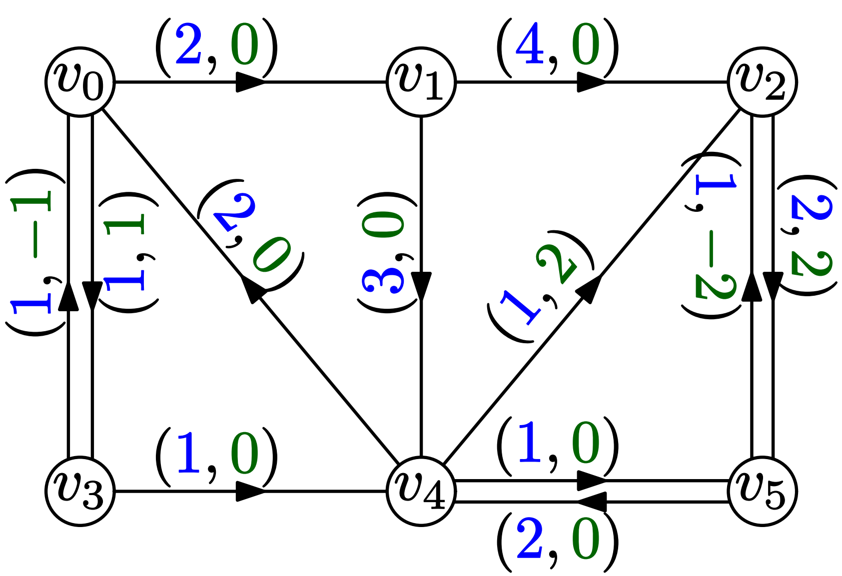
v_3-v_3 流で，
v_3 への流入量を最大にするものを見つける

[復習] 主双対法：例 (7/8)

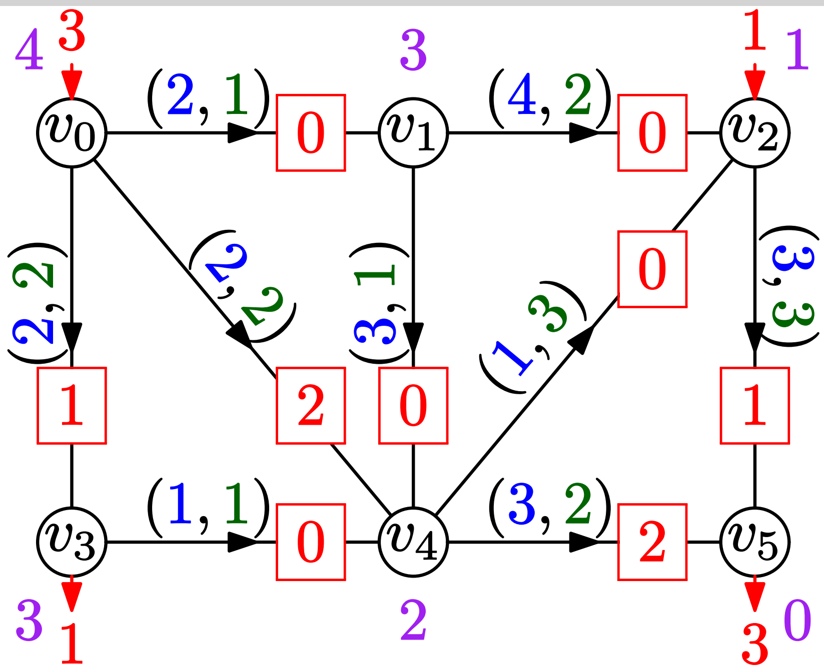


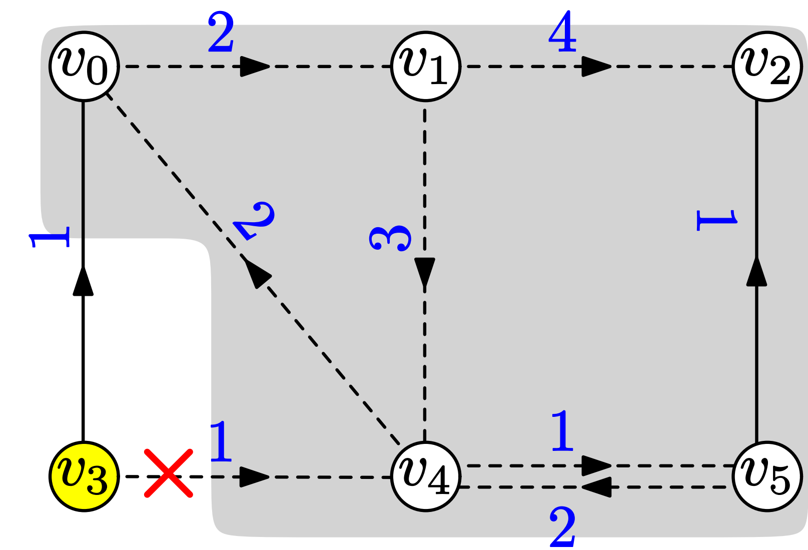


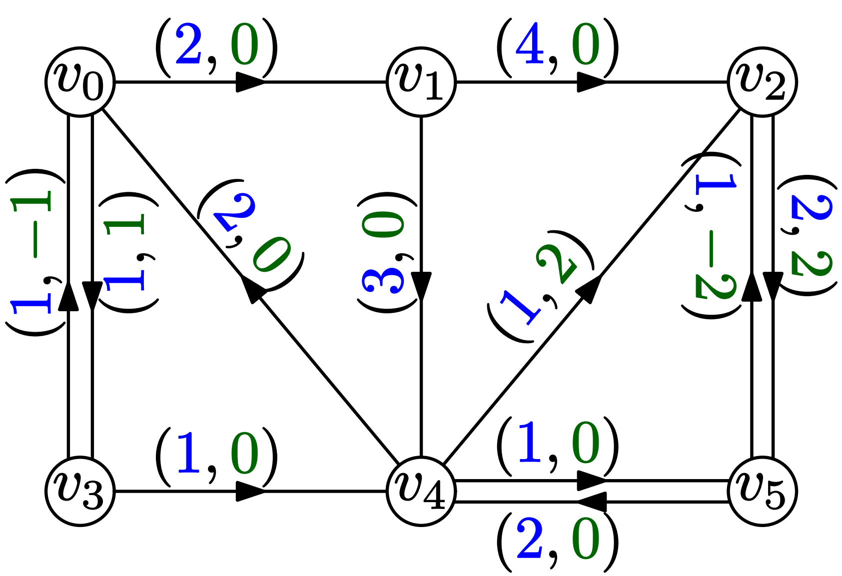
v_3-v_3 流で，
v_3 への流入量を最大にするものを見つける



[復習] 主双対法：例 (7/8)



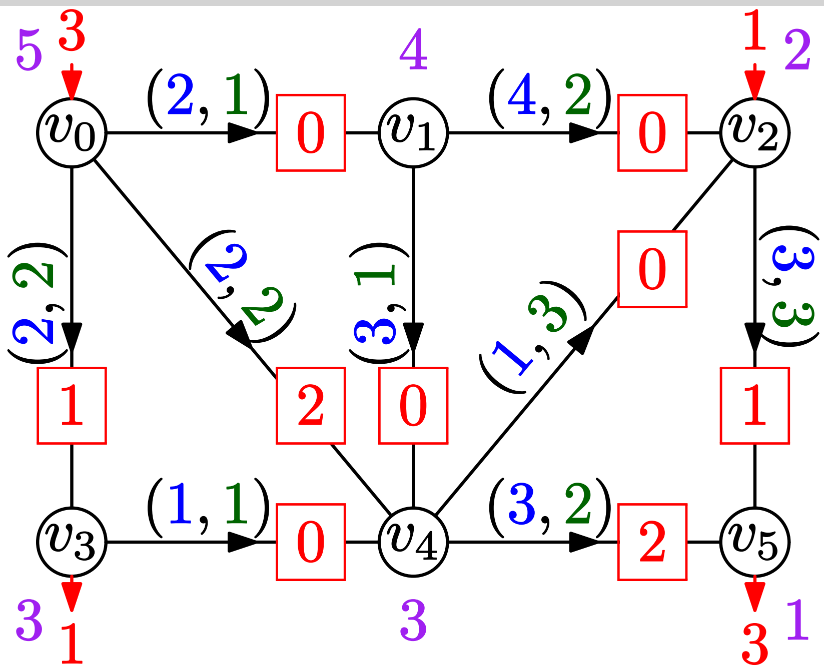


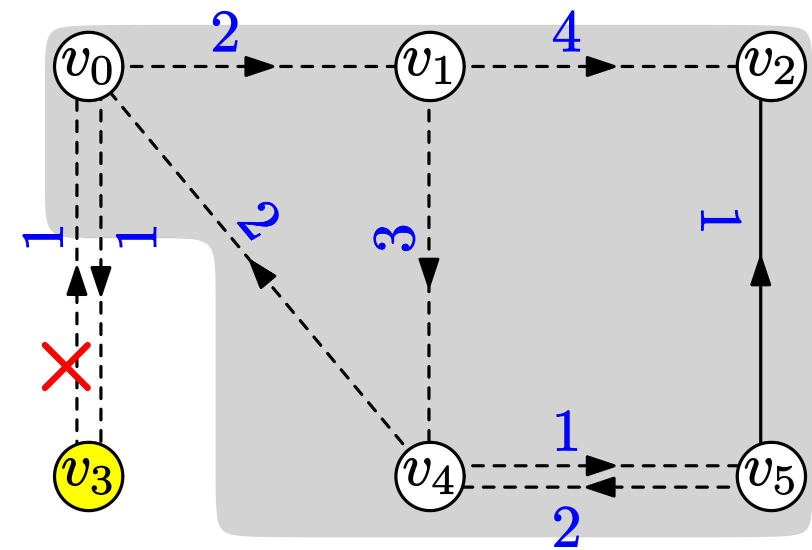


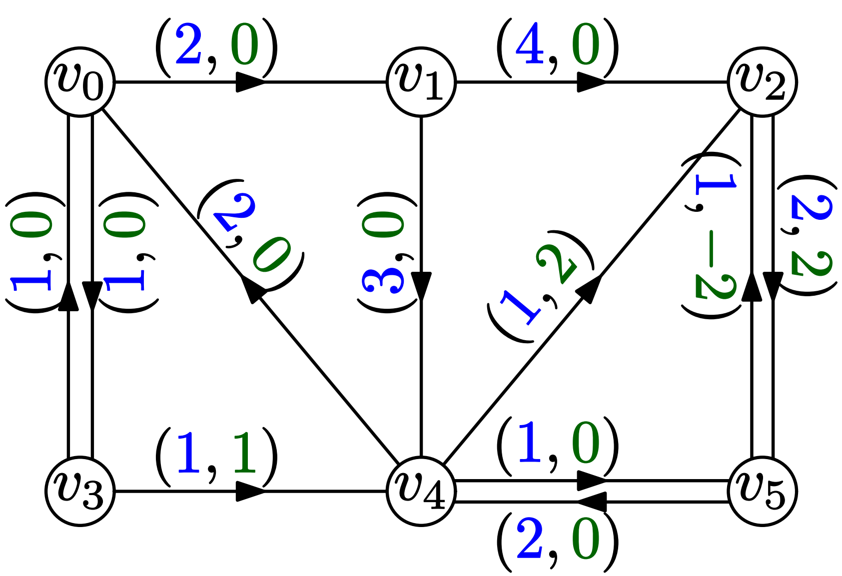
v_3-v_3 流で，
v_3 への流入量を最大にするものを見つける

v_3 から到達できる (v_3 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (7/8)





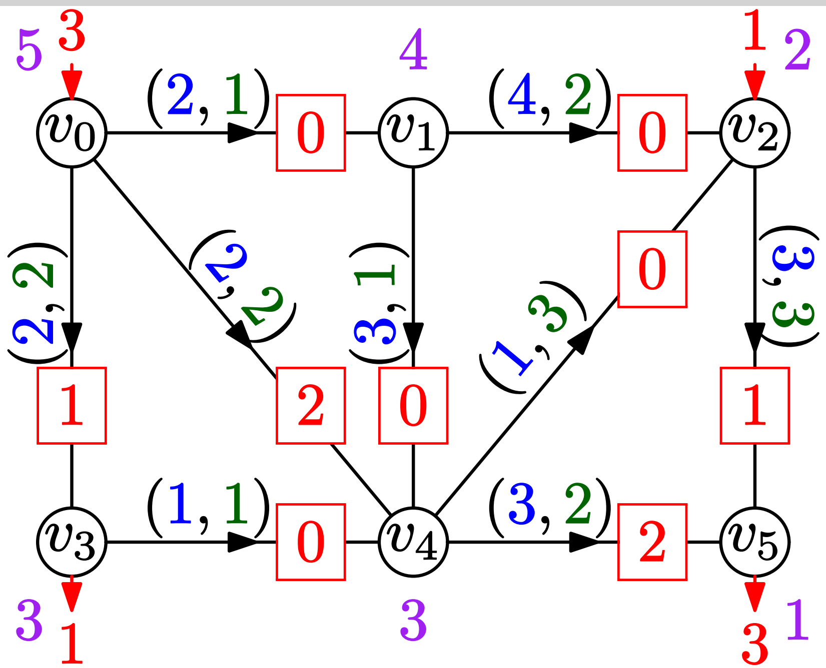


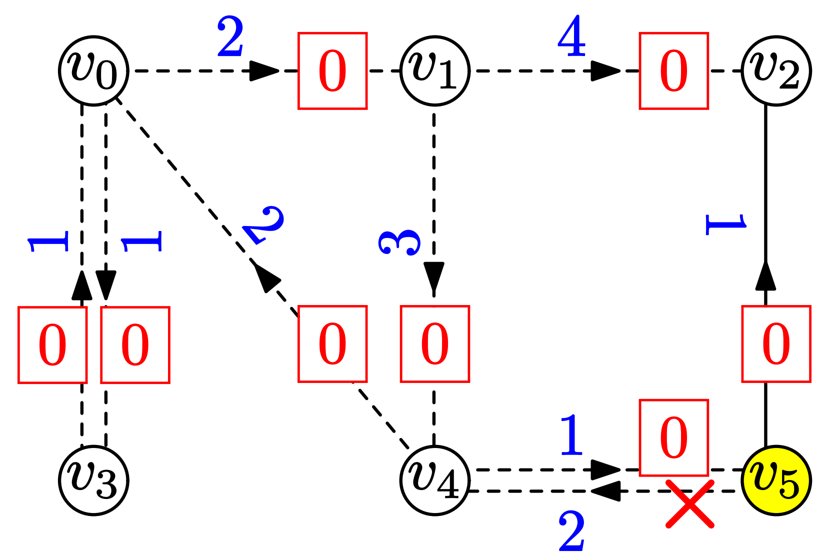
v_3-v_3 流で，
v_3 への流入量を最大にするものを見つける

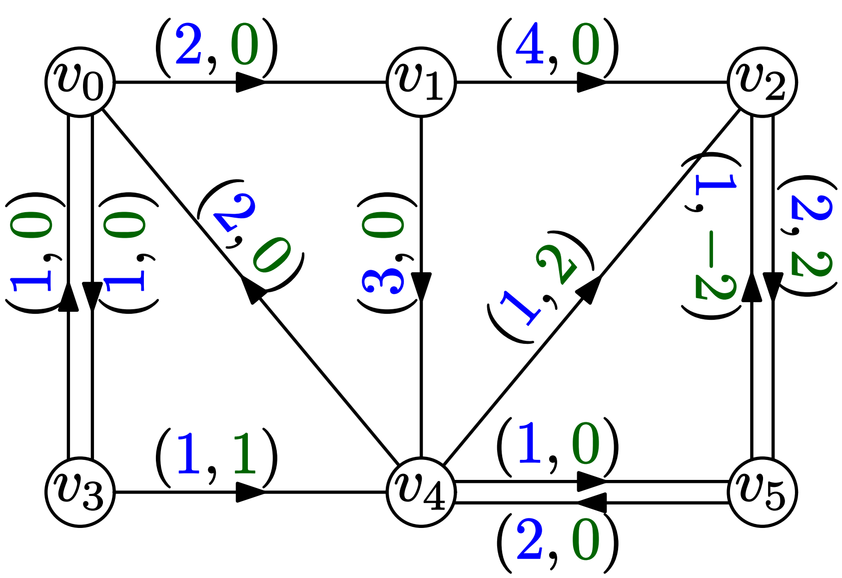
v_3 から到達できる (v_3 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

[復習] 主双対法：例 (8/8)

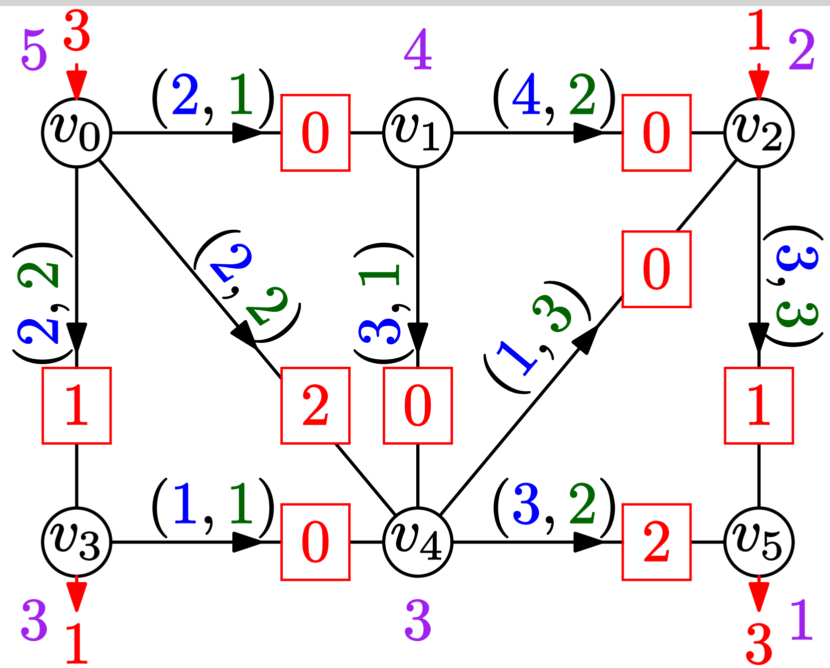


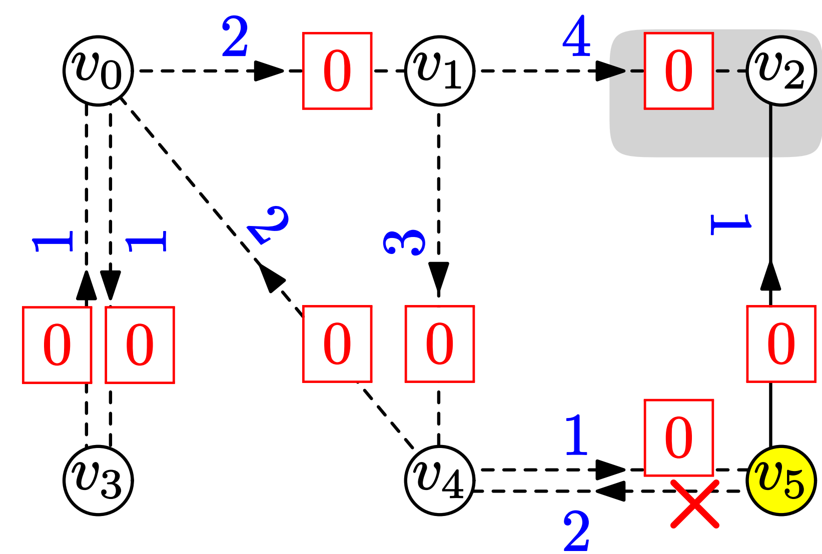


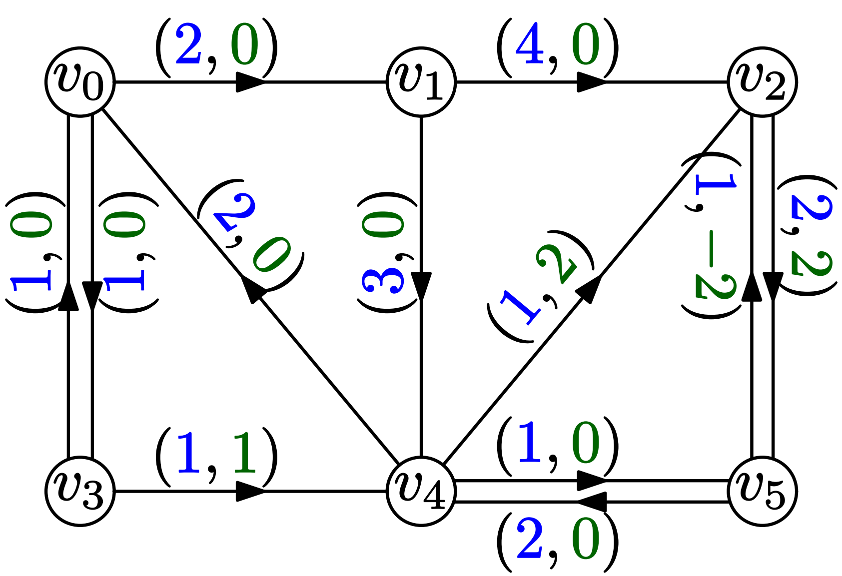


v_5-v_5 流で，
v_5 への流入量を最大にするものを見つける

[復習] 主双対法：例 (8/8)



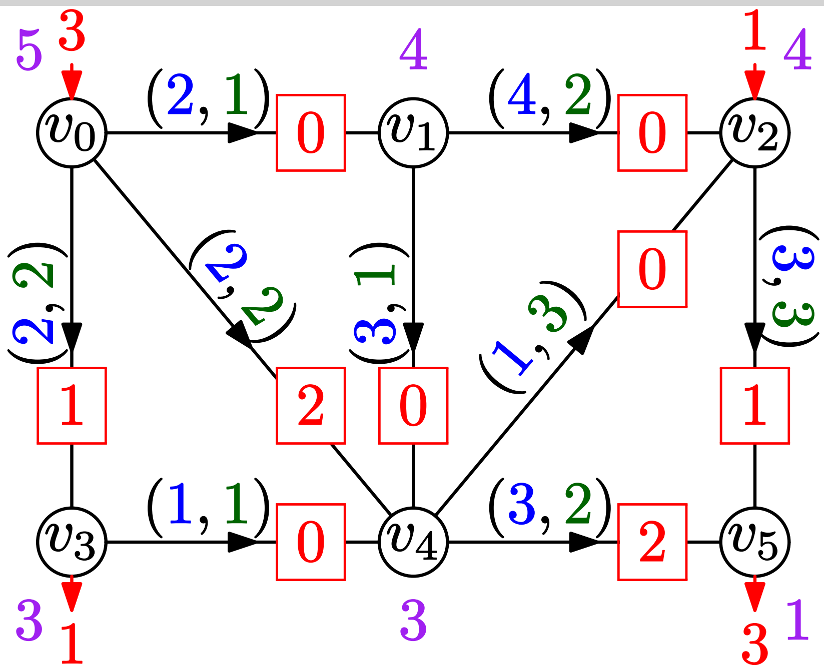


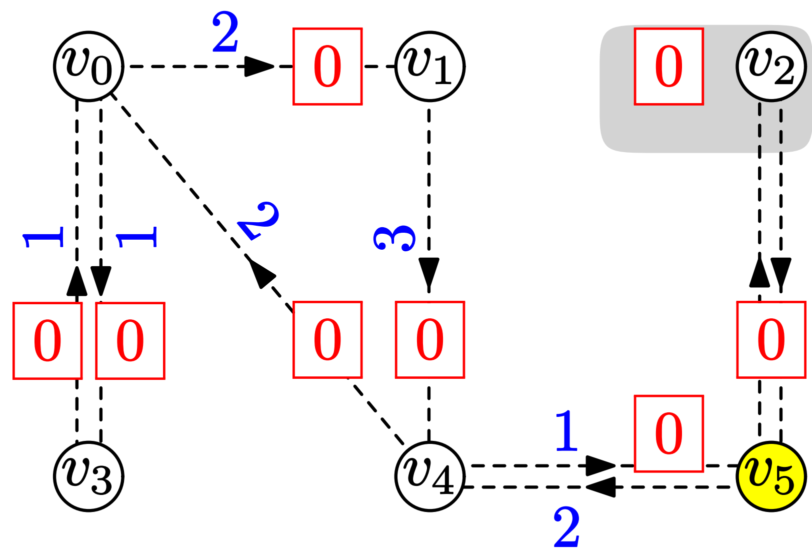


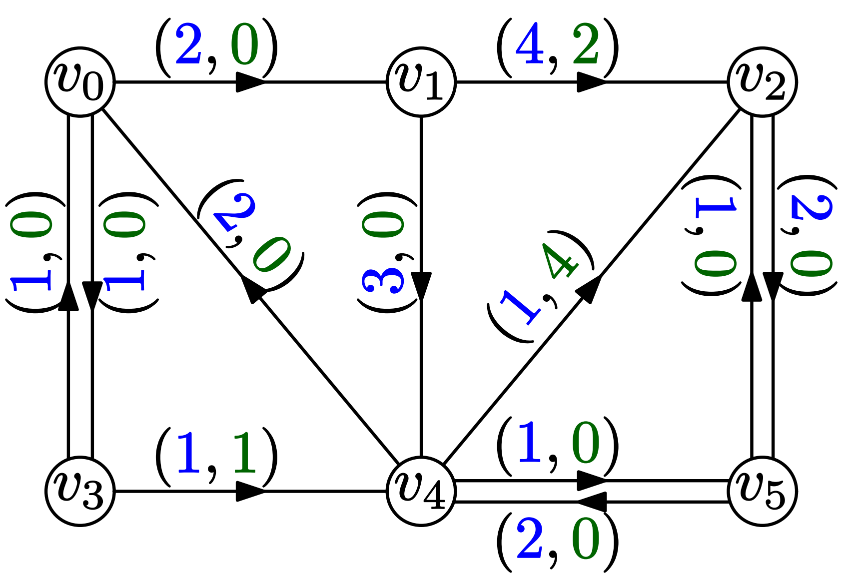
v_5-v_5 流で，
v_5 への流入量を最大にするものを見つける

v_5 から到達できる (v_5 以外の) 頂点の集合 W を定める

[復習] 主双対法：例 (8/8)





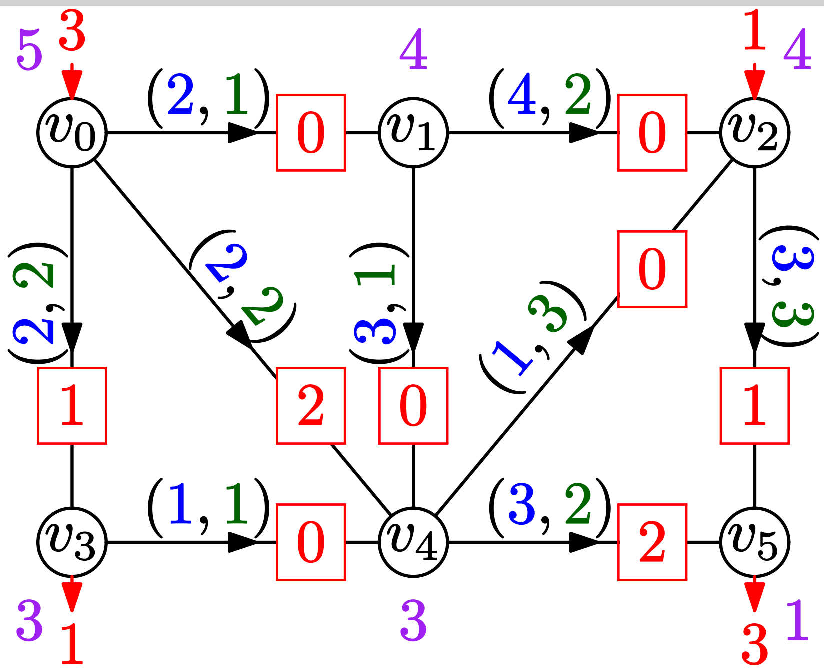


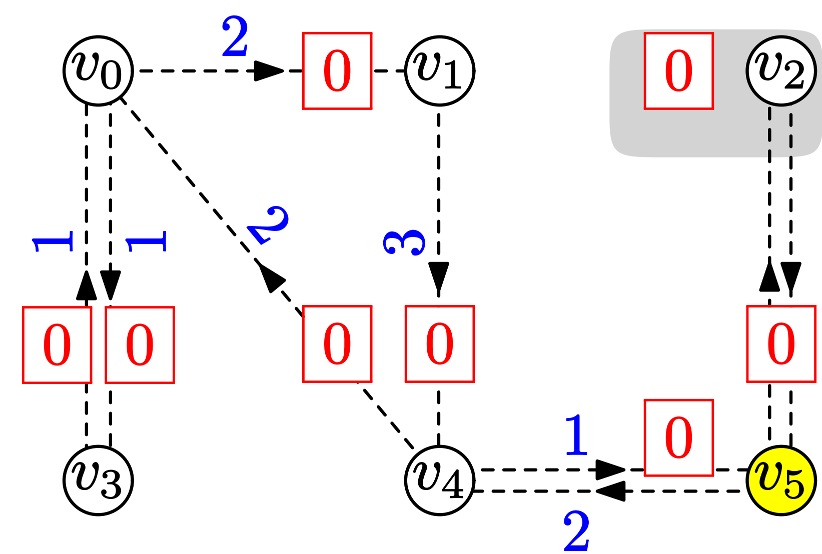
v_5-v_5 流で，
v_5 への流入量を最大にするものを見つける

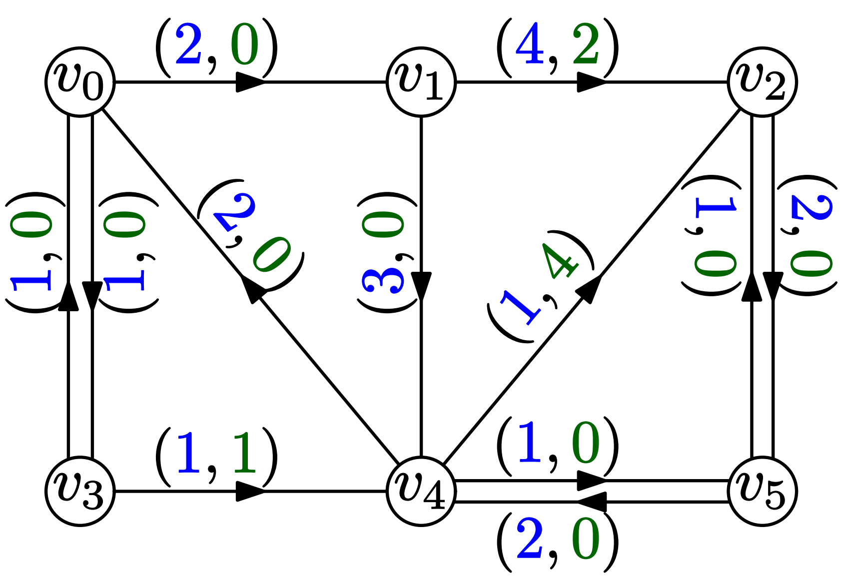
v_5 から到達できる (v_5 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

最小費用 b-流！







v_5-v_5 流で，
v_5 への流入量を最大にするものを見つける

v_5 から到達できる (v_5 以外の) 頂点の集合 W を定める

W の頂点のポテンシャルを上げる

[復習] 主双対法：流れ

アルゴリズム：主双対法 (primal-dual method)

- 初期化：b-流 f，ポテンシャル $p = 0$
- 反復：簡約費用が負の弧がある限り，以下を実行
  1. $v \leftarrow$ 簡約費用が負の弧の始点
  2. 簡約費用が非正の弧のみを用いる v-v 流で，v への流入が最大のものを発見
  3. それを用いて，f を更新
  4. $W \leftarrow v$ から簡約費用が非正の弧のみを用いて到達可能な頂点の集合
  5. W のポテンシャルを一律に増加
- f を出力

ステップ 2, 4 では，v を始点とする弧で簡約費用が 0 のものは使わない

[復習] 主双対法：流れ

アルゴリズム：主双対法 (primal-dual method)

- 初期化：b-流 f，ポテンシャル $p = 0$
- 反復：簡約費用が負の弧がある限り，以下を実行
  1. $v \leftarrow$ 簡約費用が負の弧の始点
  2. 簡約費用が非正の弧のみを用いる v-v 流で，v への流入が最大のものを発見
  3. それを用いて，f を更新
  4. $W \leftarrow v$ から簡約費用が非正の弧のみを用いて到達可能な頂点の集合
  5. W のポテンシャルを一律に増加
- f を出力

簡約費用が負の弧が減る か
簡約費用が 0 の弧が増える まで

ステップ 2, 4 では，v を始点とす

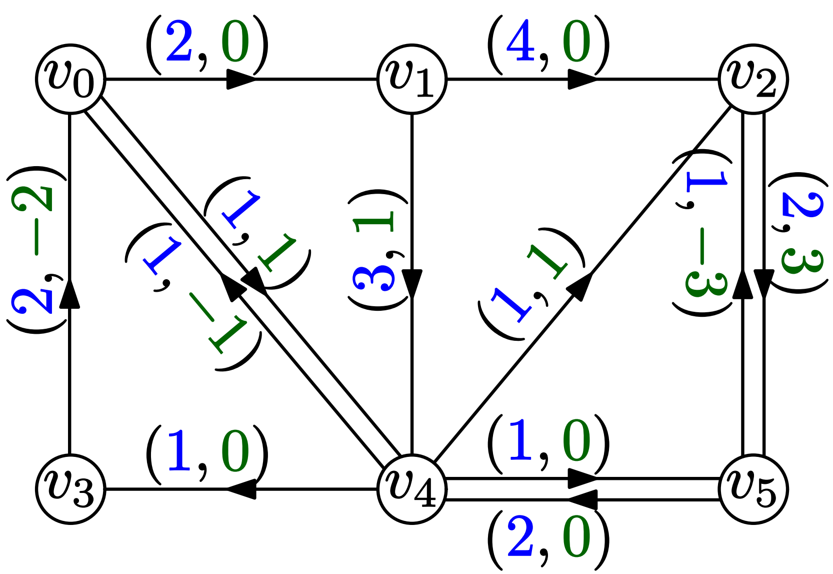
主双対法：正当性

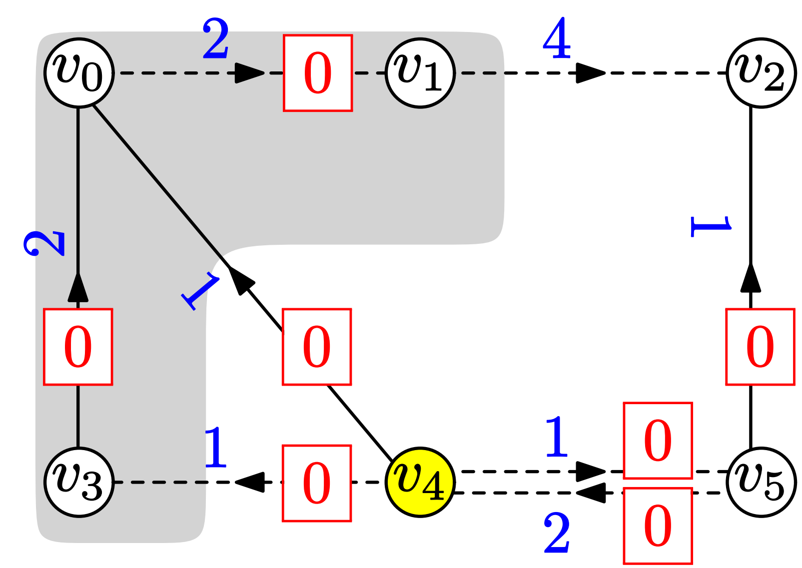
簡約費用最適性条件から，次が直ちに導かれる

性質：主双対法の正当性

主双対法が停止する $\Rightarrow$
出力 f は最小費用 b-流である

1. **主双対法：計算量**
2. 主双対法に対する費用スケーリング法
3. 全体のまとめ





不変条件：簡約費用 (1)

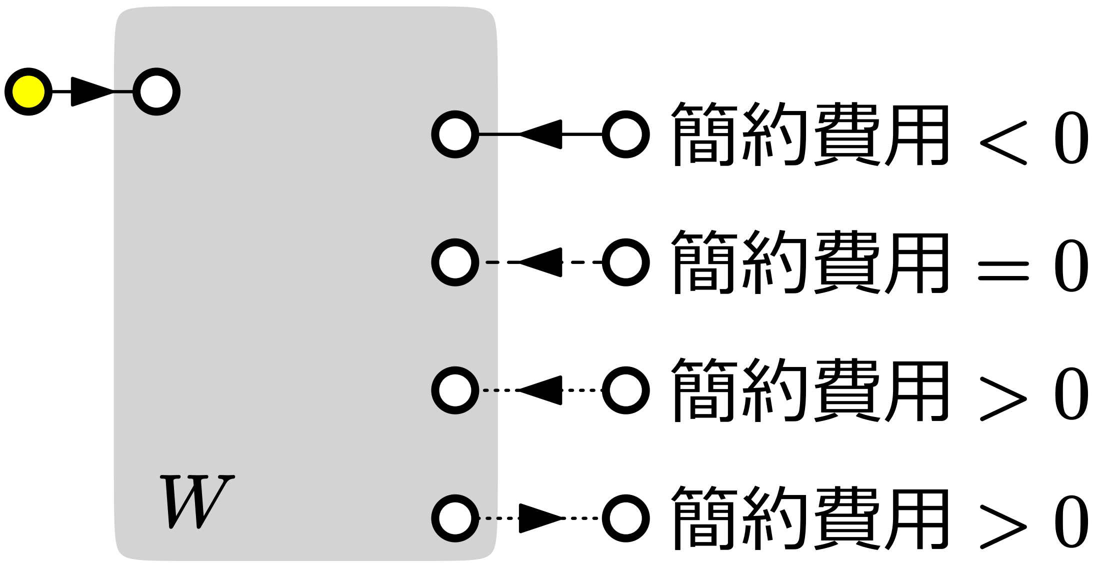
設定：b-流 f，ポテンシャル p，弧 $uv \in A_f$

性質：簡約費用の非負性は保存される

ポテンシャル変更前：弧 uv の簡約費用 ≥ 0

$\Rightarrow$

ポテンシャル変更後：弧 uv の簡約費用 ≥ 0



不変条件：簡約費用 (1)

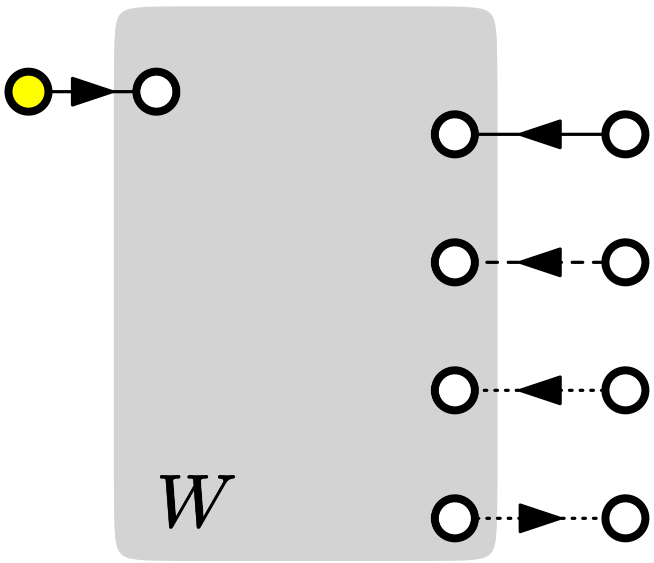
設定：b-流 f，ポテンシャル p，弧 $uv \in A_f$

性質：簡約費用の非負性は保存される

ポテンシャル変更前：弧 uv の簡約費用 ≥ 0

$\Rightarrow$

ポテンシャル変更後：弧 uv の簡約費用 ≥ 0



ポテンシャル変更 $\Longrightarrow$

簡約費用 < 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 $= 0$	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\downarrow$

0 までしか下げない

不変条件：簡約費用 (1)

設定：b-流 f，ポテンシャル p，弧 $uv \in A_f$

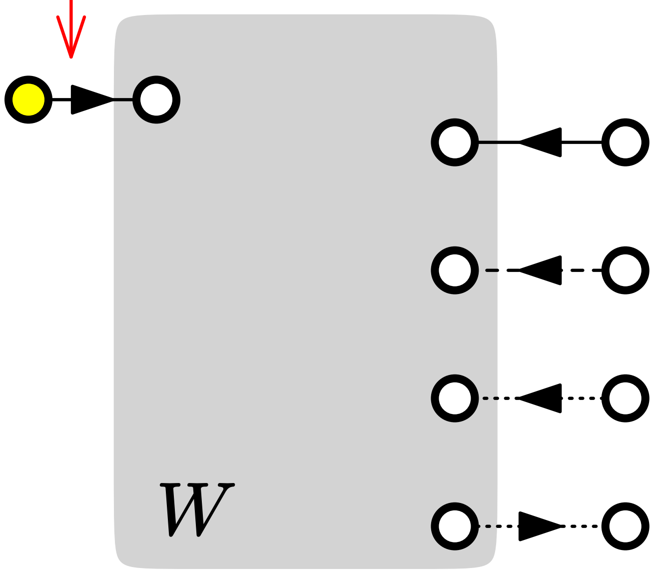
性質：簡約費用の非負性は保存される

ポテンシャル変更前：弧 uv の簡約費用 ≥ 0

$\Rightarrow$

ポテンシャル変更後：弧 uv の簡約費用 ≥ 0

いつか 0 になる



ポテンシャル変更 $\Longrightarrow$

簡約費用 < 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 $= 0$	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\downarrow$

0 までしか下げない

不変条件：簡約費用 (2)

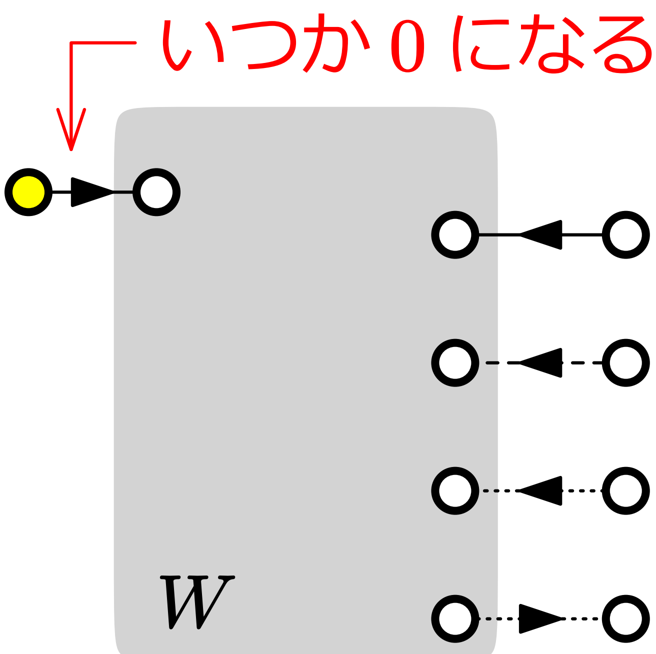
設定：b-流 f，ポテンシャル p，ソース u，弧 $uv \in A_f$

性質：ソースから出る弧の簡約費用は必ず増加

ポテンシャル変更前：弧 uv の簡約費用 < 0

$\Rightarrow$

ポテンシャル変更後：弧 uv の簡約費用は必ず増加



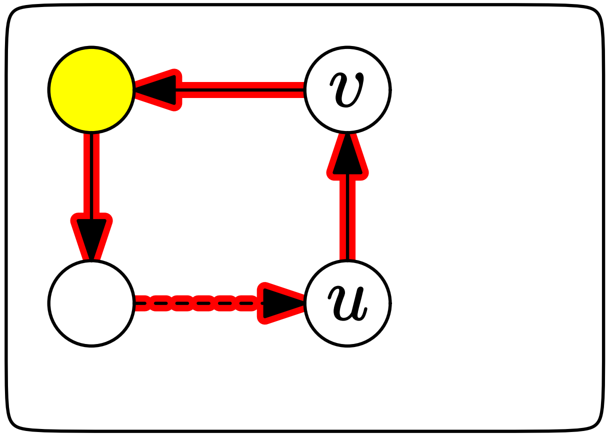
ポテンシャル変更

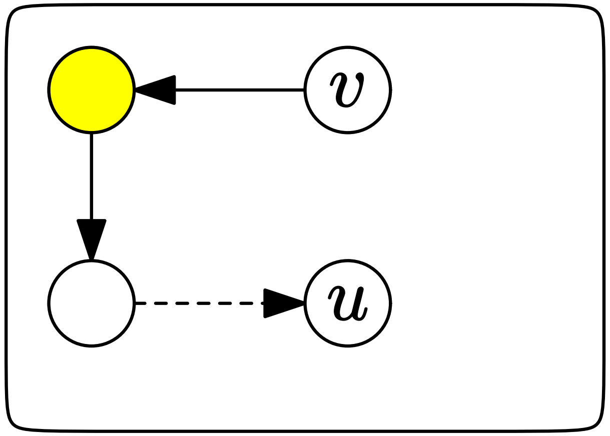
$\Longrightarrow$

簡約費用 < 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 $= 0$	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\uparrow$
簡約費用 > 0	簡約費用 $\downarrow$

0 までしか下げない

流の更新で何が起こるか？





$c_{uv} - p_u + p_v < 0$

$-c_{uv} - p_v + p_u > 0$

性質：流の更新

主双対法における流の更新によって，
簡約費用が負の弧は増えない

主双対法：計算量

- 高々 C 回，流・ポテンシャルを変更すると
  ソースを始点とする簡約費用負の弧がすべてなくなる
  - 流の更新にかかる計算量 = 最大流の計算量 (MF)
  - ポテンシャルの更新に係る計算量 $= O(m)$
- ソースの数 $\leq n$

したがって，次の結論が得られる

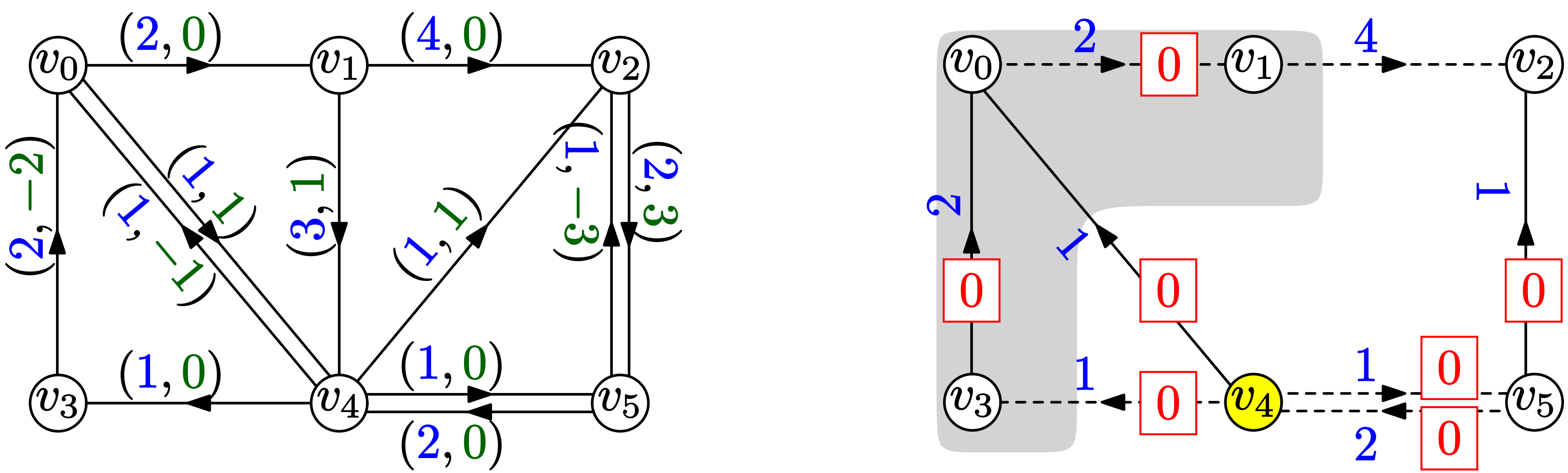
性質：主双対法の計算量

費用が整数 $\Rightarrow$
主双対法の計算量は $O(nC \cdot \mathrm{MF})$

補足：$C = \max_{a \in A} c(a)$

これは 擬多項式時間の計算量

1. 主双対法：計算量
2. **主双対法に対する費用スケーリング法**
3. 全体のまとめ



ここからの目標

- 主双対法の計算量を改善する
- そのために，費用に対してスケーリングを適用する

性質：主双対法の計算量 （再掲）

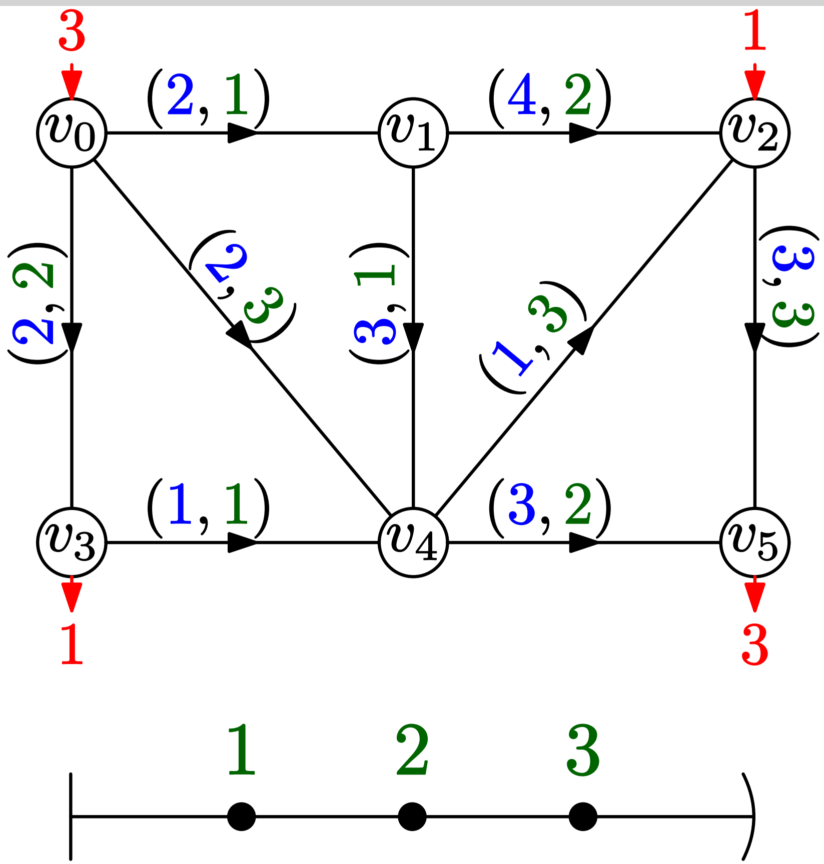
費用が整数 $\Rightarrow$

主双対法の計算量は $O(nC \cdot \mathrm{MF})$

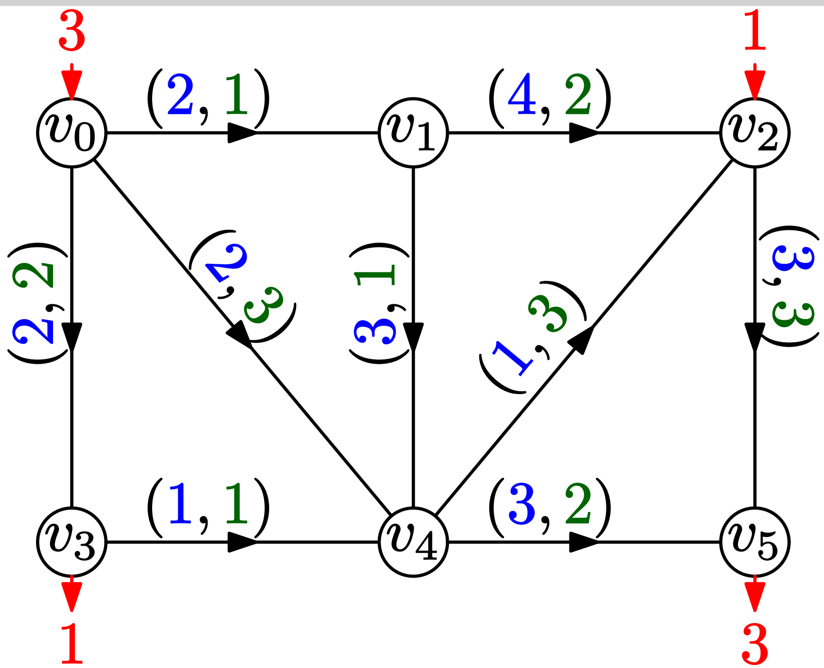
これは 擬多項式時間の計算量

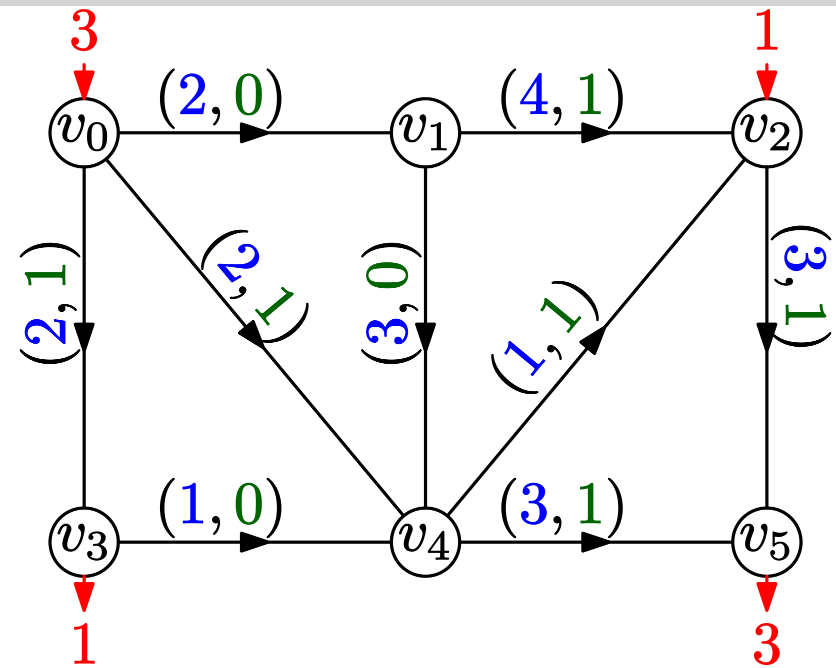
補足：$C = \max_{a \in A} c(a)$

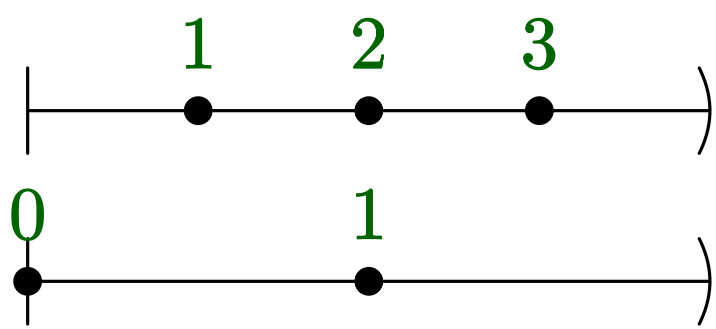
費用スケーリング法：例 (1/12)



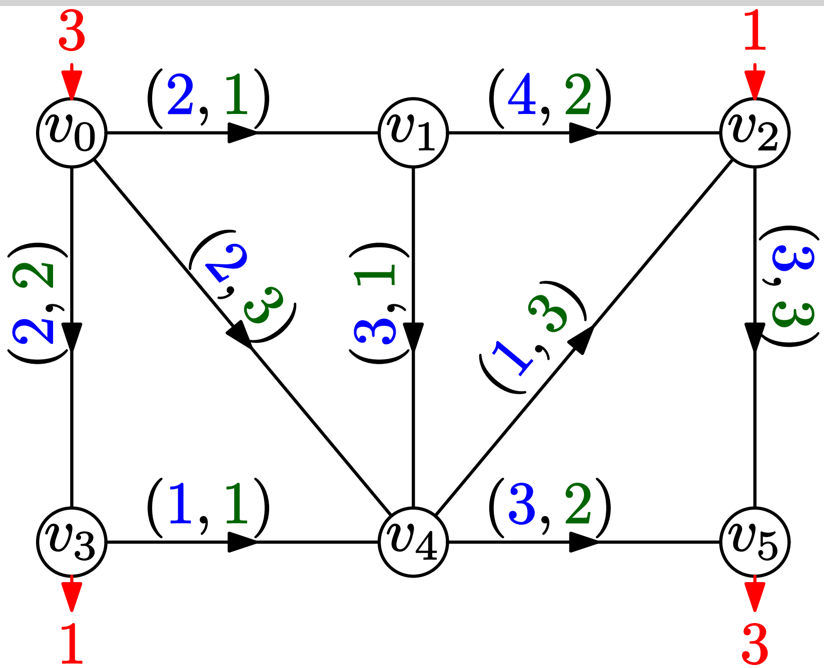
費用スケーリング法：例 (1/12)

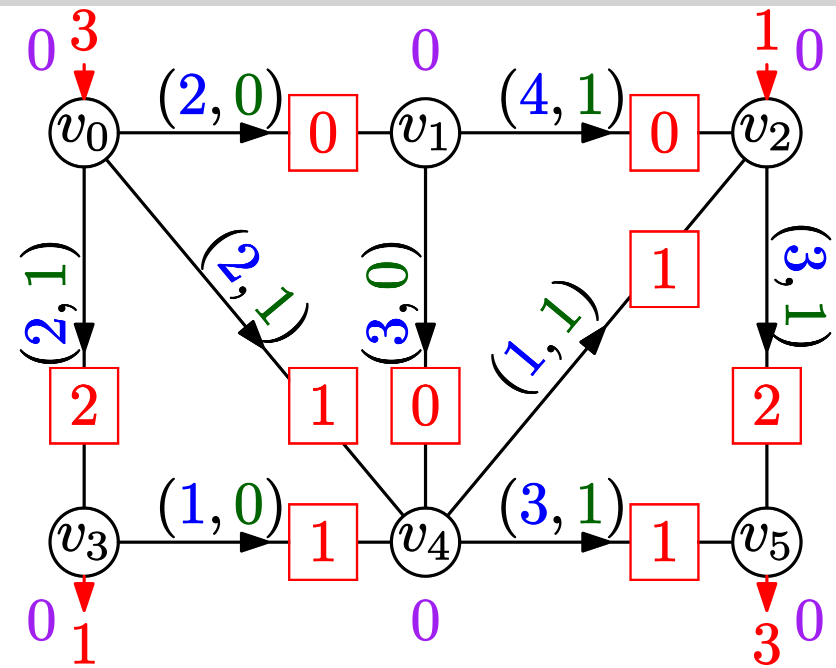


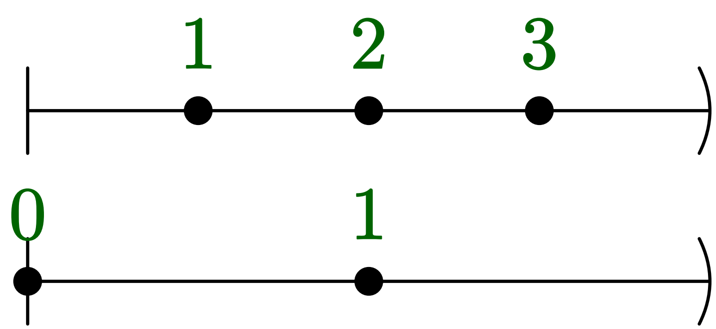




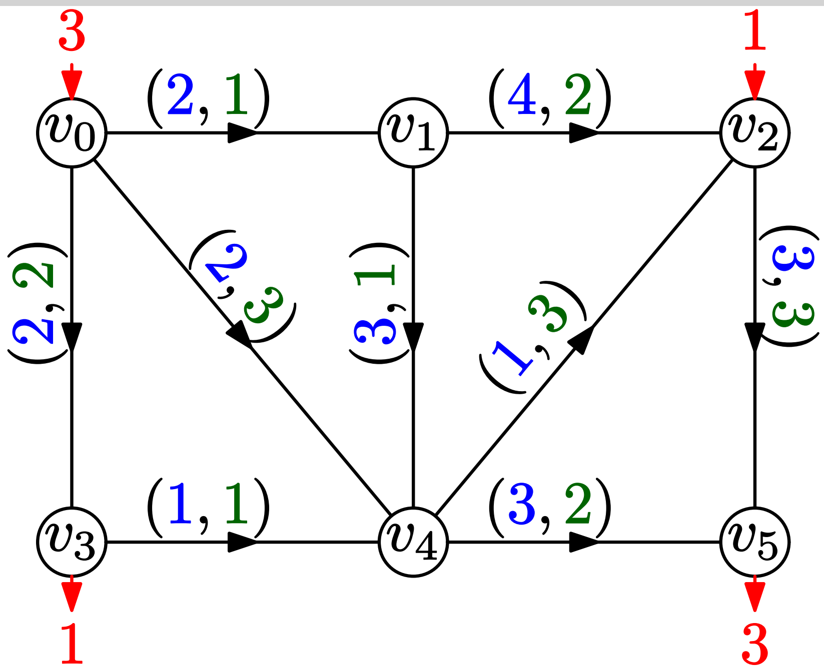
費用スケーリング法：例 (1/12)

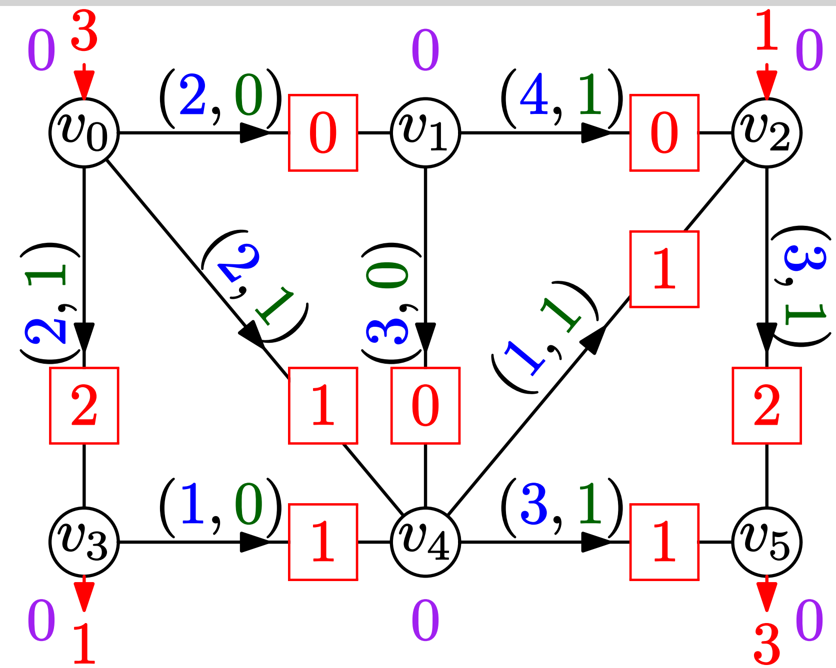


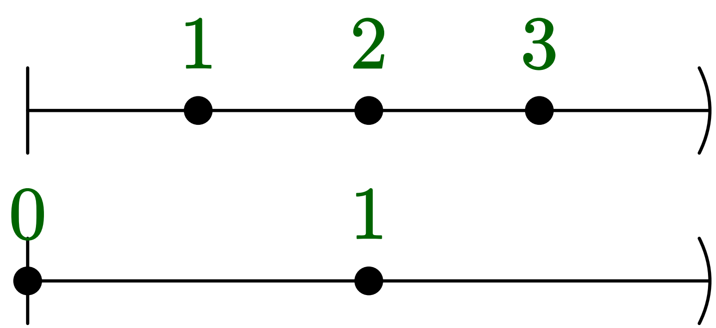


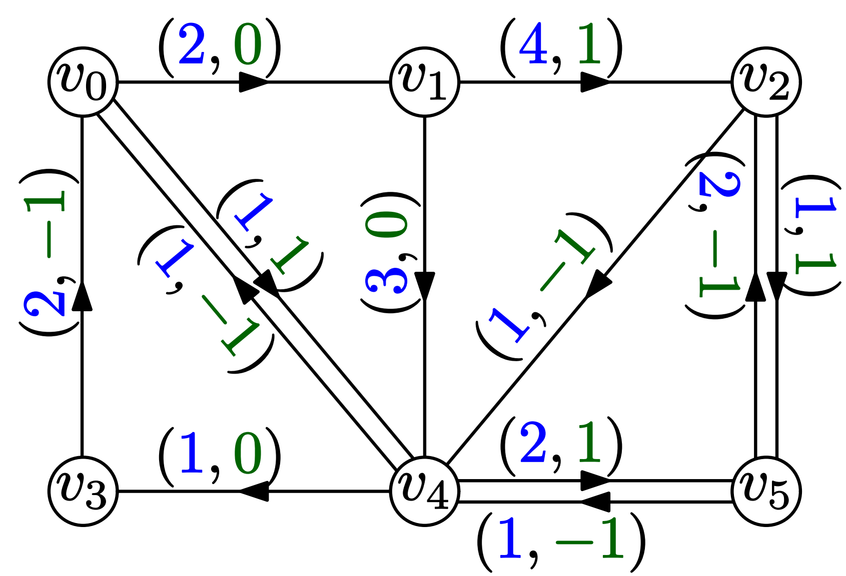


費用スケーリング法：例 (1/12)

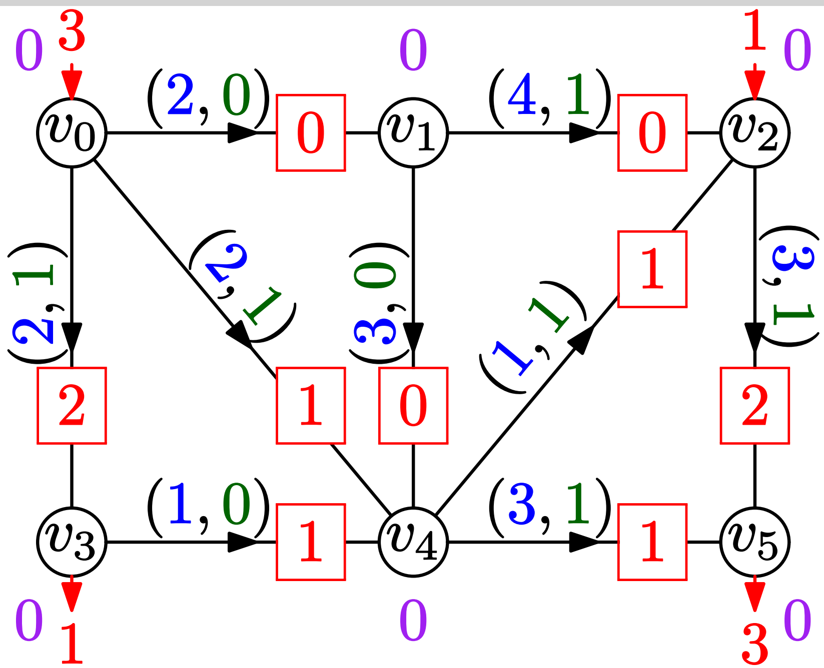


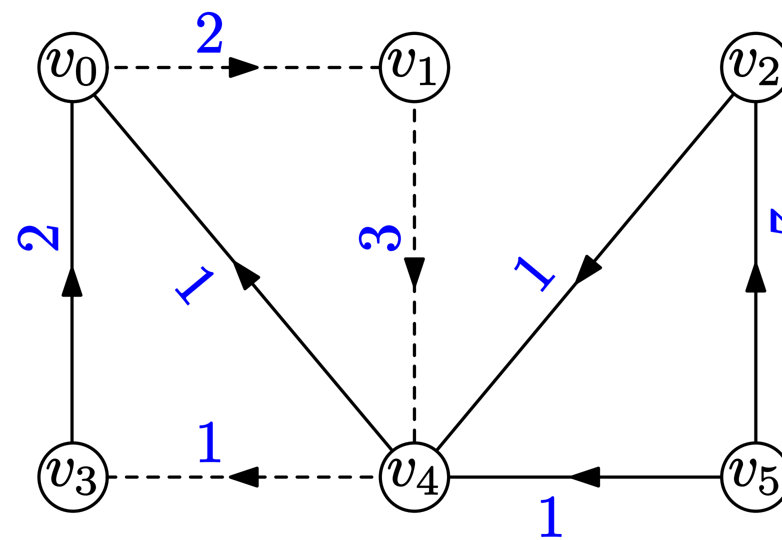


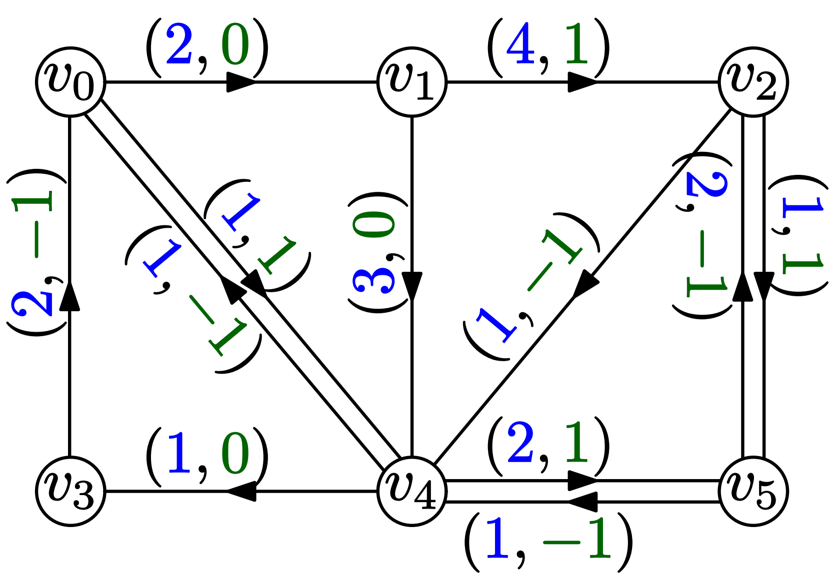




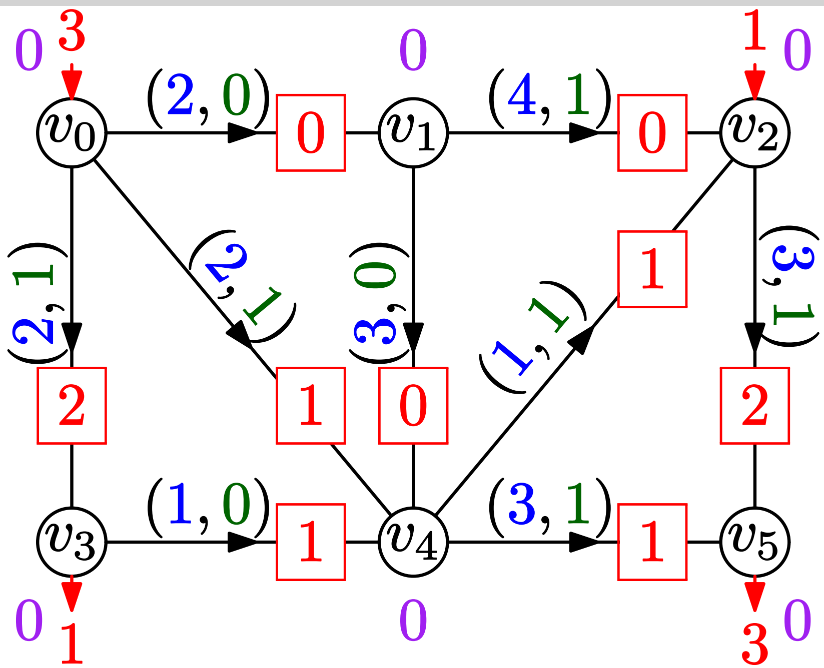
費用スケーリング法：例 (2/12)

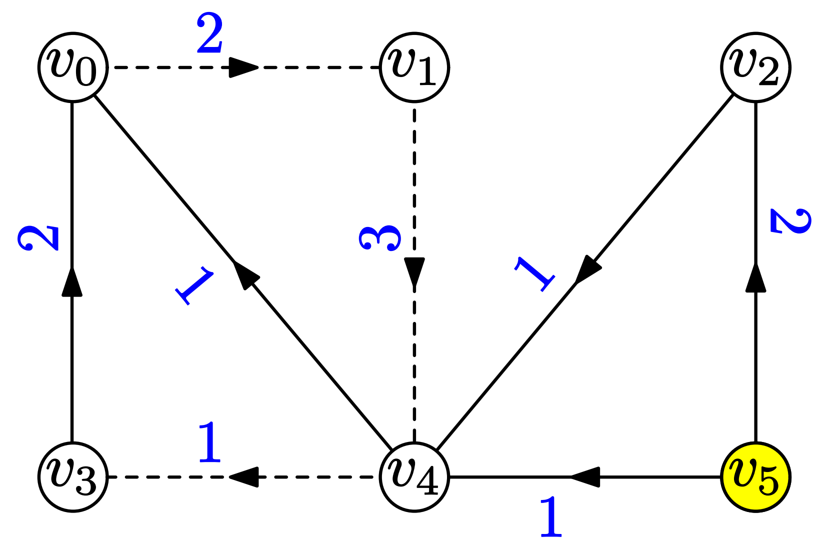


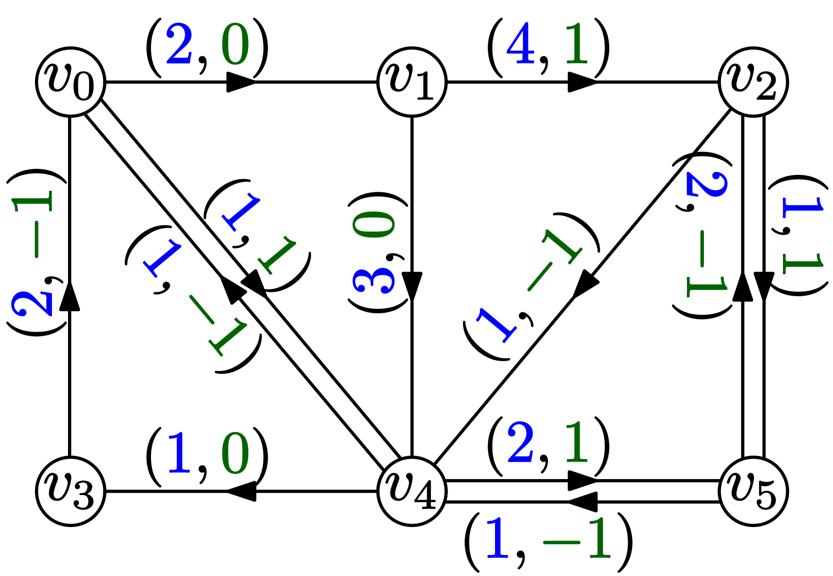




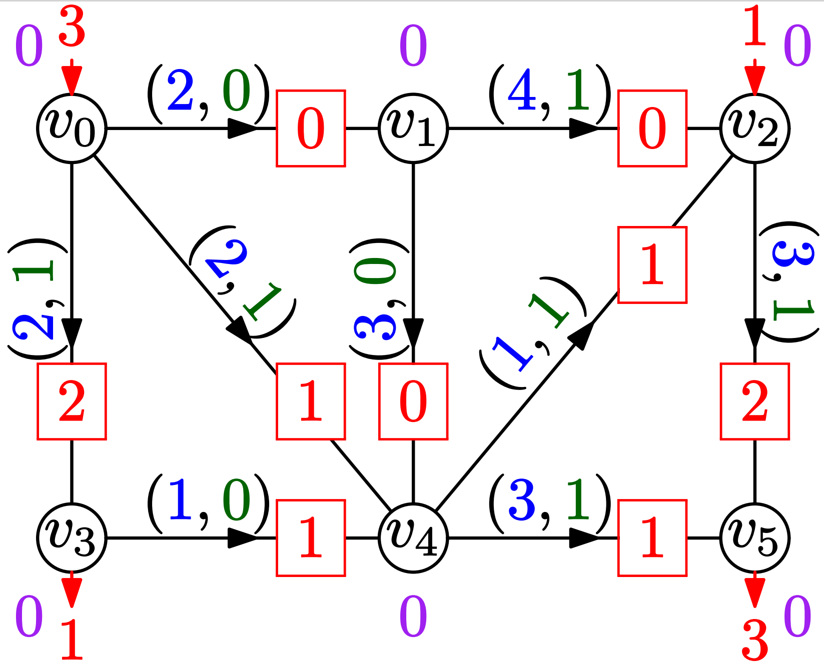
費用スケーリング法：例 (2/12)

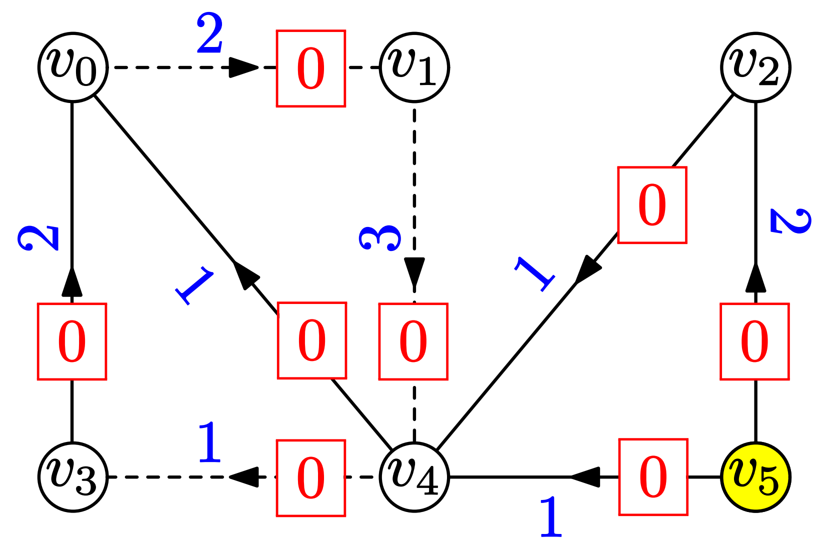


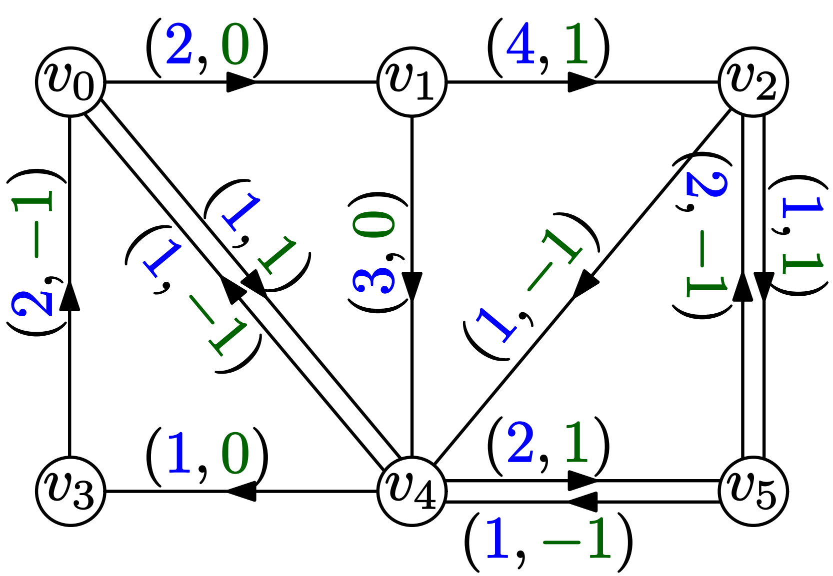




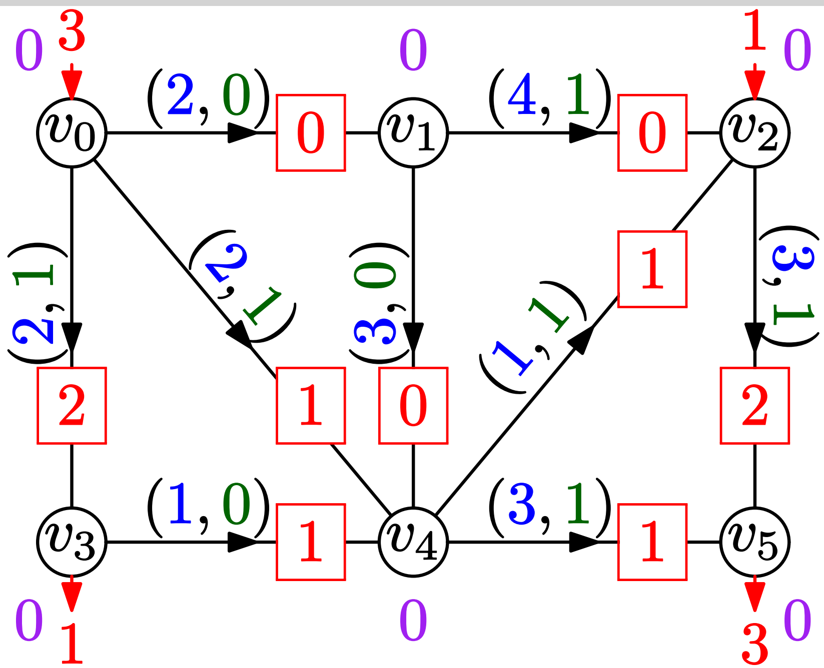
費用スケーリング法：例 (2/12)

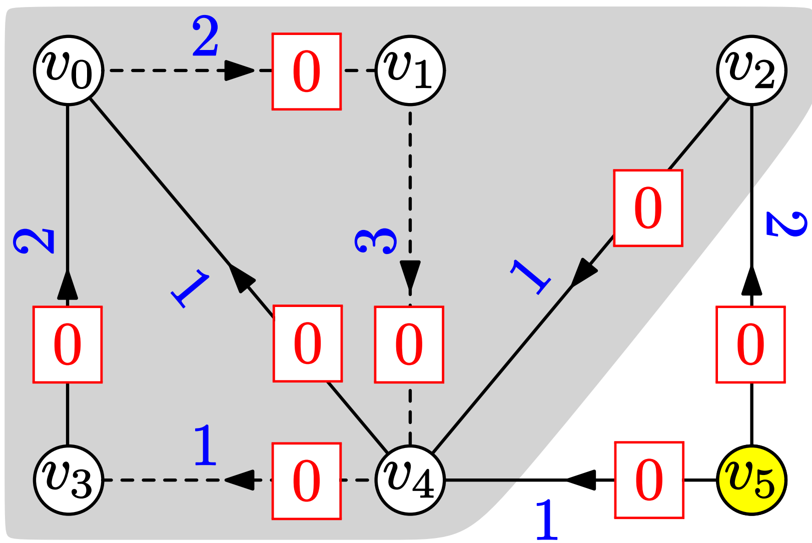


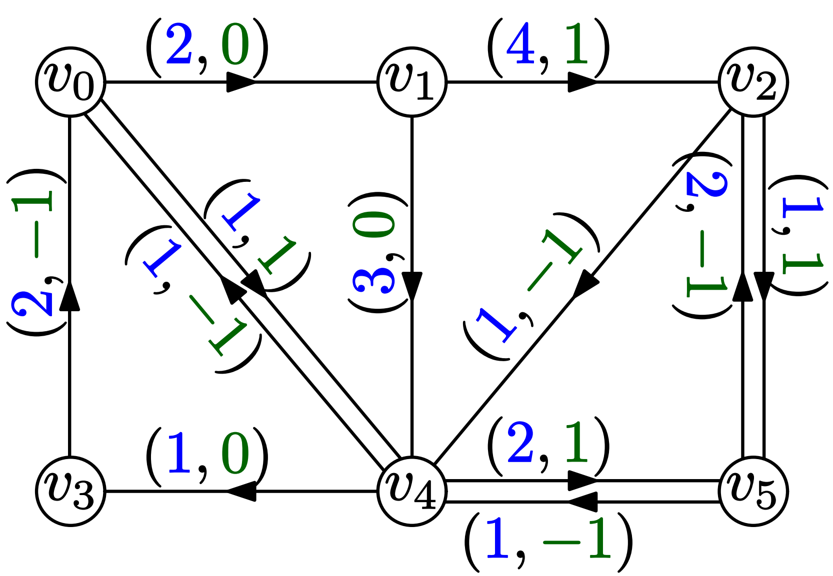




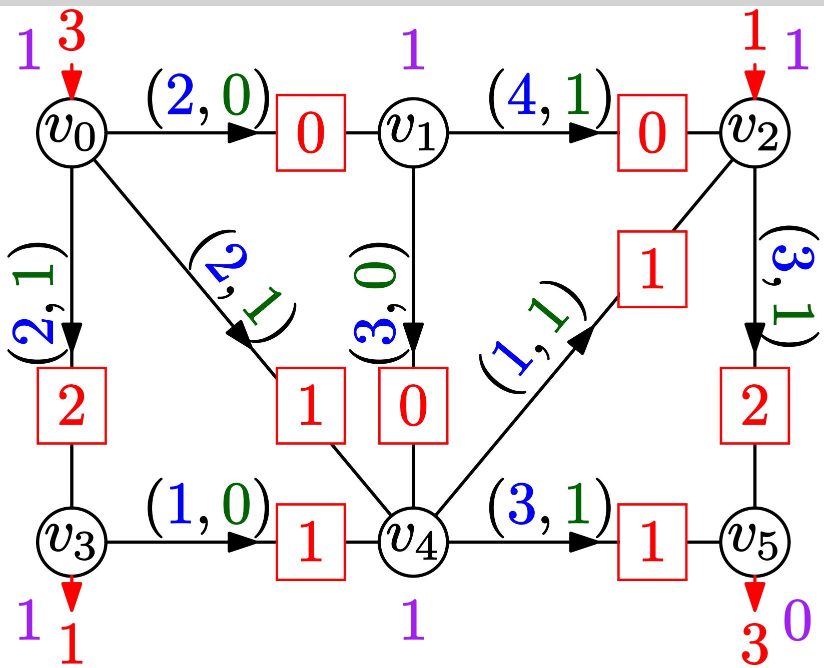
費用スケーリング法：例 (3/12)

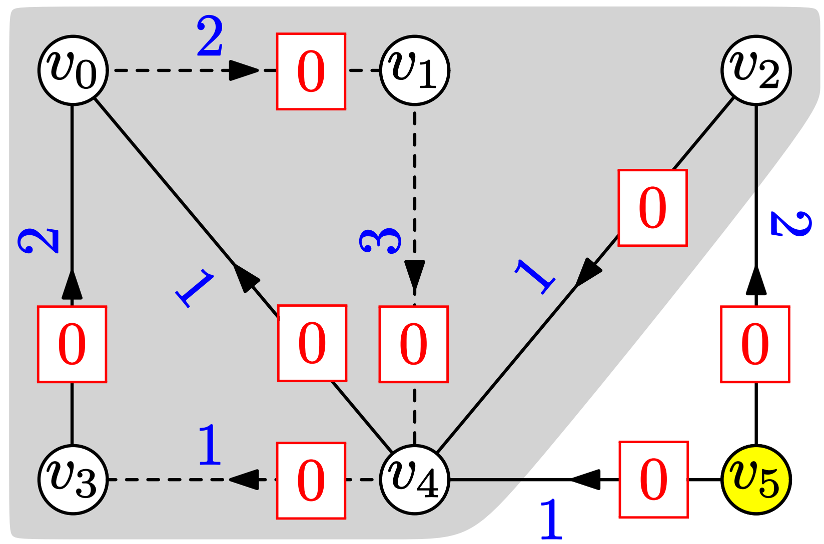


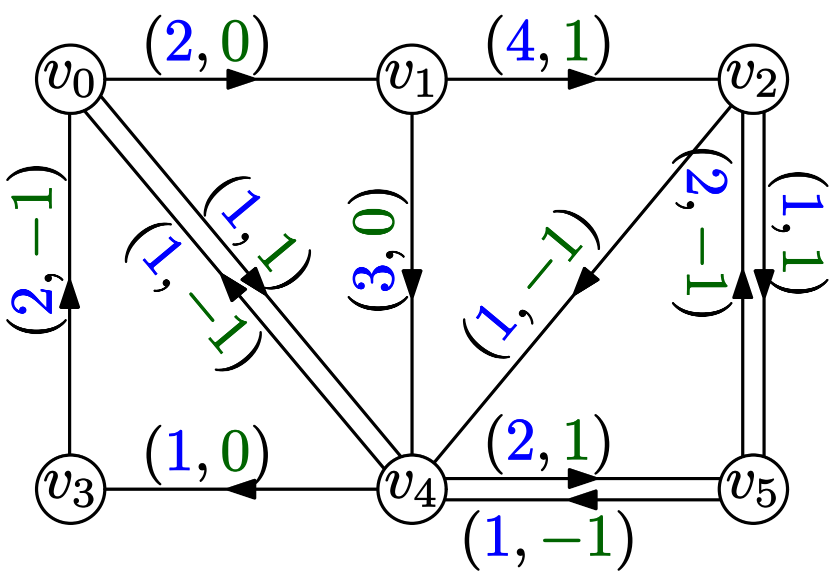




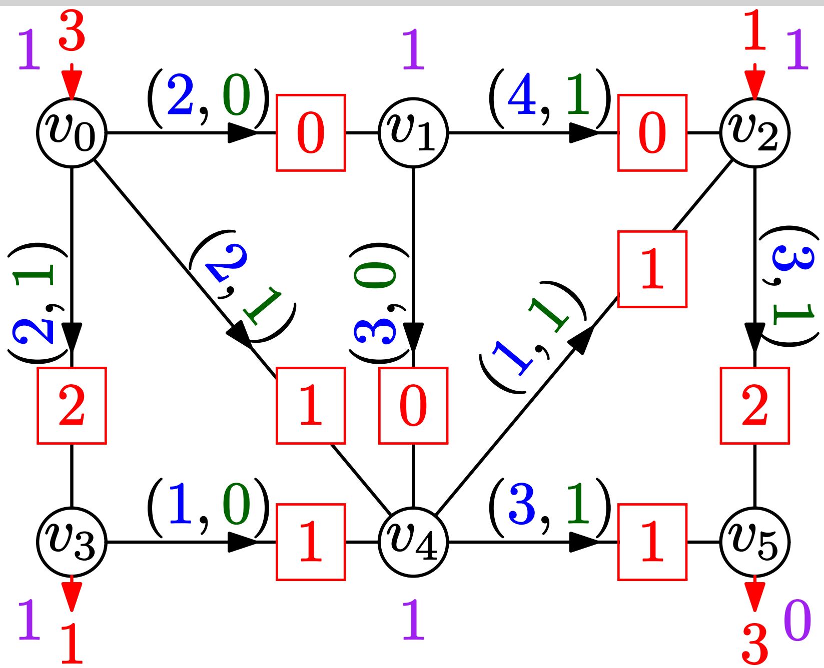
費用スケーリング法：例 (3/12)

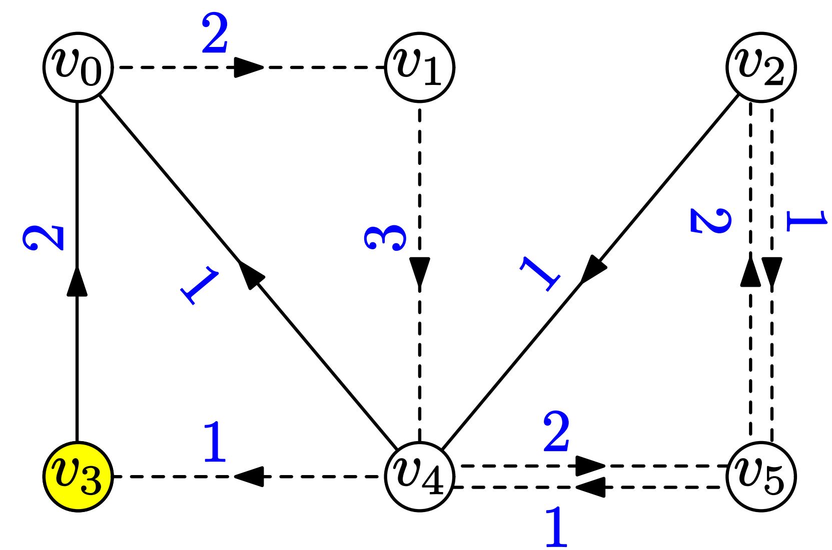


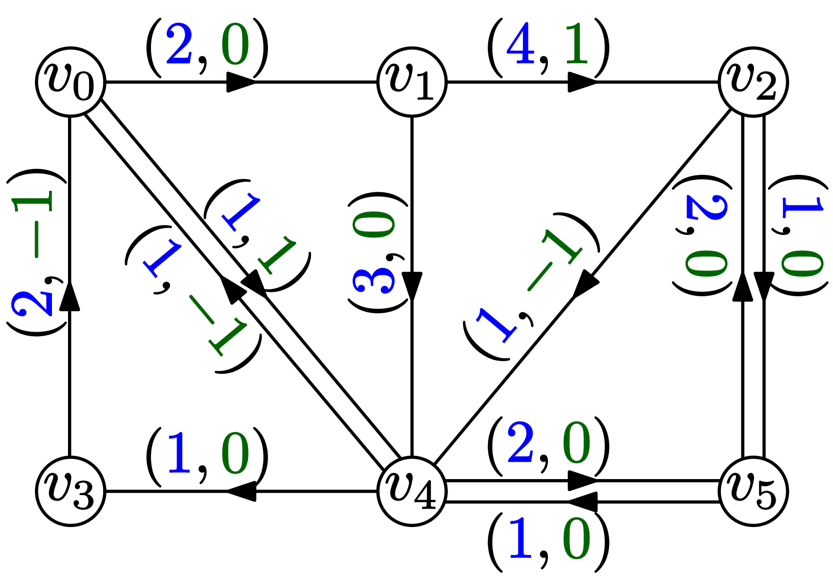




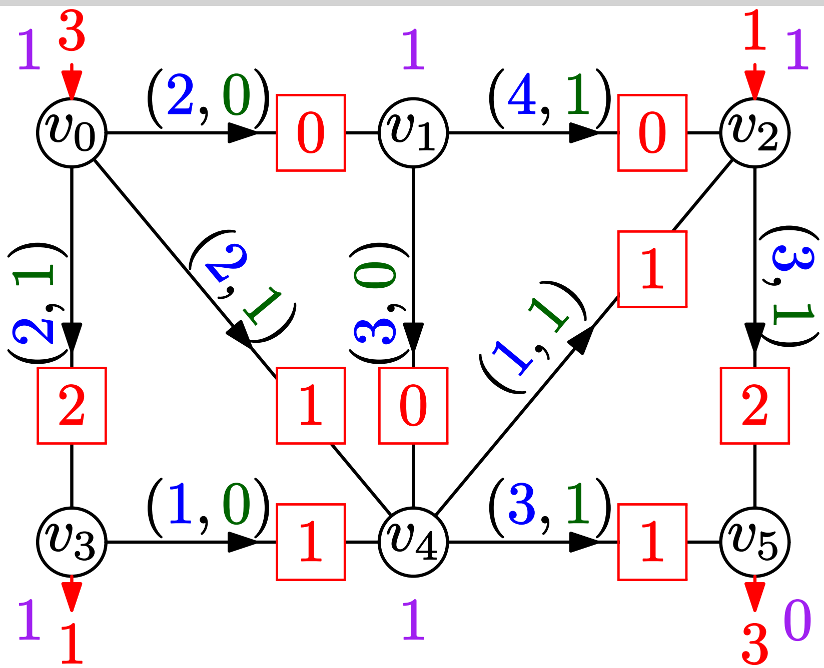
費用スケーリング法：例 (4/12)

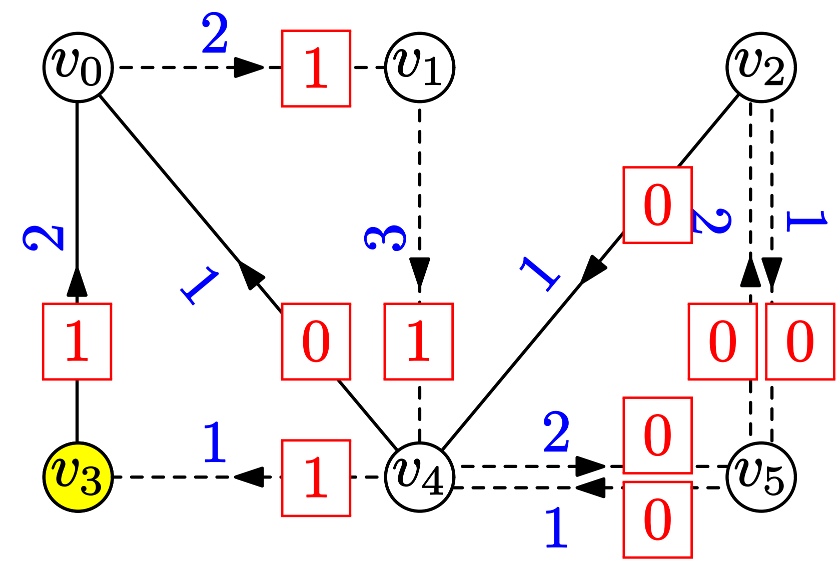


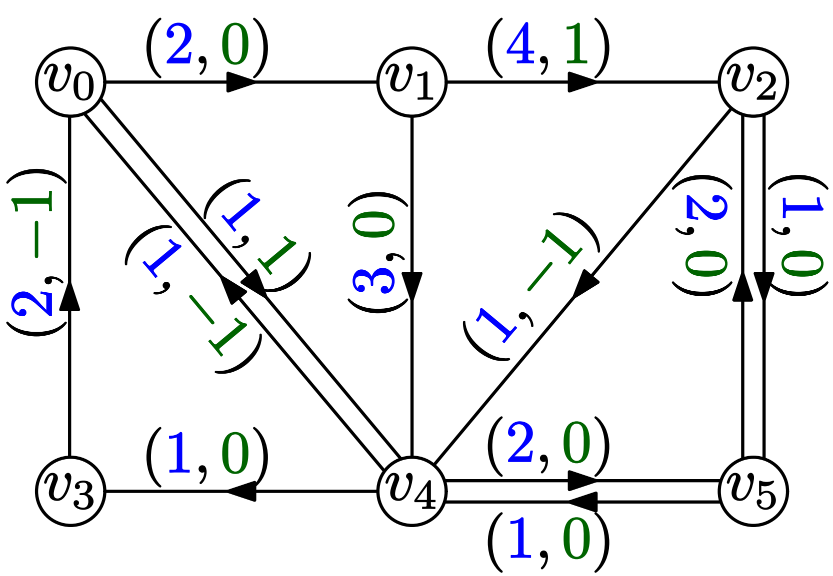




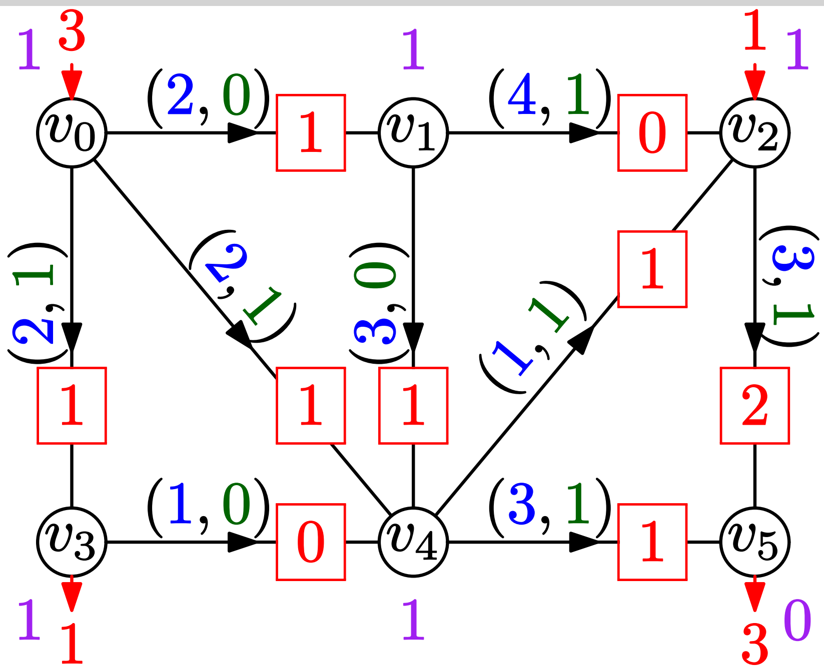
費用スケーリング法：例 (4/12)

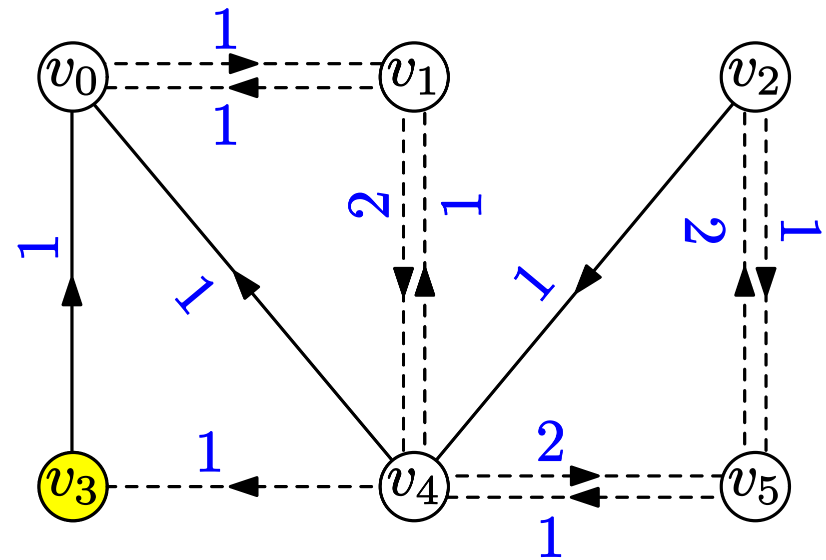


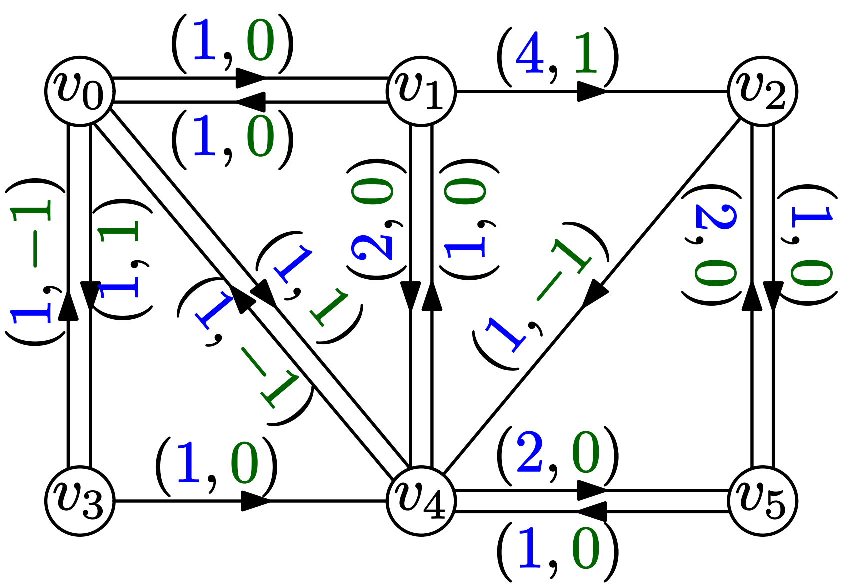




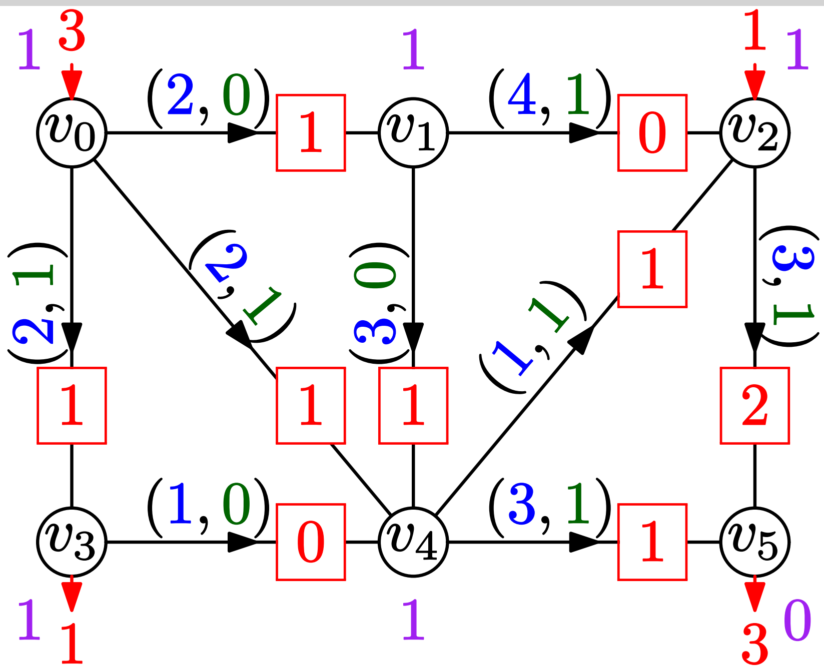
費用スケーリング法：例 (5/12)

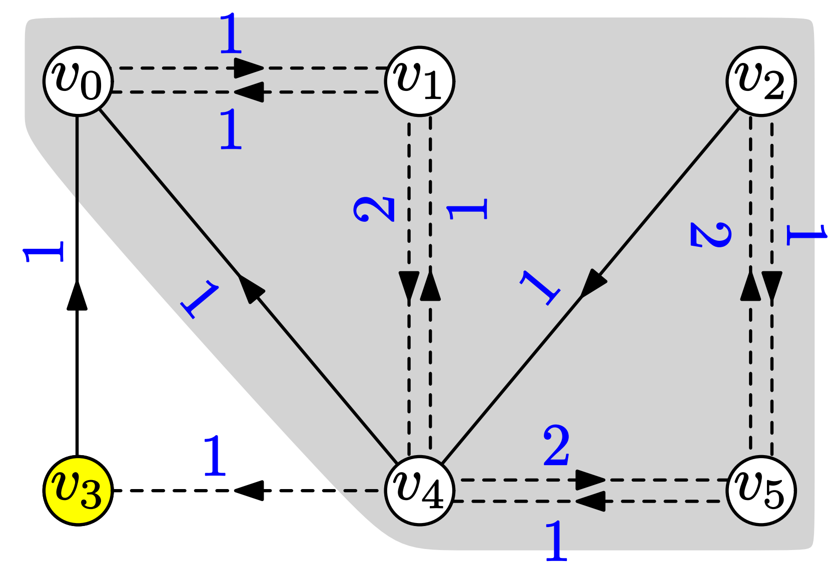


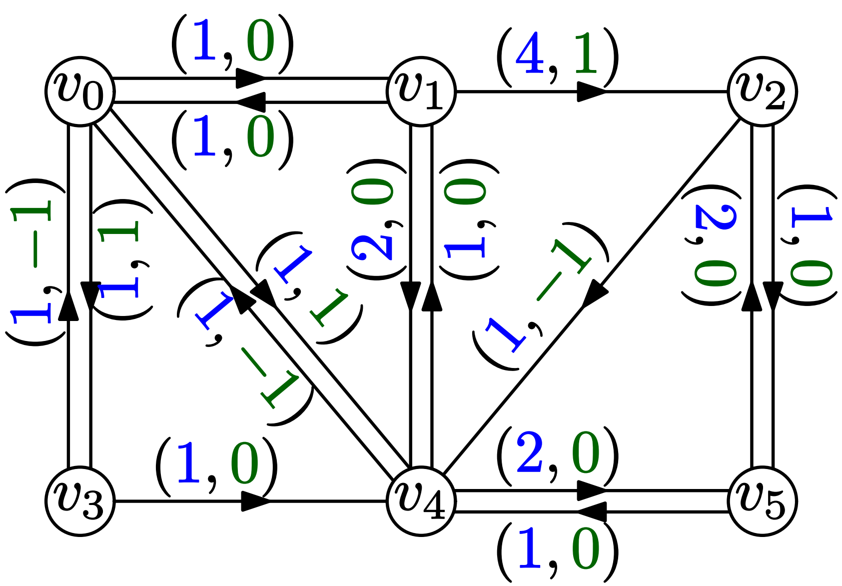




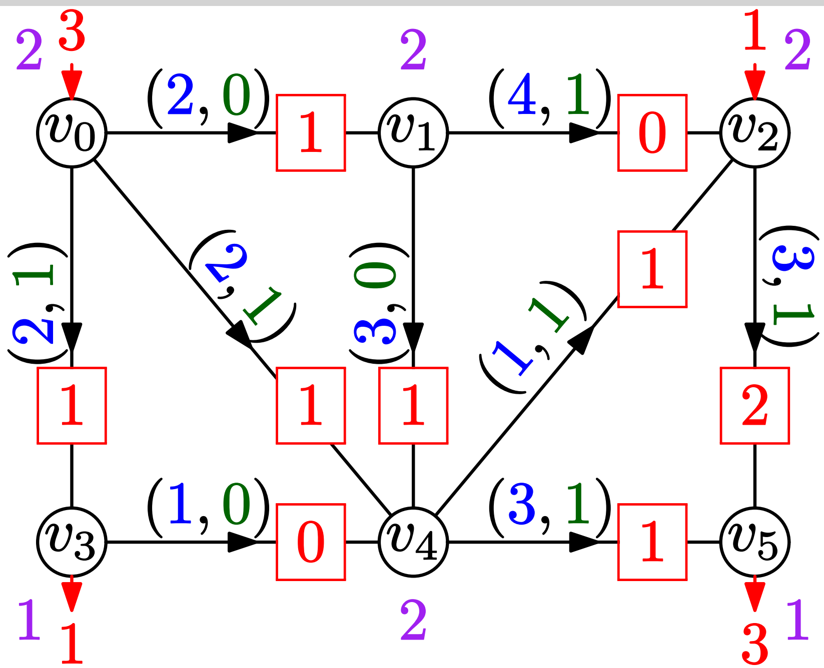
費用スケーリング法：例 (5/12)

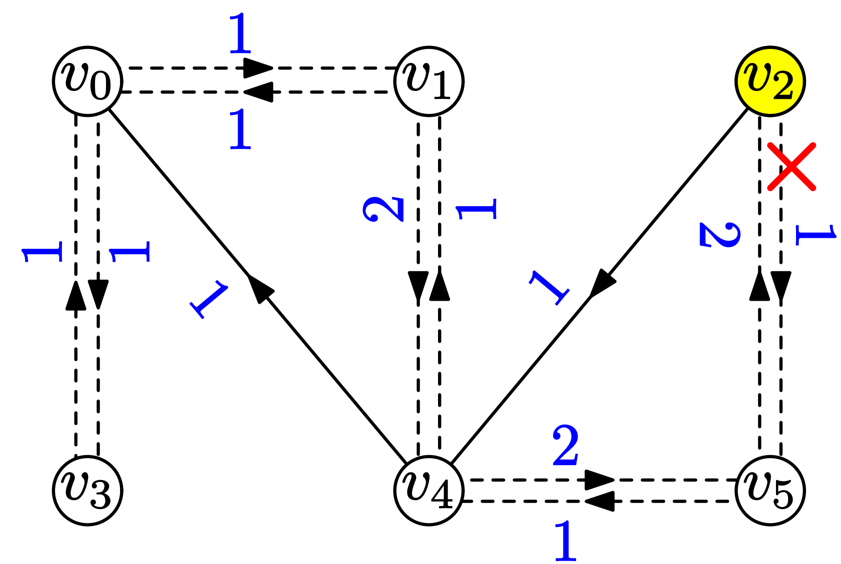


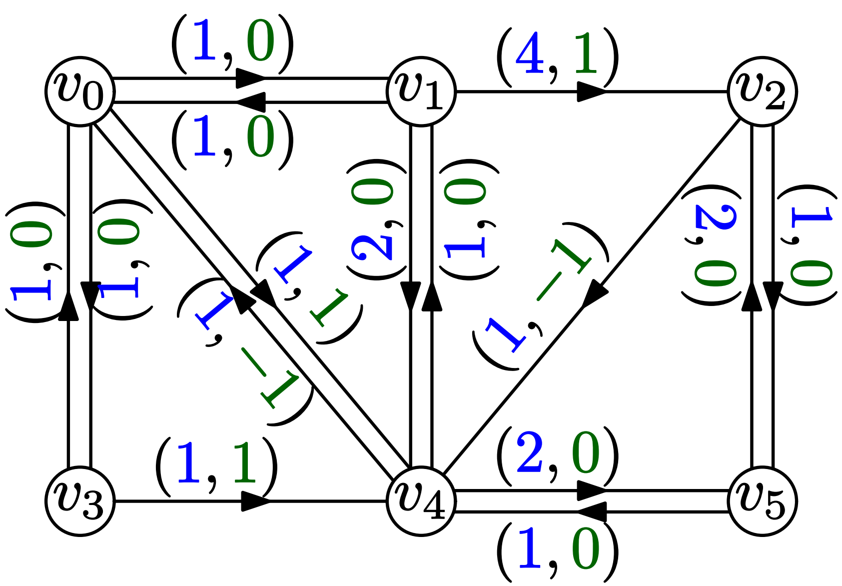




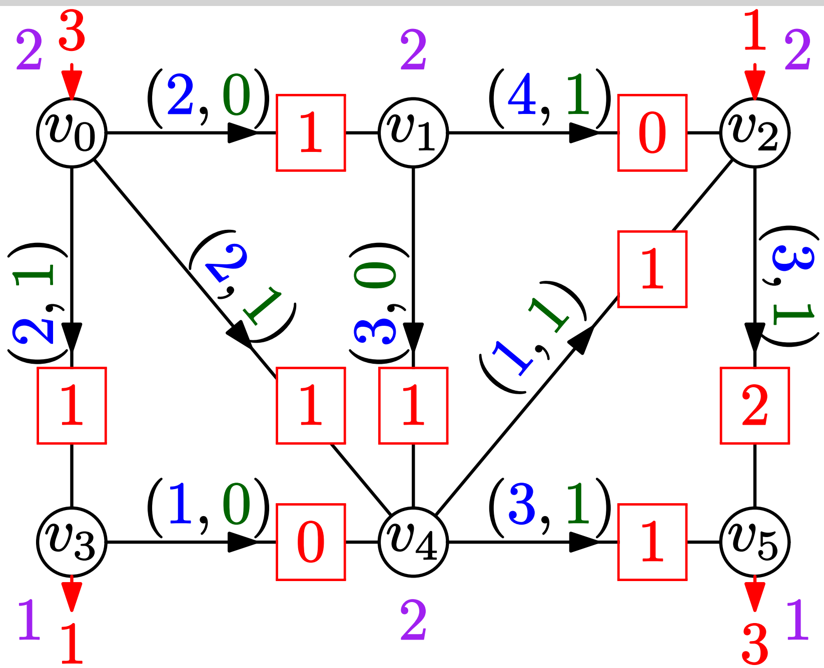
費用スケーリング法：例 (6/12)

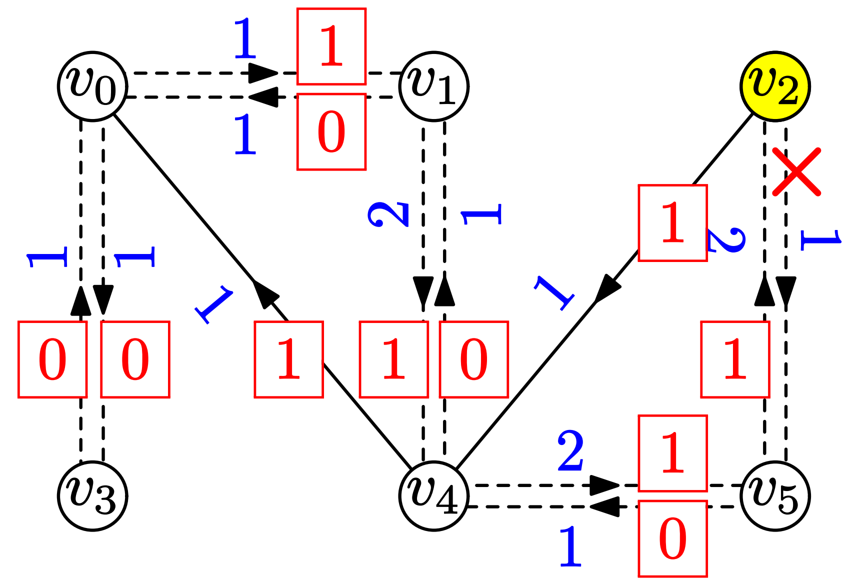


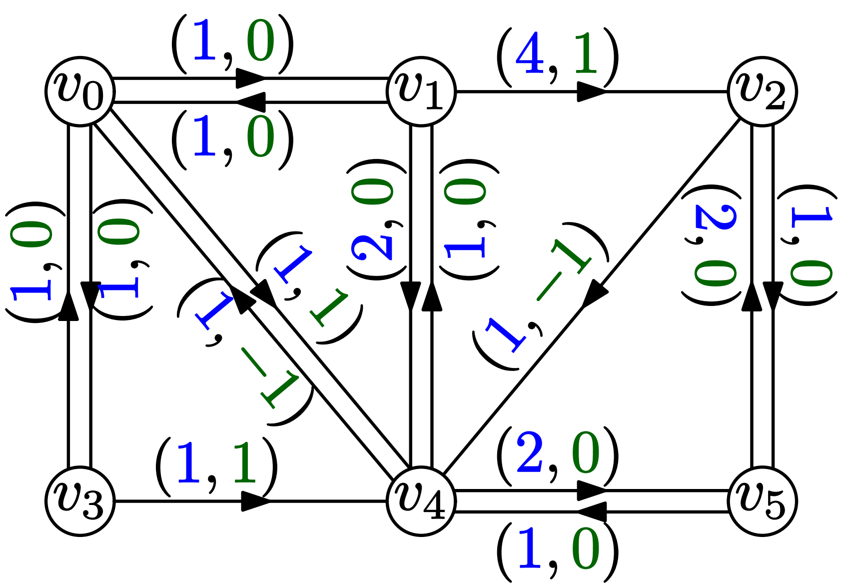




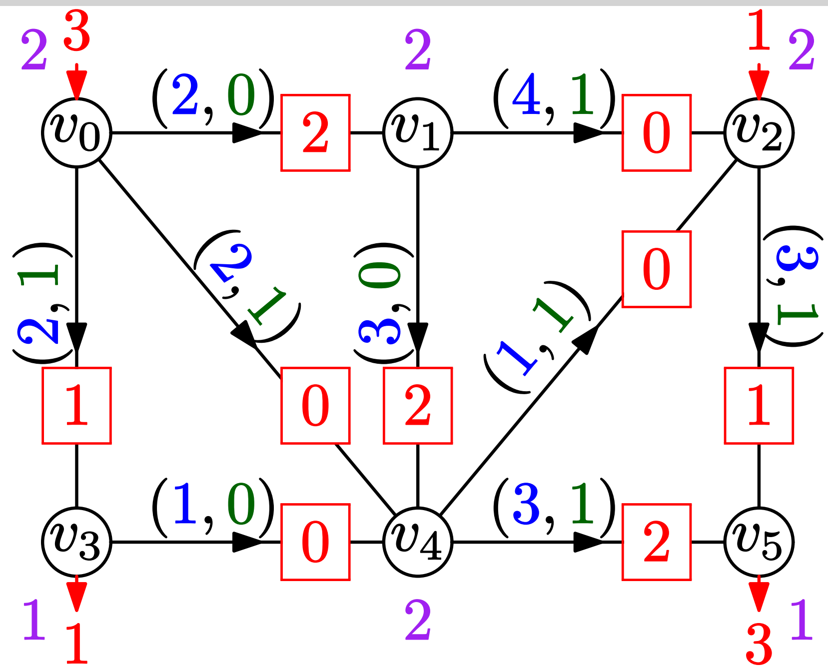
費用スケーリング法：例 (6/12)

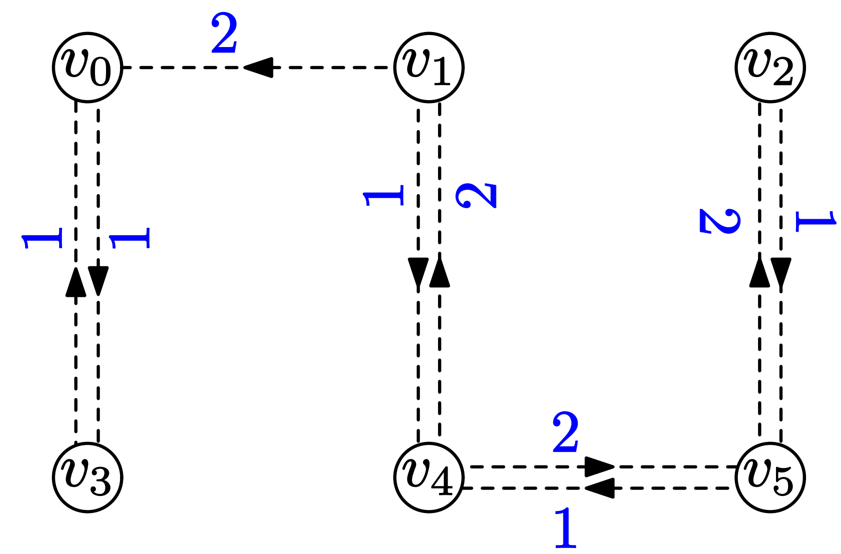


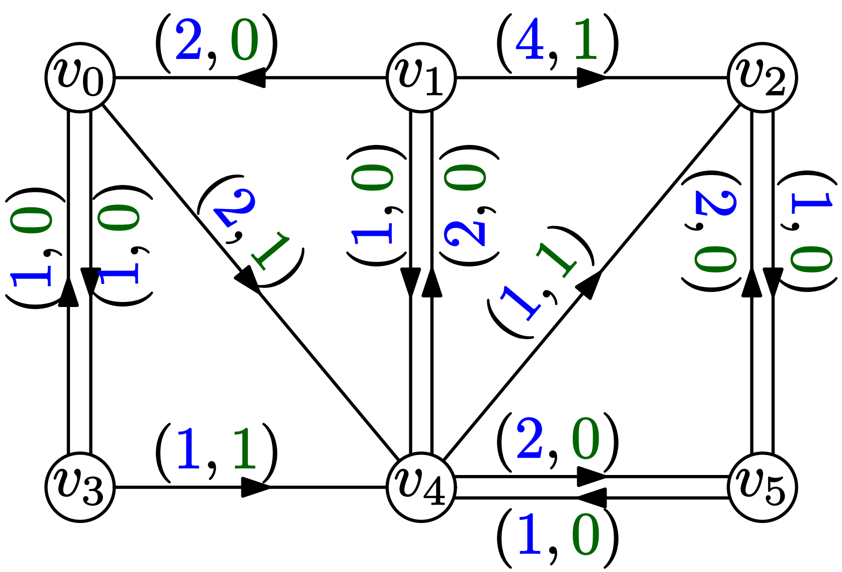




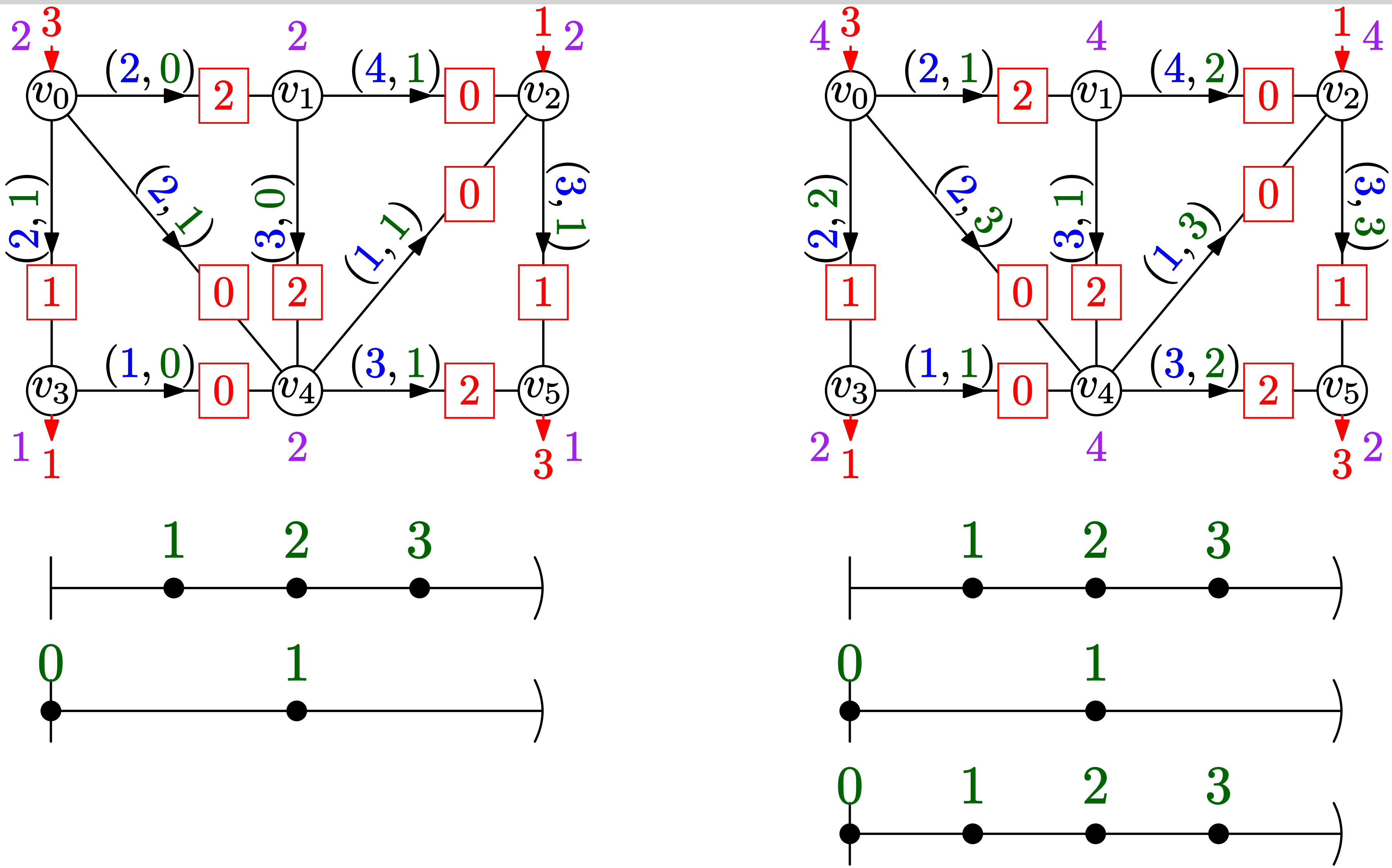
費用スケーリング法：例 (7/12)



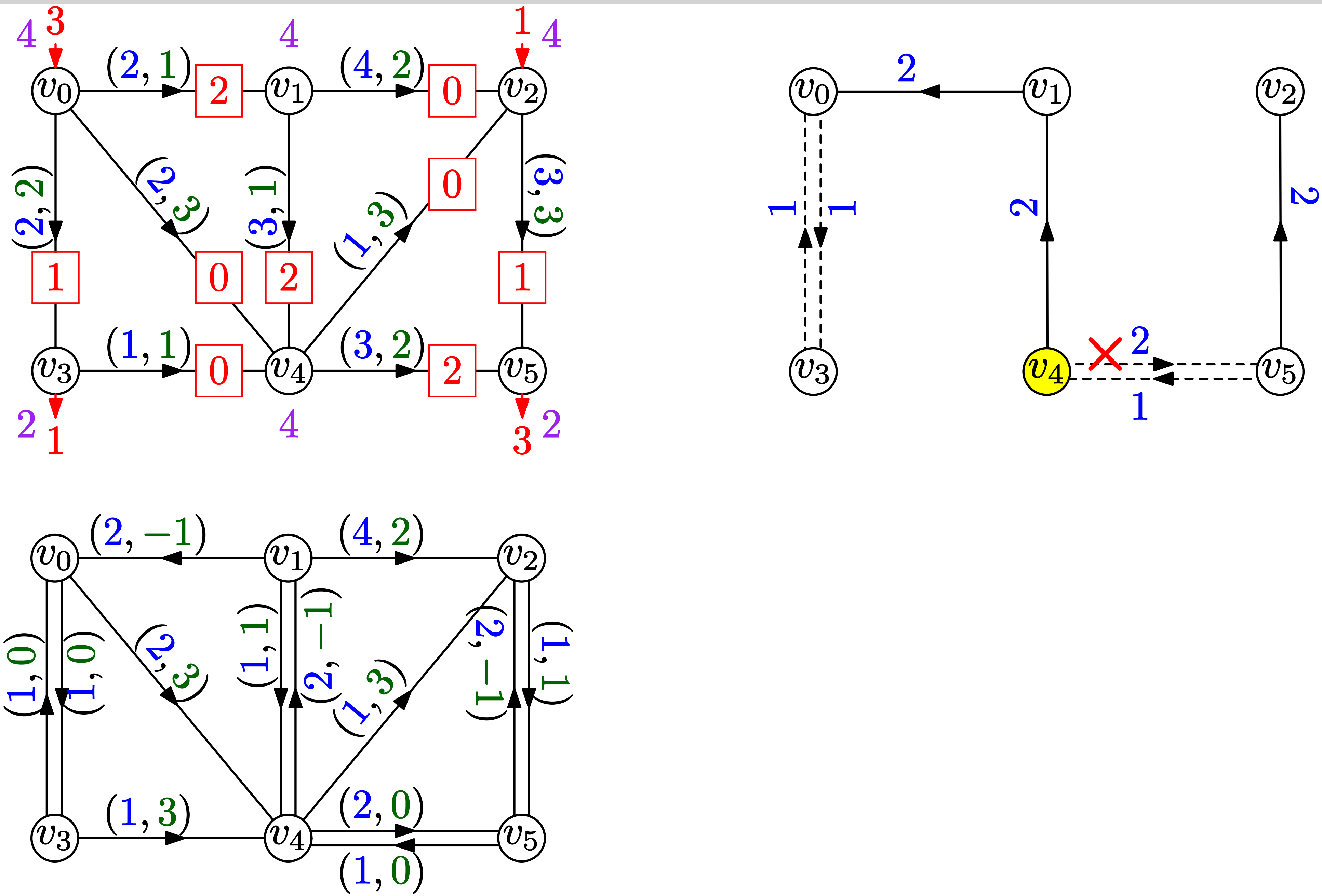




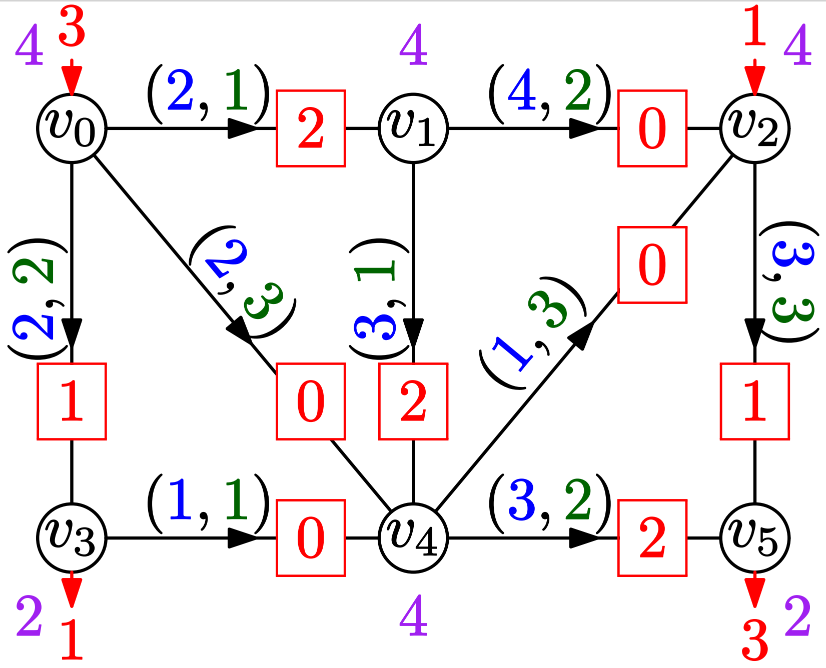
費用スケーリング：例 (8/12)

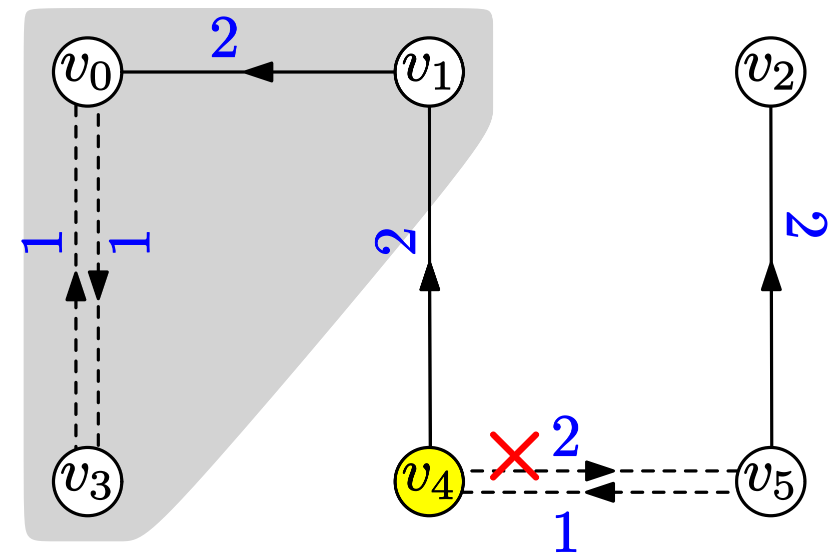


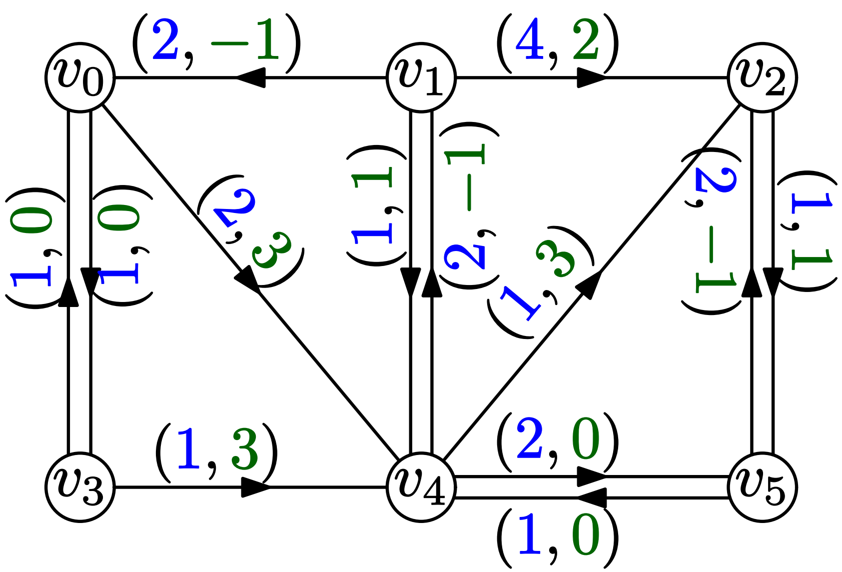
費用スケーリング法：例 (9/12)



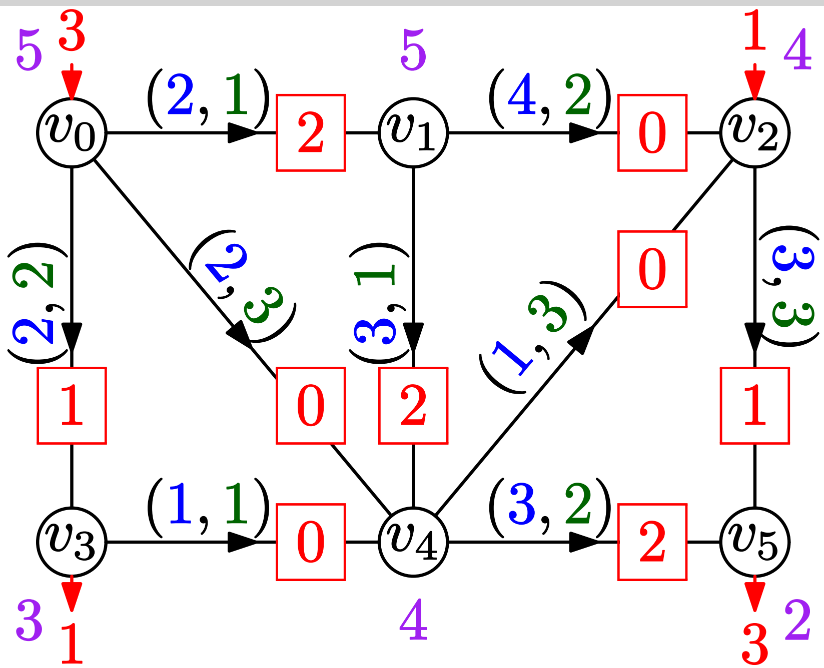
費用スケーリング法：例 (9/12)

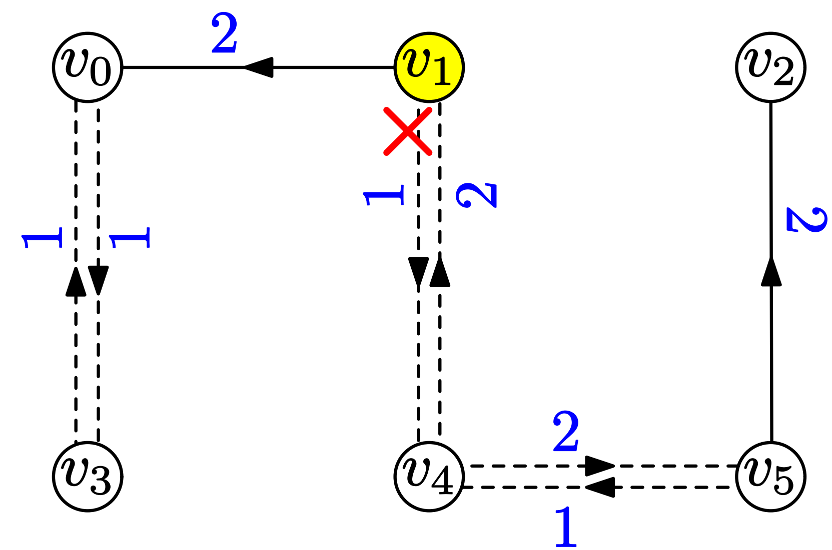


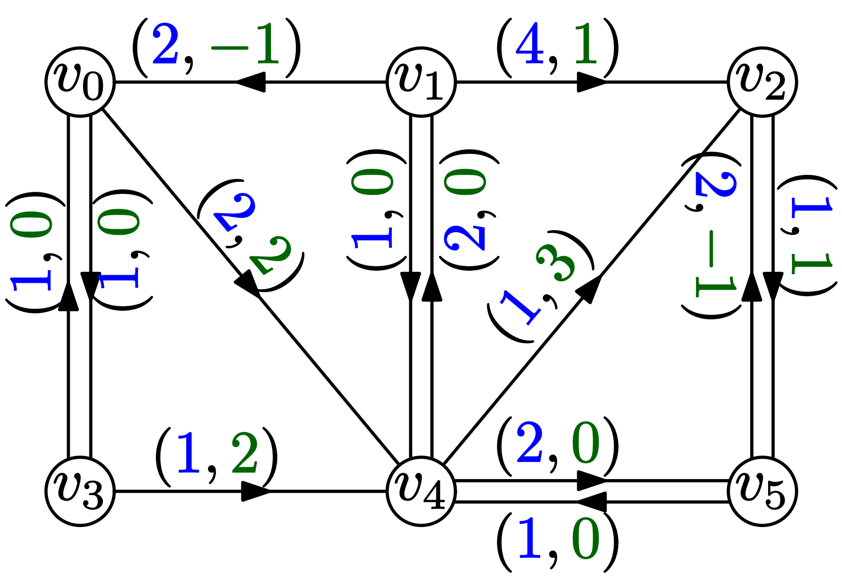




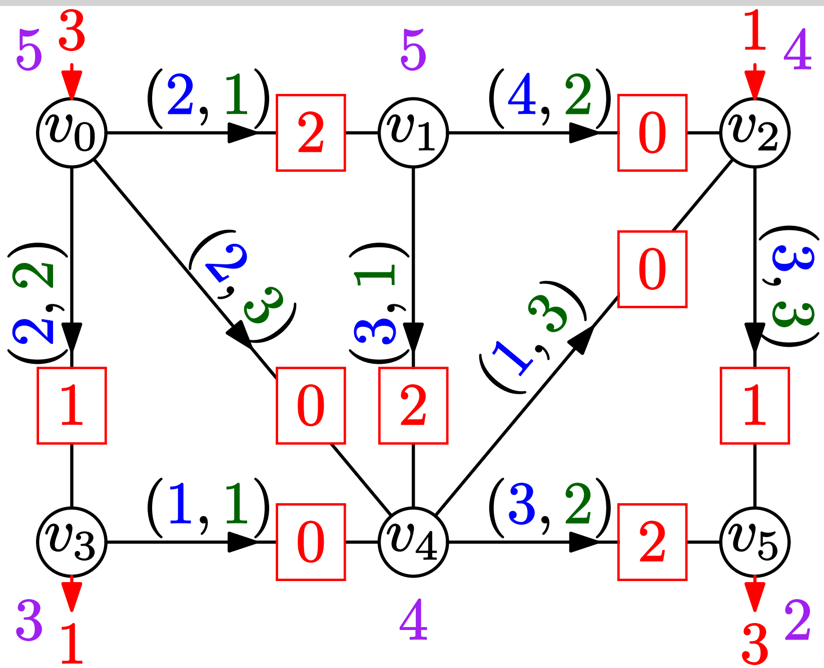
費用スケーリング法：例 (10/12)

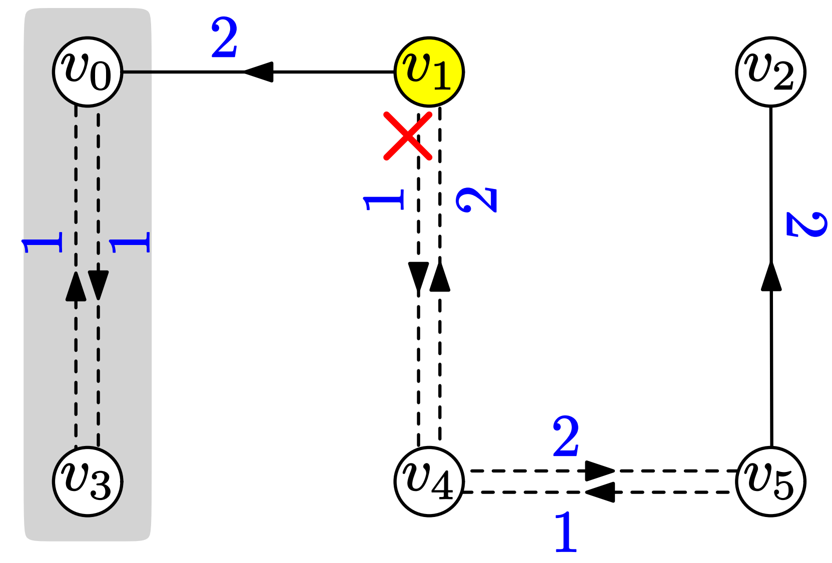


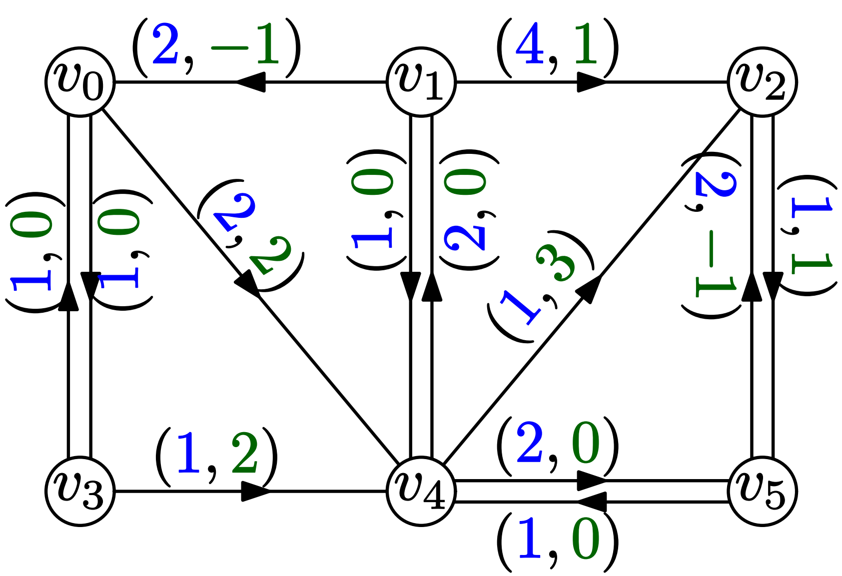




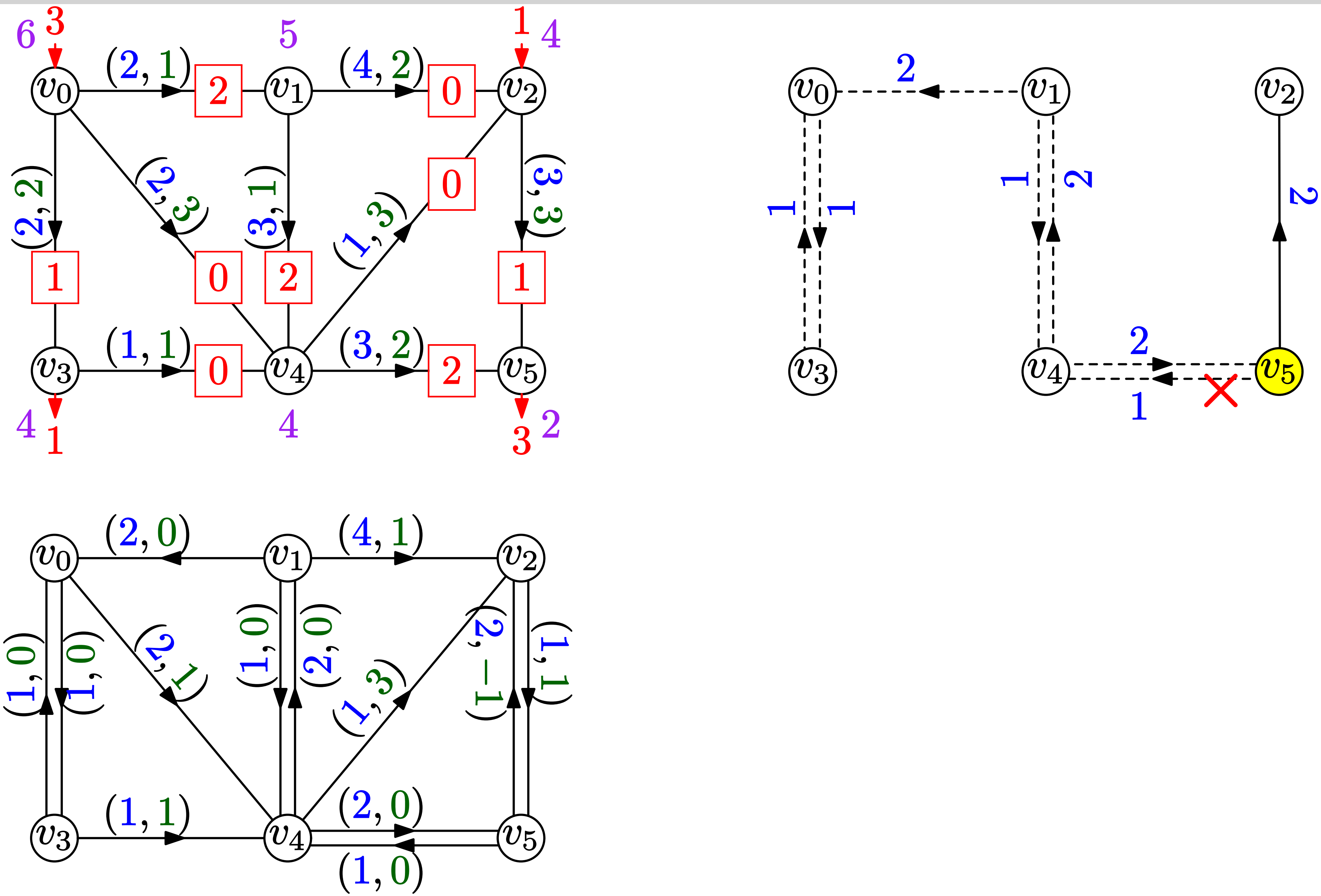
費用スケーリング法：例 (10/12)



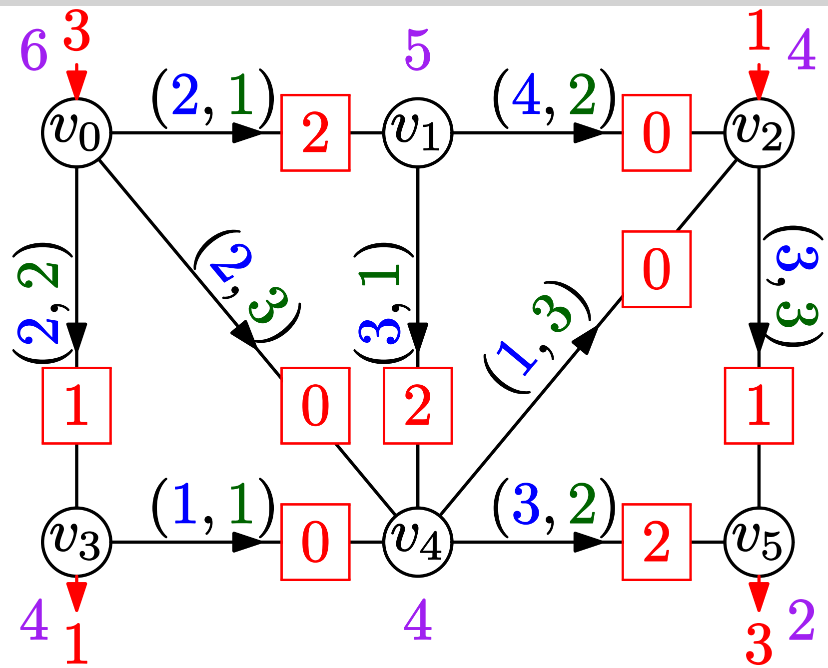


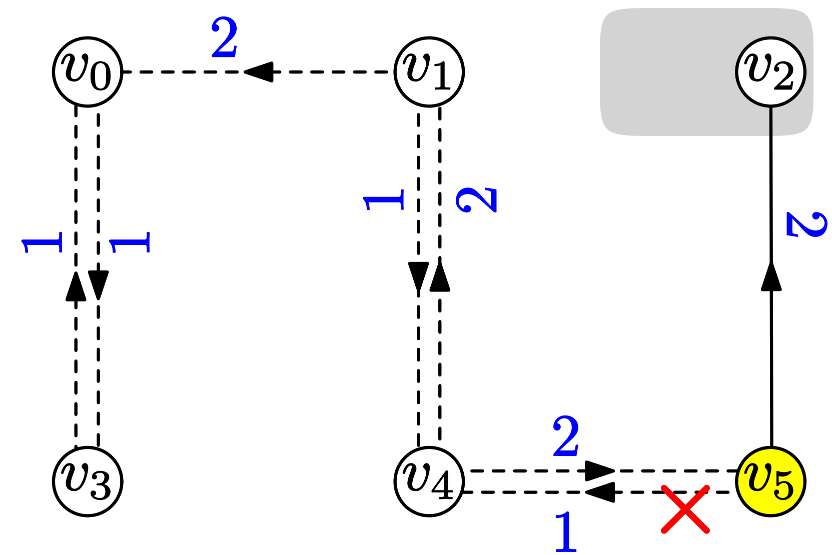


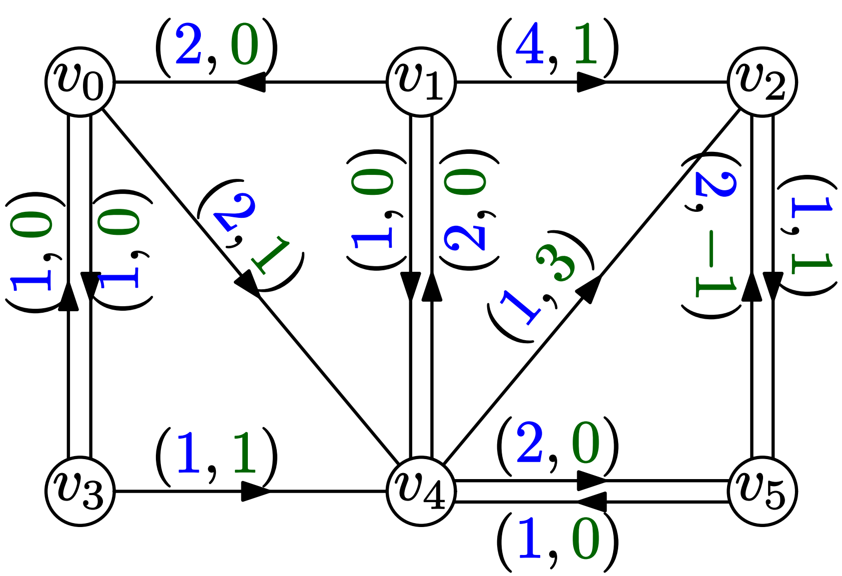
費用スケーリング法：例 (11/12)



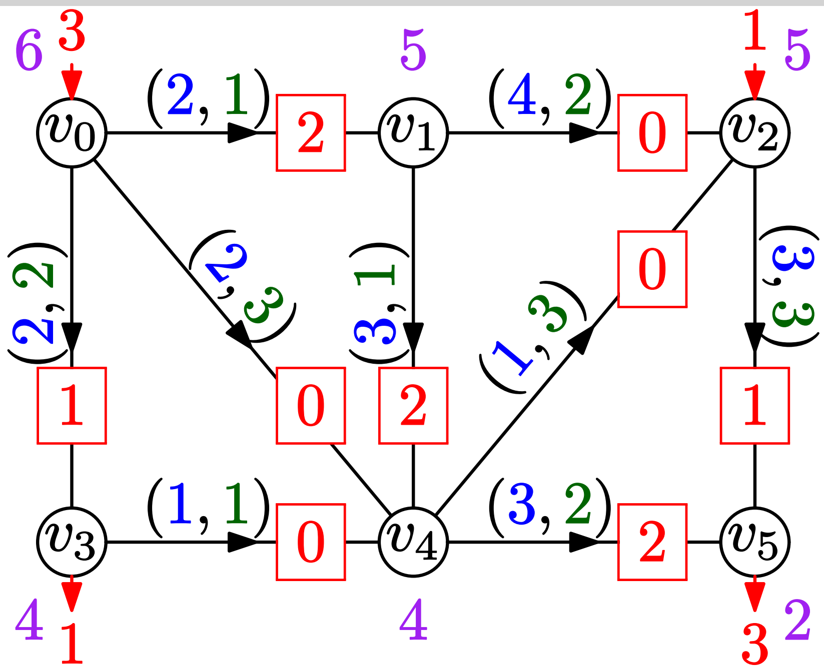
費用スケーリング法：例 (11/12)

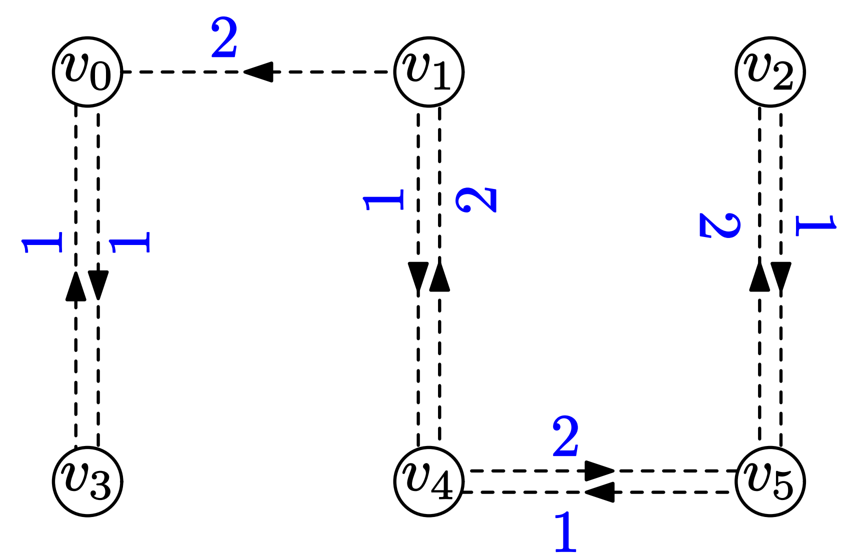


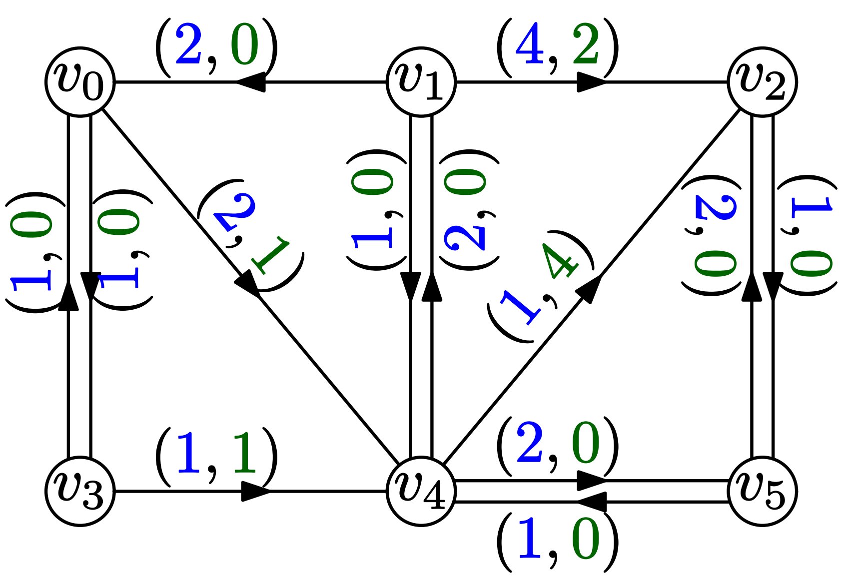




費用スケーリング法：例 (12/12)







費用スケーリング法

アルゴリズム：費用スケーリング法

- 初期化：b-流 f_0，ポテンシャル $p_0 = 0$,
  $$K = \lfloor 1 + \log_2 C \rfloor$$
- 反復：$k = 1, 2, \ldots, K$ に対して，以下を実行
  1. 初期流 f_{k-1}，初期ポテンシャル $2p_{k-1}$,
     費用 $c_k(a) = \lfloor c(a)/2^{K-k} \rfloor$ として，主双対法を実行
  2. 結果の b-流を f_k，ポテンシャルを p_k とする
- f_K を出力

反復における不変条件

$k = i$ の反復終了時

$$\underline{((c_i)_{f_i})}_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \qquad \forall\, uv \in A_{f_i}$$

費用 c_i，流 f_i に対する補助ネットワークの費用

$k = i{+}1$ の反復開始時

$$2c_i \leq c_{i+1} \leq 2c_i + 1$$

$$\therefore\ -2c_i \geq -c_{i+1} \geq -2c_i - 1$$

$$\begin{aligned}
&((c_{i+1})_{f_i})_{uv} - 2p_u + 2p_v \\
&\geq 2((c_i)_{f_i})_{uv} - 1 - 2p_u + 2p_v \\
&\geq 2[((c_i)_{f_i})_{uv} - p_u + p_v] - 1 \\
&\geq -1
\end{aligned}$$

反復における不変条件

$k = i$ の反復終了時

$$\underline{((c_i)_{f_i})}_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \qquad \forall\, uv \in A_{f_i}$$

費用 c_i，流 f_i に対する補助ネットワークの費用

$k = i{+}1$ の反復開始時

$$2c_i \leq c_{i+1} \leq 2c_i + 1$$

$$\therefore\ -2c_i \geq -c_{i+1} \geq -2c_i - 1$$

$$\begin{aligned}
&((c_{i+1})_{f_i})_{uv} - 2p_u + 2p_v \\
&\geq 2((c_i)_{f_i})_{uv} - 1 - 2p_u + 2p_v \\
&\geq 2[((c_i)_{f_i})_{uv} - p_u + p_v] - 1 \\
&\geq -1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{帰結}}$：各反復における，総ポテンシャル変化 $= O(n)$

費用スケーリング法：計算量

性質：費用スケーリング法の計算量

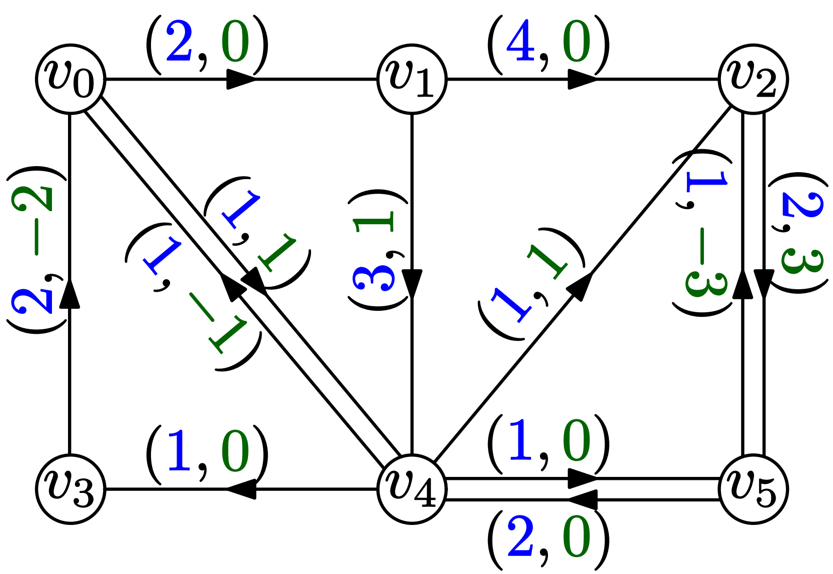
費用が整数 $\Rightarrow$
費用スケーリング法の計算量は $O(n(\log C) \cdot \mathrm{MF})$

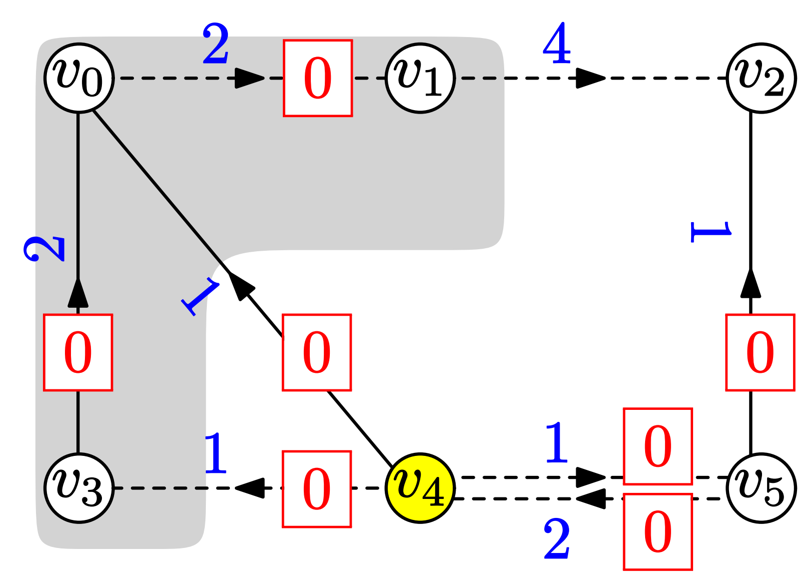
$$C = \max_{a \in A} c(a)$$

$\mathrm{MF} =$ 最大流の計算量

これは弱多項式時間アルゴリズムの計算量

1. 主双対法：計算量
2. 主双対法に対する費用スケーリング法
3. **全体のまとめ**





全体のまとめ

最小費用流問題

↓ 線形計画法

最適性条件 ⟶ アルゴリズム

- 簡約費用最適性条件
- 負閉路最適性条件
- 正カット最適性条件

- 逐次最短路法，主双対法
- 負閉路消去法
- 正カット消去法

重要な視点

- 数学原理 から アルゴリズム が導出される
- 数学原理の使い方 には 多様性 がある