離散最適化基礎論
第 11 回
最小費用流問題：正カット消去法

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 12 月 26 日

最終更新：2023 年 12 月 29 日　16:49

スケジュール (前半)

1. 最大流と最小費用流：定義 (10/3)
2. 最大流問題：増加道法 (10/10)

＊ 休み (10/17)

3. 線形計画法の復習 (10/24)
4. 最大流問題：線形計画問題として (10/31)
5. 最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム (11/7)
6. 最大流問題：容量スケーリング法 (11/14)
7. 最大流問題：Push-Relabel 法 (概要) (11/21)
8. 最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価) (11/28)

スケジュール (後半)

*	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
*	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
*	休み	(1/30)

[復習] b-流：定義

<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$

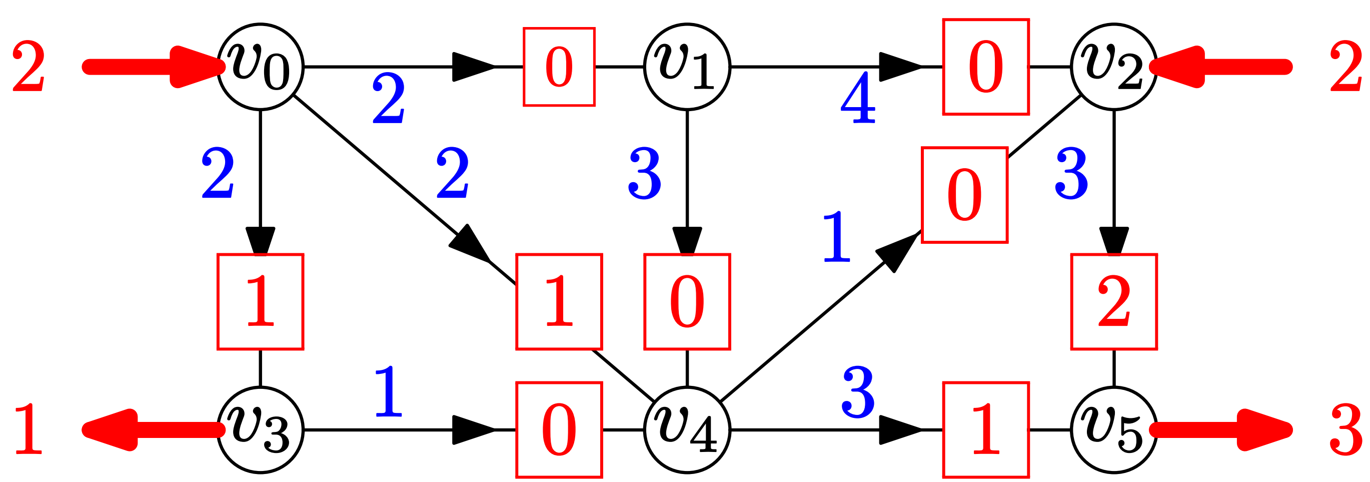
$b\colon V \to \mathbb{R}$ (負の値をとってもよい)

定義：b-流 (b-flow)

b-流 とは 次を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して，$0 \le f(a) \le u(a)$
2. 任意の頂点 $v \in V$ に対して，

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$



$b(v_0) = 2,$
$b(v_1) = 0,$
$b(v_2) = 2,$
$b(v_3) = -1,$
$b(v_4) = 0,$
$b(v_5) = -3$

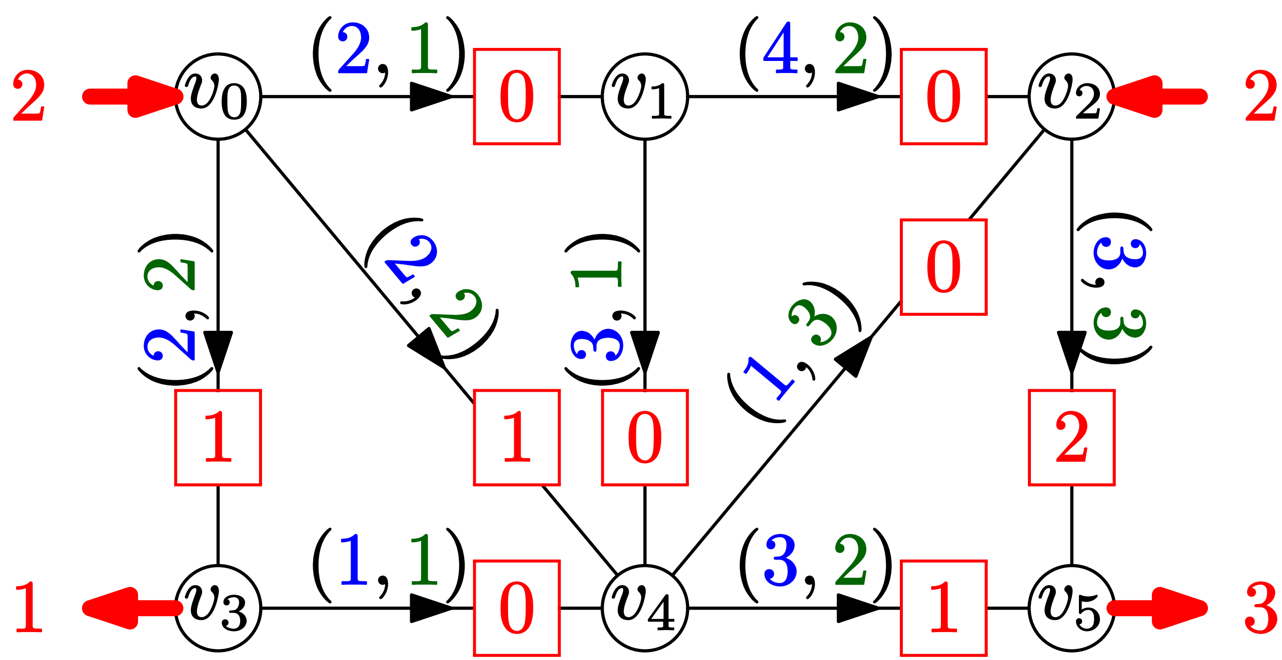
[復習] b-流の費用：定義

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$
弧費用関数 $c\colon A\to\mathbb{R}_+$，$b\colon V\to\mathbb{R}$，b-流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

定義：b-流の費用

b-流 f の**費用**を次の式で定義する

$$\mathrm{cost}(f)=\sum_{a\in A}c(a)f(a)$$



$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(f)&=0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2\\&\quad+0\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 3\\&\quad+0\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 2\\&=12\end{aligned}$$

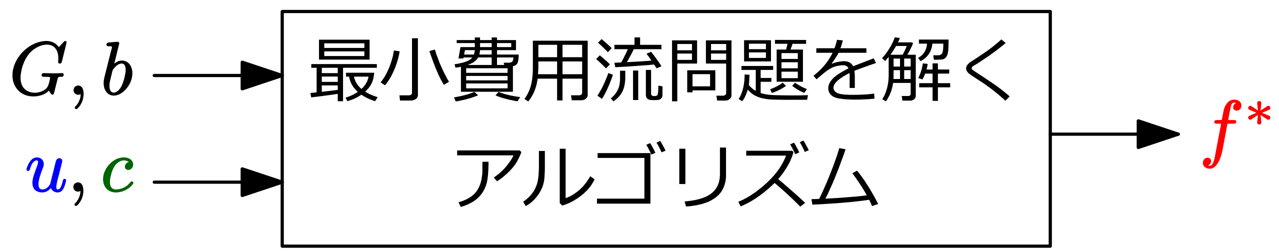
[復習] 最小費用流問題：定義

定義：最小費用流問題 (minimum-cost flow problem)

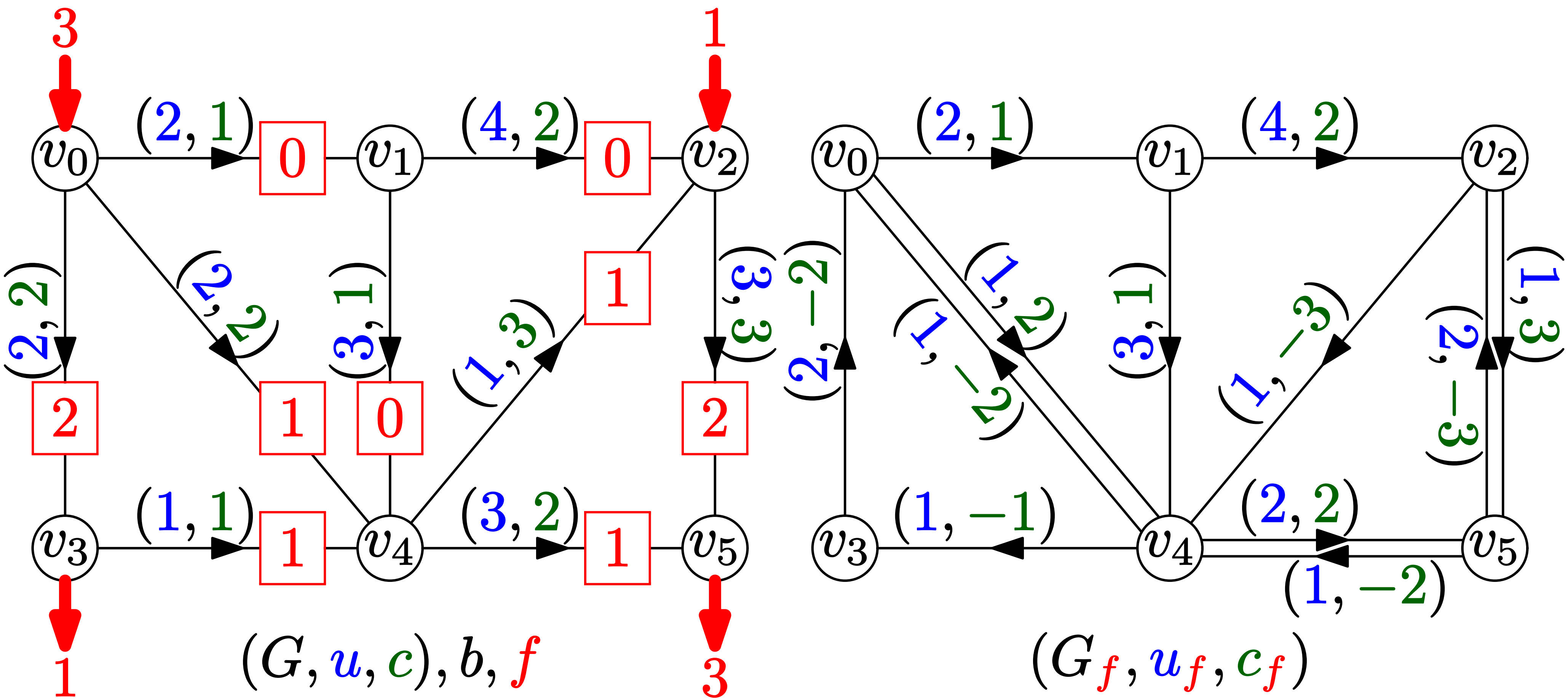
入力
- 有向グラフ $G = (V, A)$，関数 $b \colon V \to \mathbb{R}$
- 弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$

出力
- ネットワーク (G, u, c) に対する最小費用 b-流 f^*

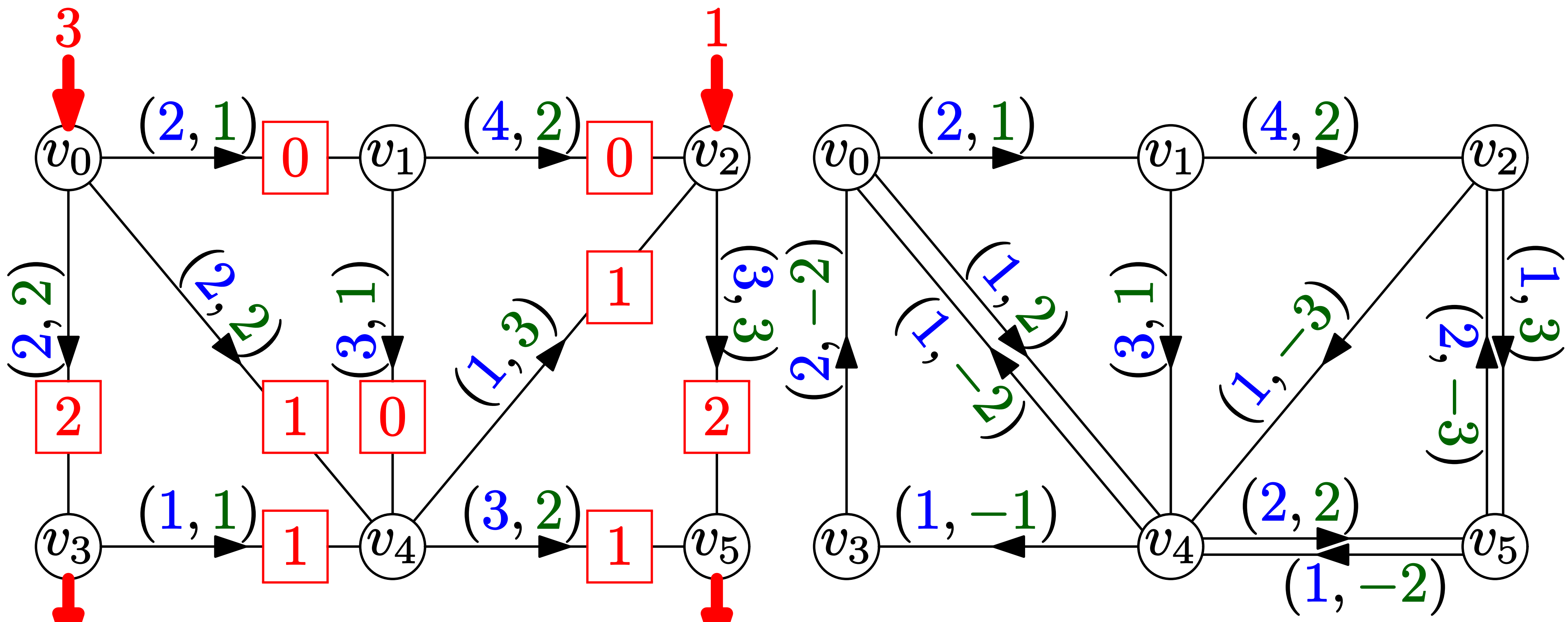
任意の b-流 f に対して，$\mathrm{cost}(f^*) \leq \mathrm{cost}(f)$



[復習] 補助ネットワーク：例

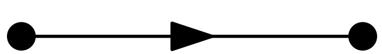


[復習] 補助ネットワーク：例



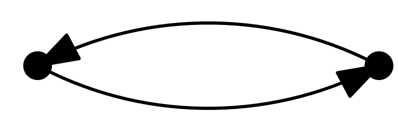
$(G, u, c), b, f$ $\qquad$ (G_f, u_f, c_f)

流 $\boxed{f(a)}$



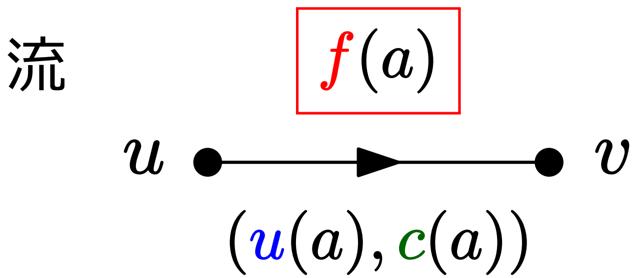
(容量，費用) $(u(a), c(a))$

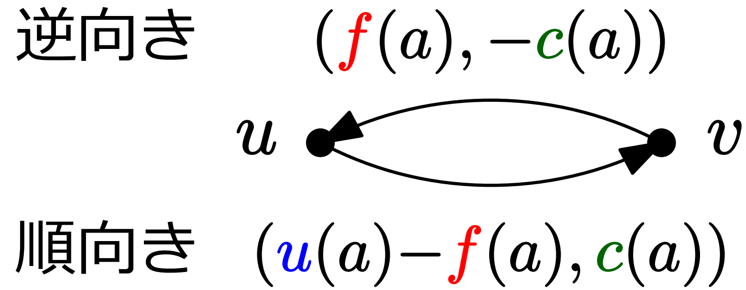
逆向き（容量，費用） $(f(a), -c(a))$



順向き（容量，費用） $(u(a)-f(a), c(a))$

[復習] 補助ネットワークと相補性条件





順向きの弧 uv がある $\Leftrightarrow u_{uv} - f_{uv} > 0$

$\Rightarrow z_{uv} = 0$

逆向きの弧 vu がある $\Leftrightarrow f_{uv} > 0$

$\Rightarrow c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v = 0$

相補性条件：

- $(u_a - f_a)z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

[復習] 簡約費用最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：簡約費用最適性条件 (Ford, Fulkerson ’62)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在

- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して，$c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

前回のまとめ と 今回の内容

最小費用流問題

最適性条件 ⟶ アルゴリズム

- 簡約費用最適性条件
- 負閉路最適性条件
- 正カット最適性条件

- 次回
- 負閉路消去法
- 今回

今回の内容

- 最適性条件：正カット最適性条件
- アルゴリズム：正カット消去法

正カット消去法と相補性定理

相補性定理：f, y, z が最適解

$\Leftrightarrow$ 主許容性 $+$ 双対許容性 $+$ 相補性条件

正カット消去法に対する視点

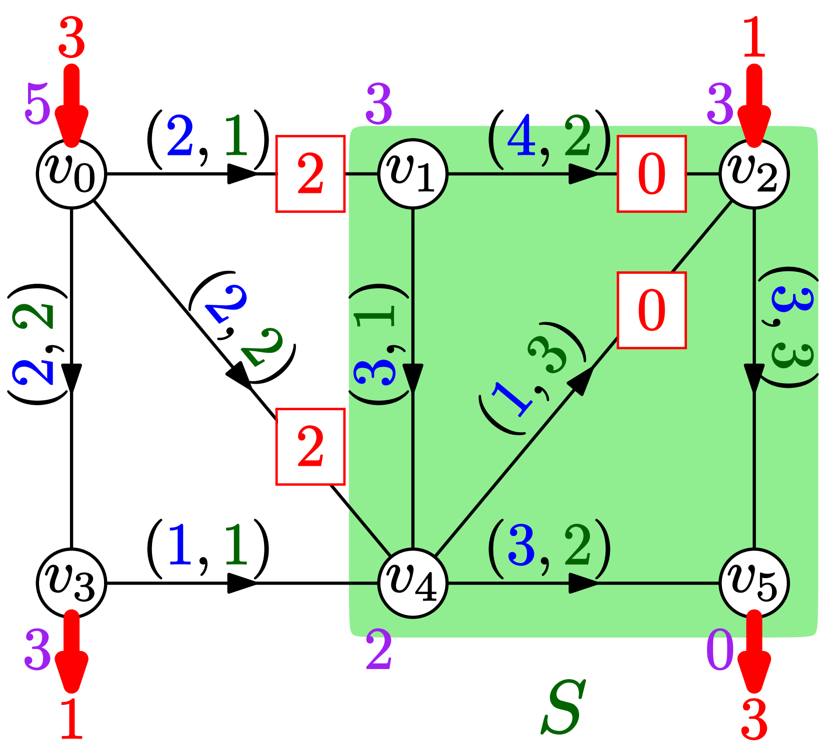
双対許容性

を満たしたまま **主許容性** を満たしに行く

相補性

$$\begin{tikzcd}
(\text{主非許容解})\ f \arrow[r, "\text{更新}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{相補性}"'] & f\ (\text{主許容解}) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{相補性}"] \\
(\text{双対許容解})\ \text{ポテンシャル}\ p \arrow[r, "\text{更新}"] & p\ (\text{双対許容解})
\end{tikzcd}$$

1. **最適ポテンシャル**
2. 正カット最適性条件
3. 正カット消去法



簡約費用最適性条件：別の書き方 (1/2)

性質：簡約費用最適性条件 (Ford, Fulkerson ’62)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p \colon V \to \mathbb{R}$ が存在
- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して, $c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

$uv \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき　$(\Leftrightarrow f_{uv} < u_{uv})$

$$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

$uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき　$(\Leftrightarrow f_{vu} > 0)$

$$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c_{vu} - p_u + p_v \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_{vu} - p_v + p_u \leq 0$$

性質：簡約費用最適性条件　別の書き方

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在
- 任意の弧 $uv \in A$ に対して,
  - $f_{uv} < u_{uv}$ ならば, $c_{uv} - p_u + p_v \geq 0$
  - $f_{uv} > 0$ ならば, $c_{uv} - p_u + p_v \leq 0$

$uv \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき　$(\Leftrightarrow f_{uv} < u_{uv})$

$$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \;\Leftrightarrow\; c_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

$uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき　$(\Leftrightarrow f_{vu} > 0)$

$$\begin{aligned}(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \;&\Leftrightarrow\; -c_{vu} - p_u + p_v \geq 0\\ &\Leftrightarrow\; c_{vu} - p_v + p_u \leq 0\end{aligned}$$

簡約費用最適性条件：別の書き方 (2/2)

性質：簡約費用最適性条件　別の書き方

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p \colon V \to \mathbb{R}$ が存在

- 任意の弧 $uv \in A$ に対して,
  - $f_{uv} < u_{uv}$ ならば，$c_{uv} - p_u + p_v \geq 0$
  - $f_{uv} > 0$ ならば，$c_{uv} - p_u + p_v \leq 0$

性質：簡約費用最適性条件　別の書き方 (2)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p \colon V \to \mathbb{R}$ が存在

- 任意の弧 $uv \in A$ に対して,
  - $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
  - $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
  - $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

最適ポテンシャル

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$

定義：最適ポテンシャル

$p\colon V \to \mathbb{R}$ が **最適ポテンシャル** であるとは
次を満たす b-流 f が存在すること

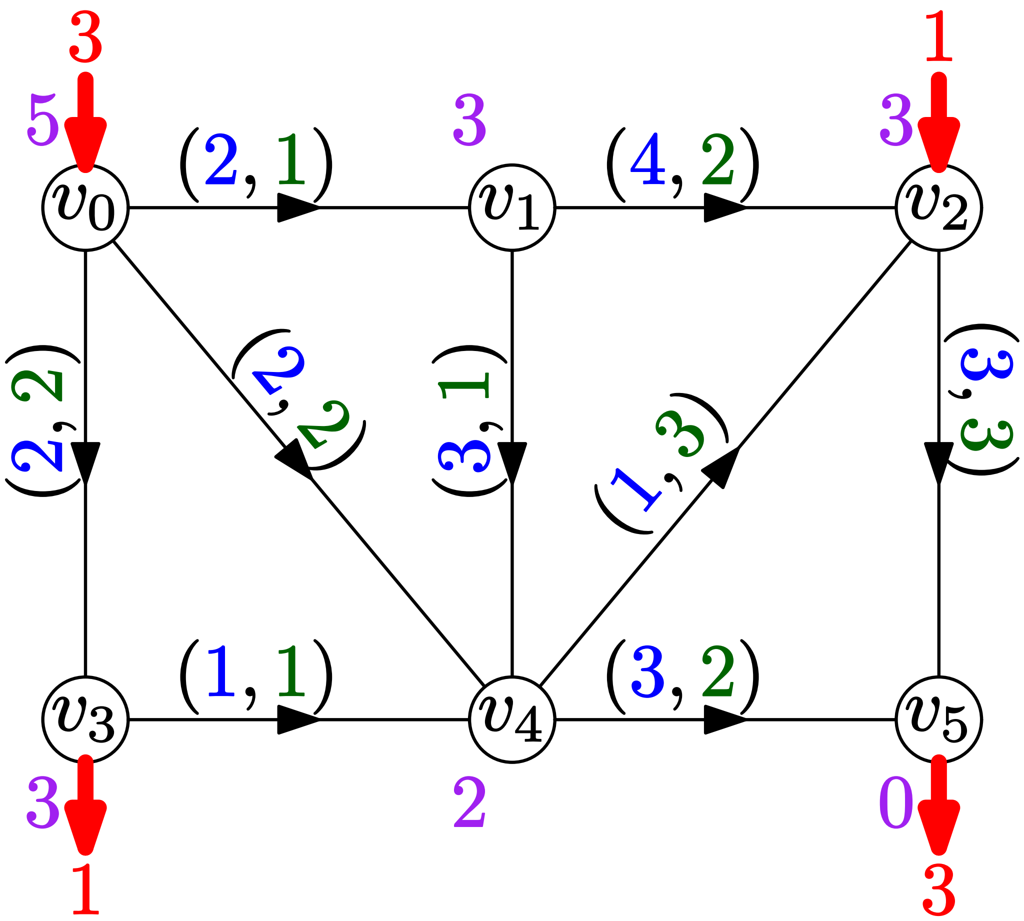
- 任意の弧 $uv \in A$ に対して，
  - $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
  - $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
  - $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

p が最適ポテンシャルであるとき，

この条件を満たす b-流 f は最小費用 b-流

($\because$ 簡約費用最適性条件)

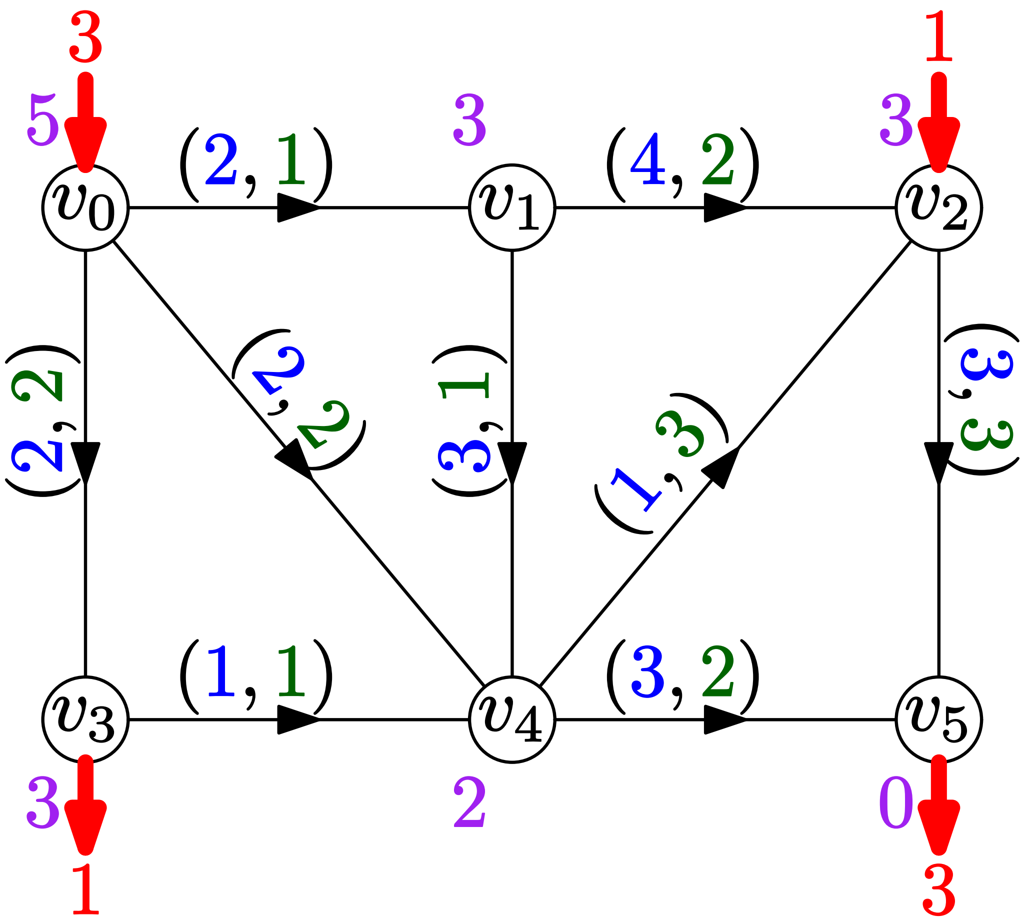
最適ポテンシャル：例 (1/2)

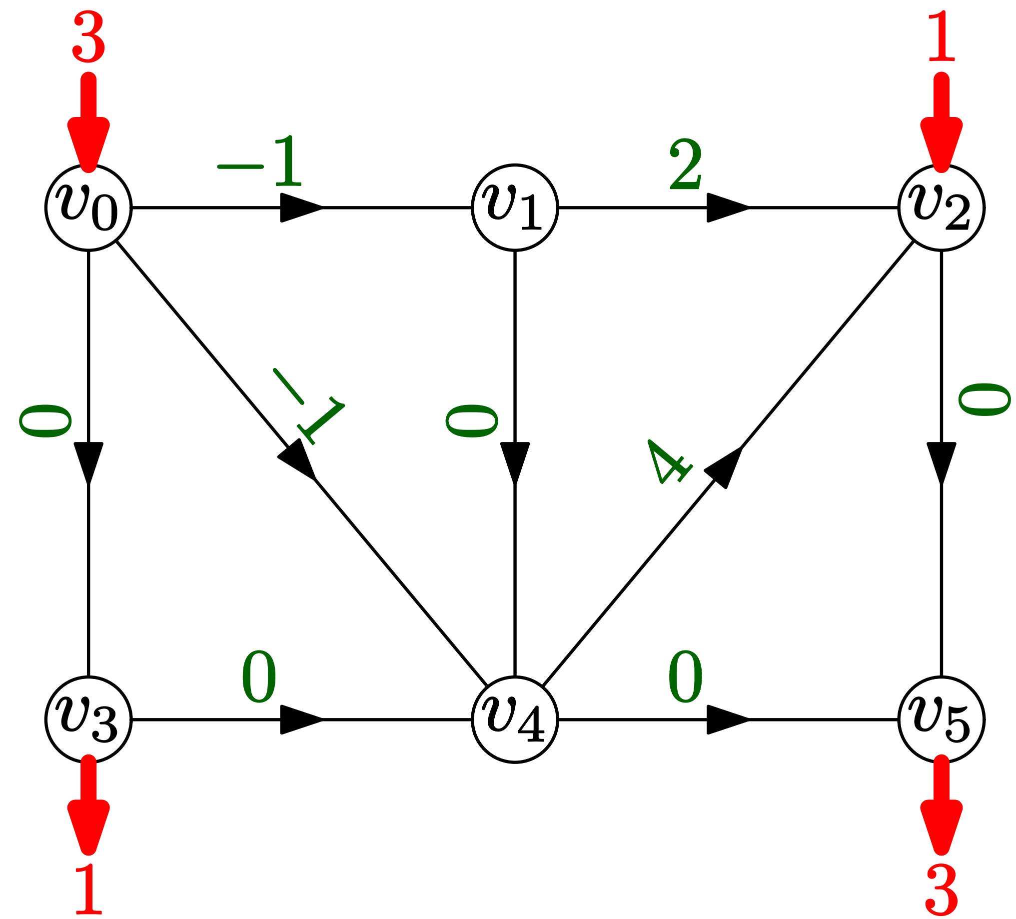


欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

最適ポテンシャル：例 (1/2)

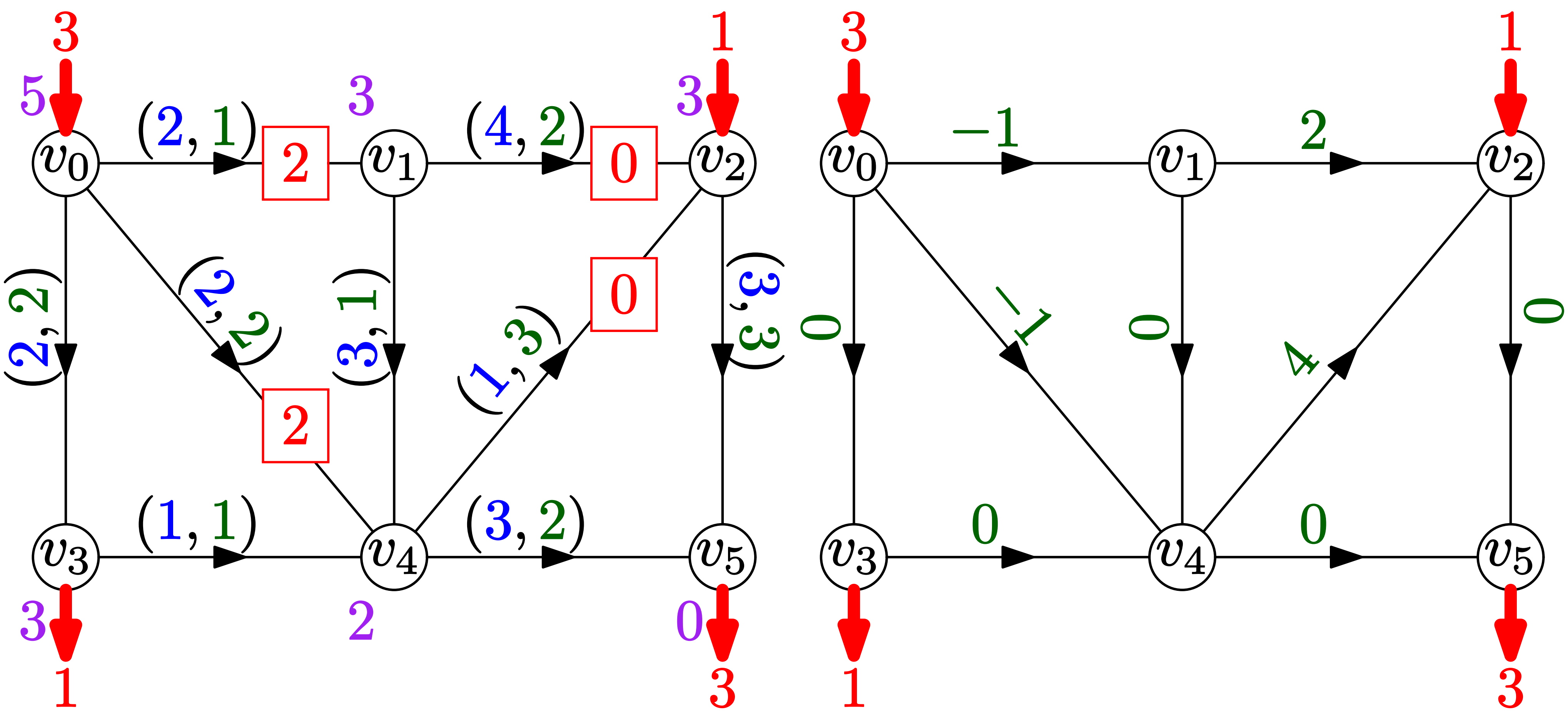




欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \le f_{uv} \le u_{uv}$

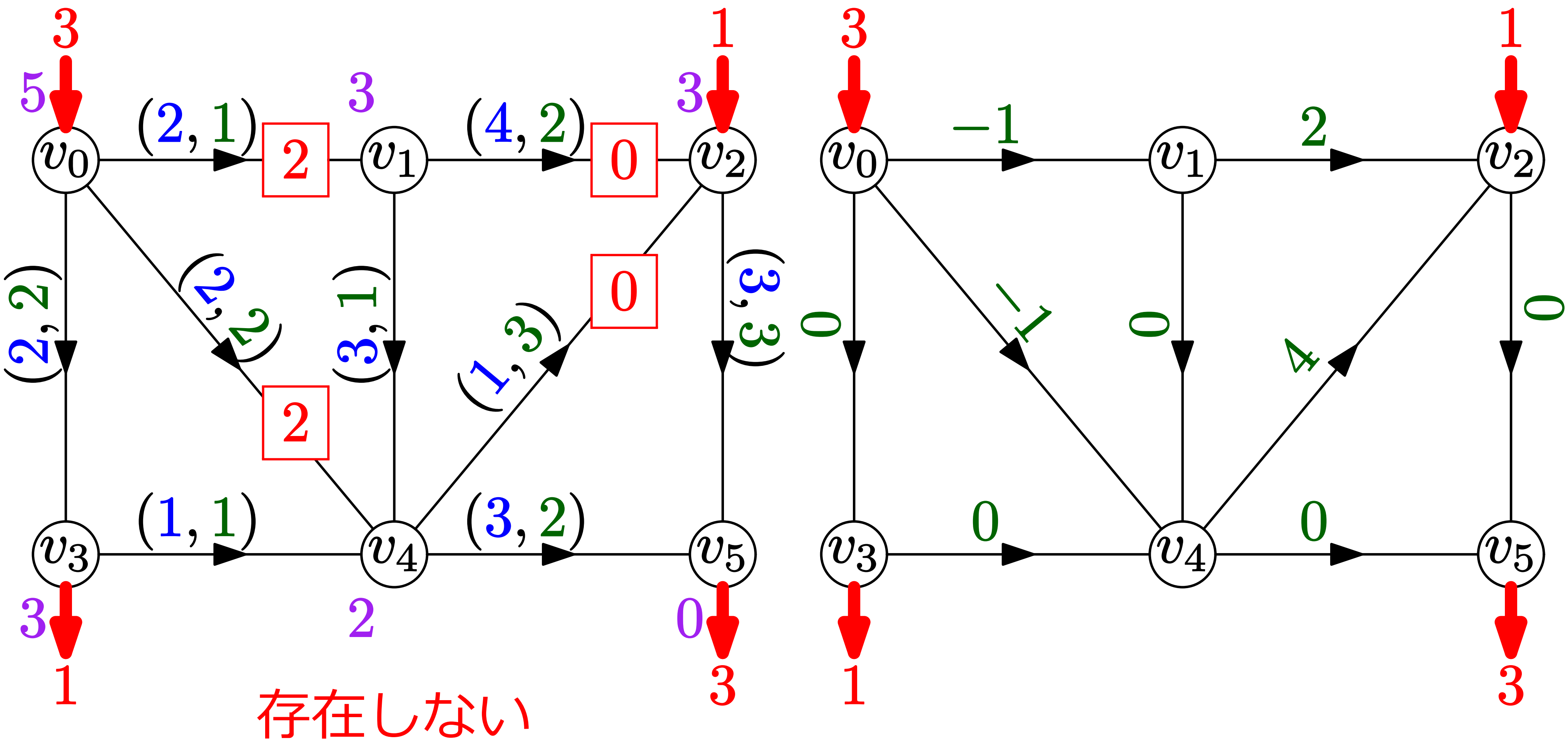
最適ポテンシャル：例 (1/2)



欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

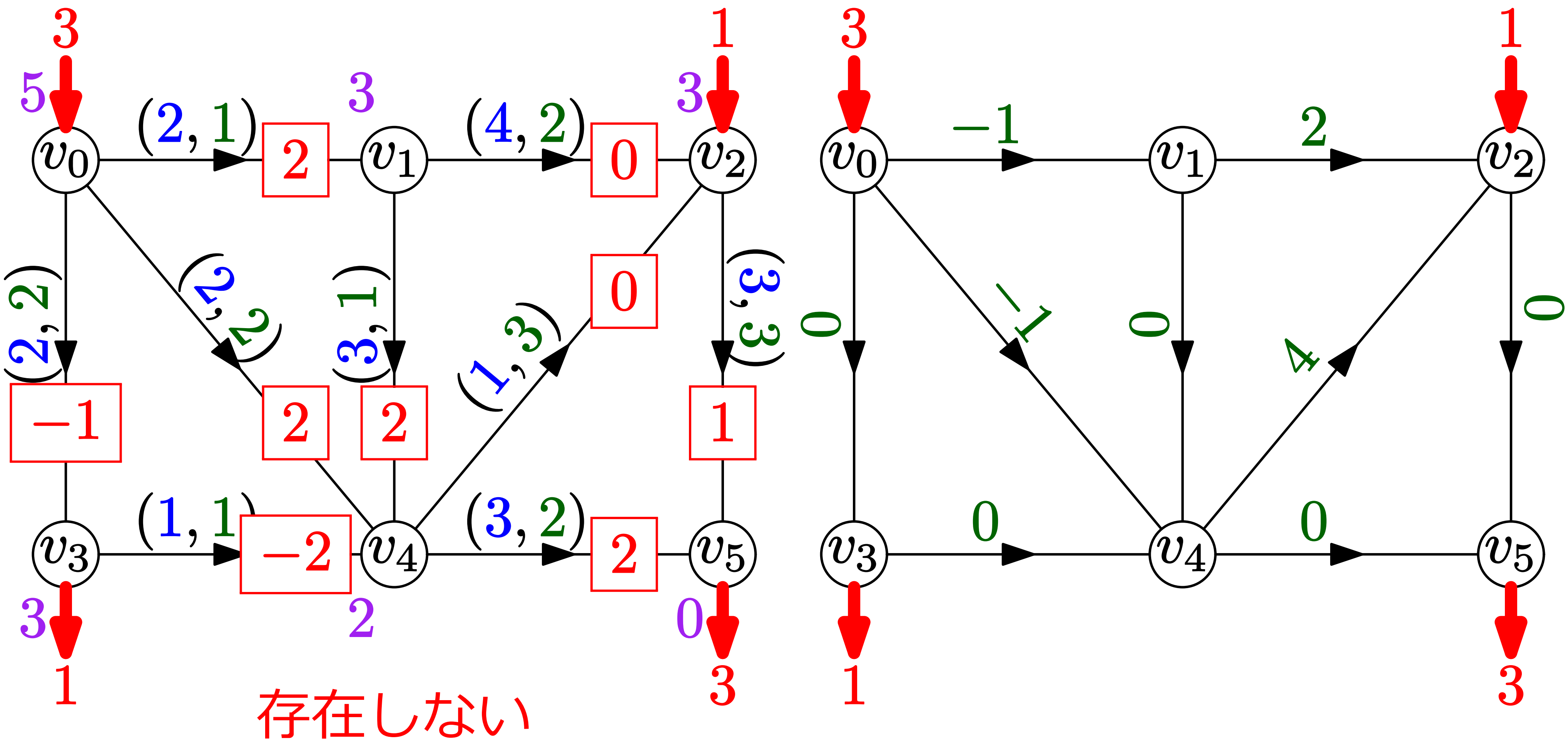
最適ポテンシャル：例 (1/2)



欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \le f_{uv} \le u_{uv}$

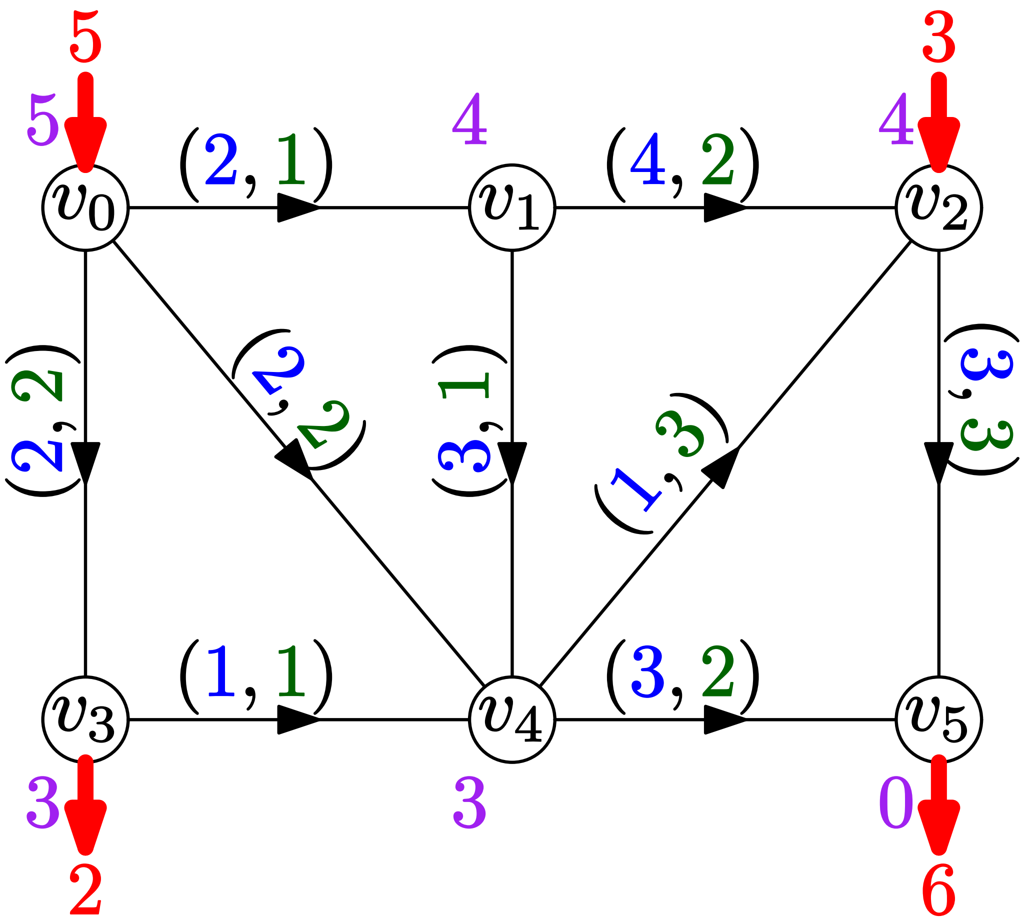
最適ポテンシャル：例 (1/2)



欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

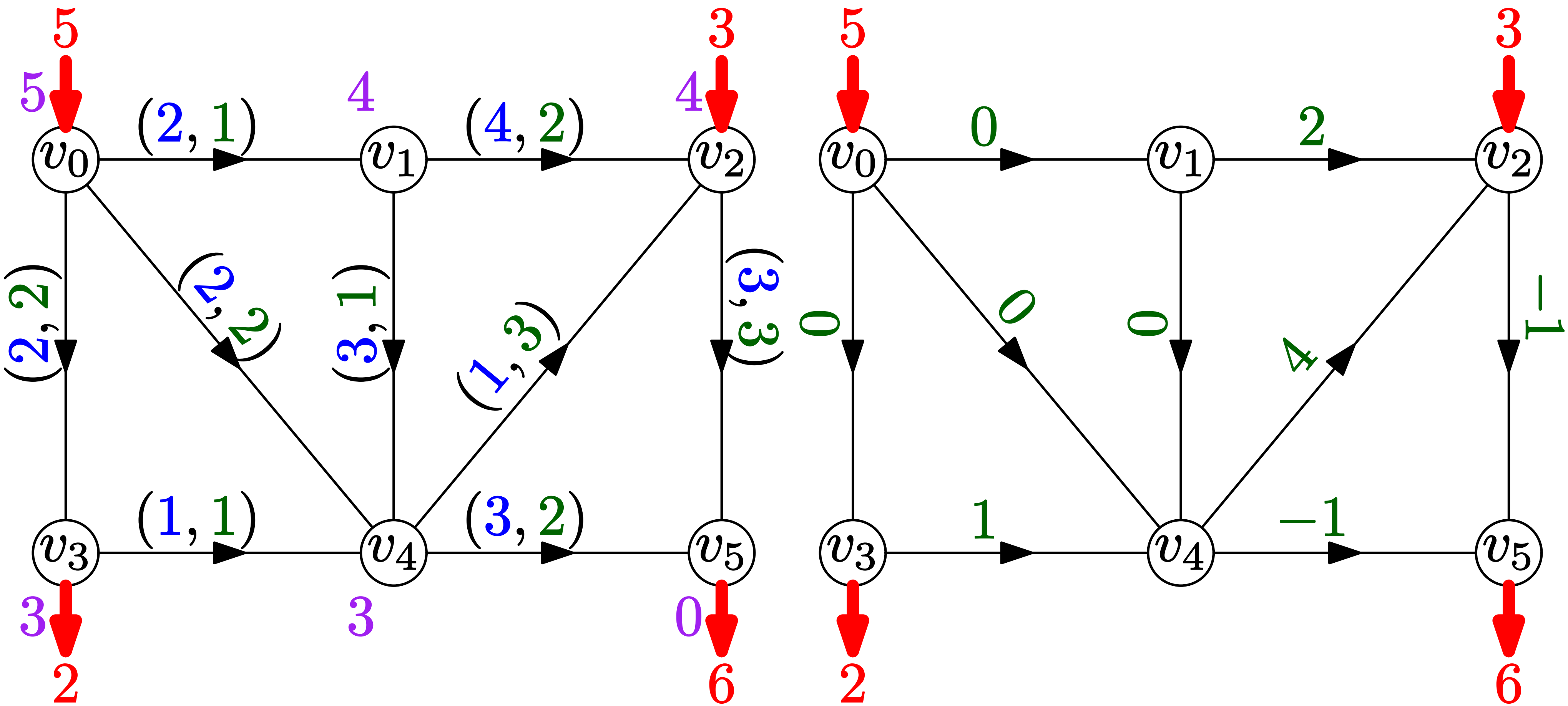
最適ポテンシャル：例 (2/2)



欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

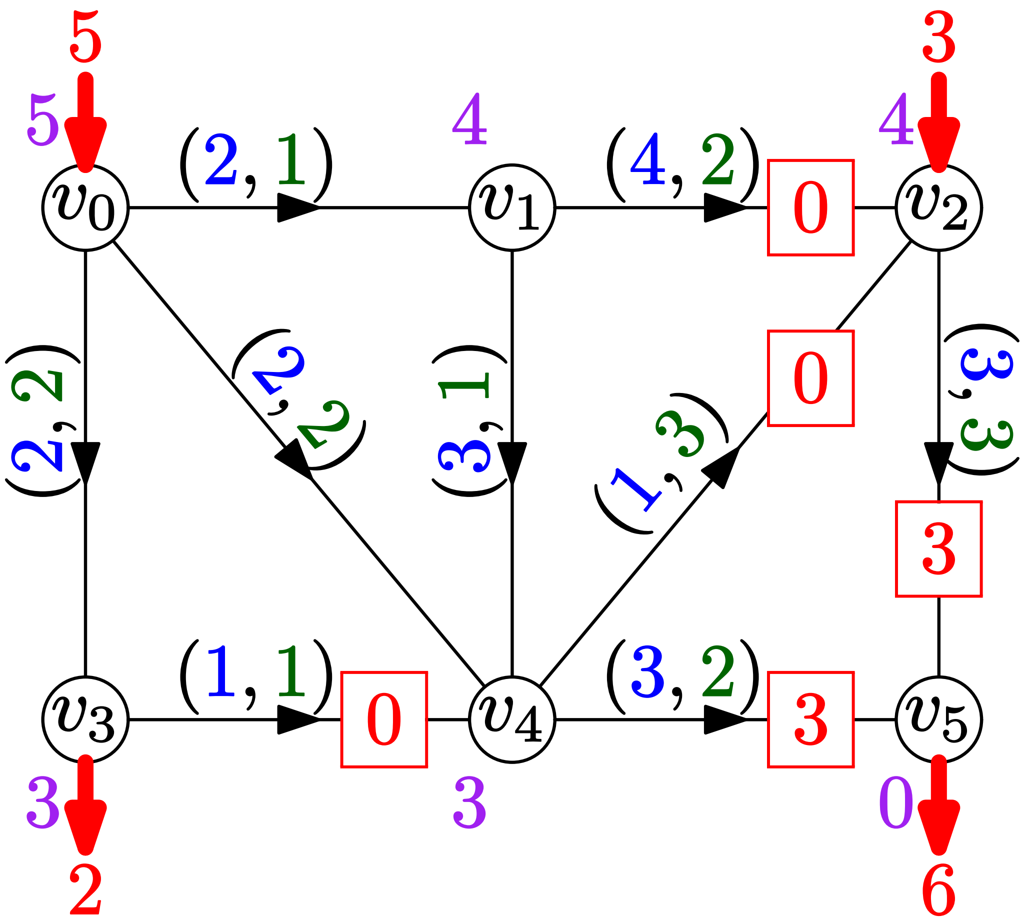
最適ポテンシャル：例 (2/2)

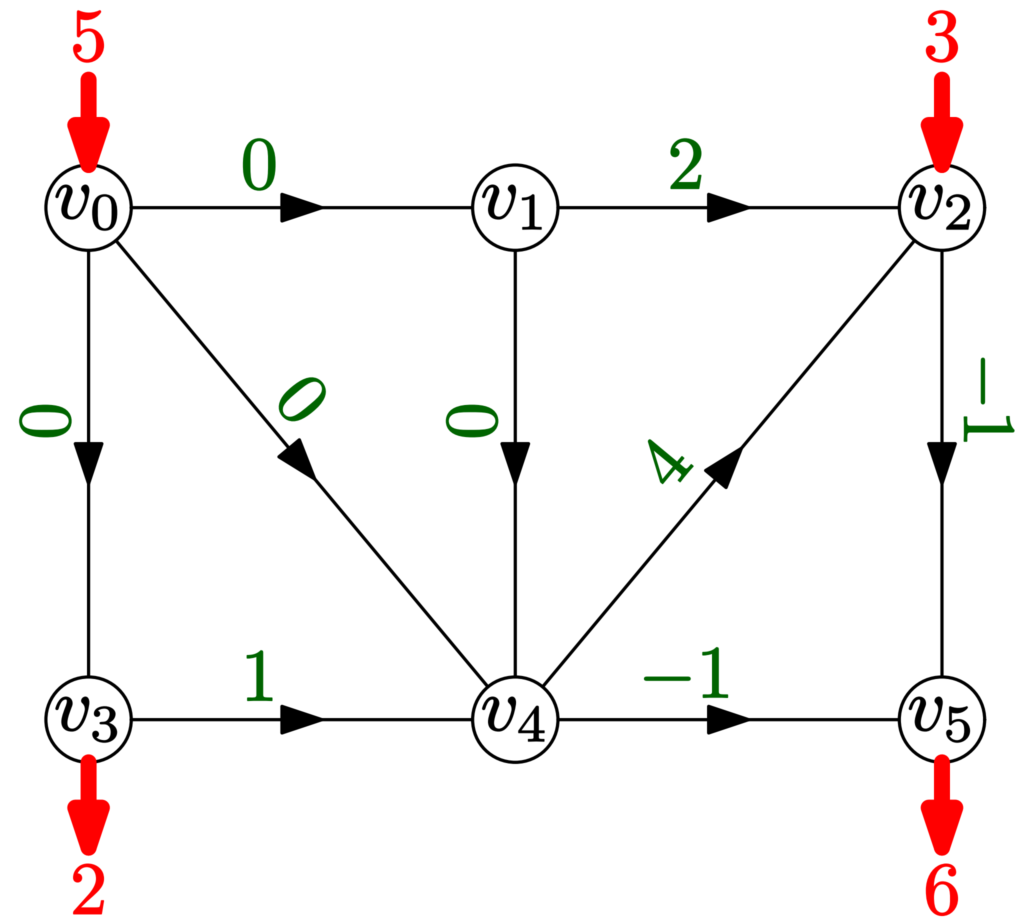


欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

最適ポテンシャル：例 (2/2)

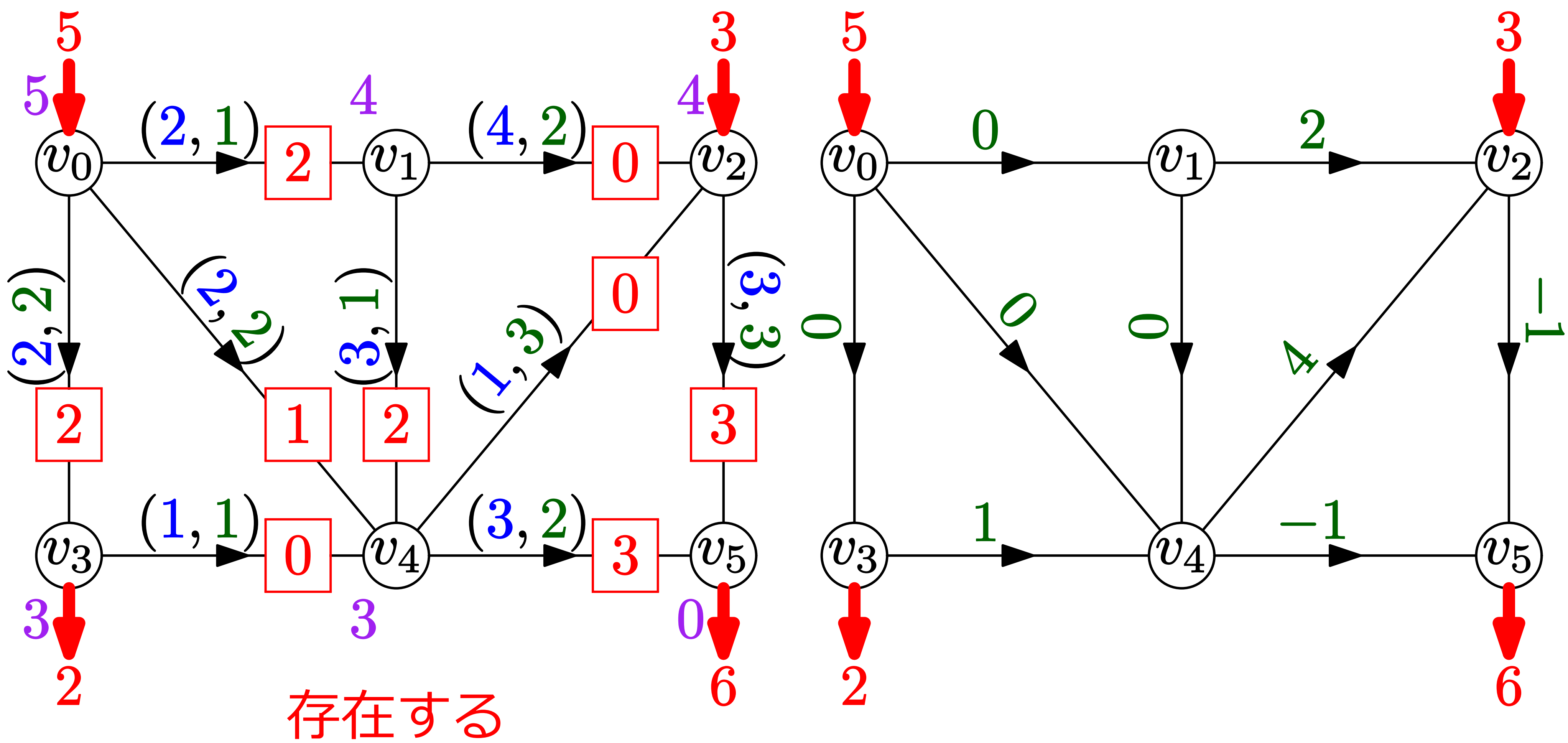




欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

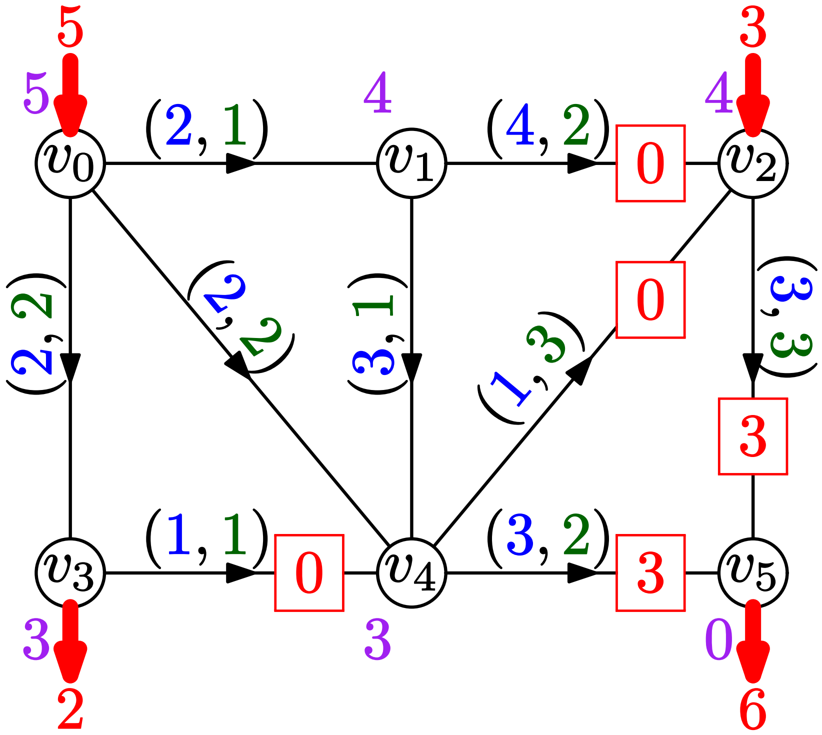
最適ポテンシャル：例 (2/2)



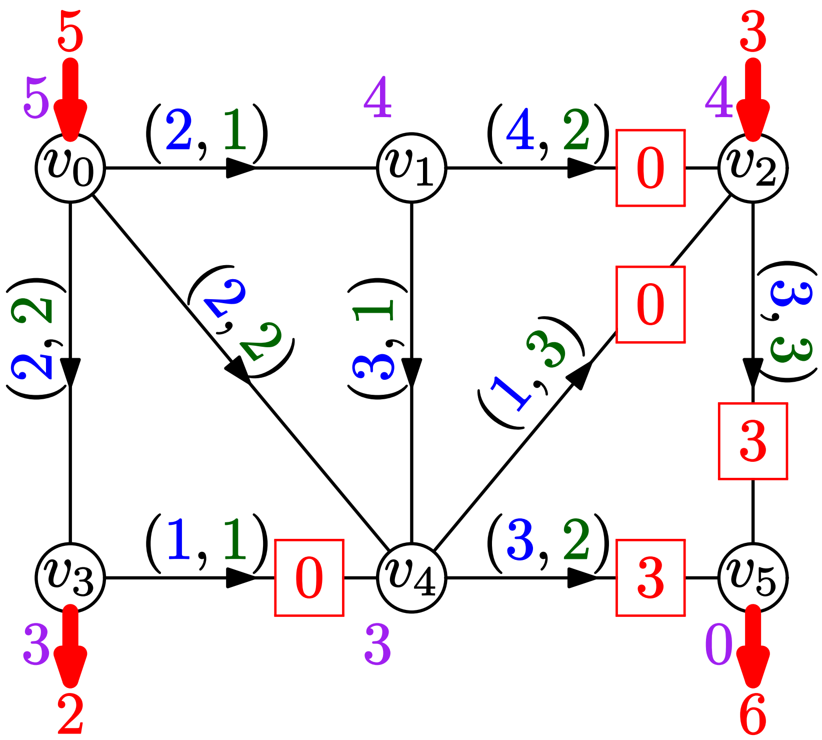
欲しい b-流 f の条件：任意の弧 $uv \in A$ に対して，

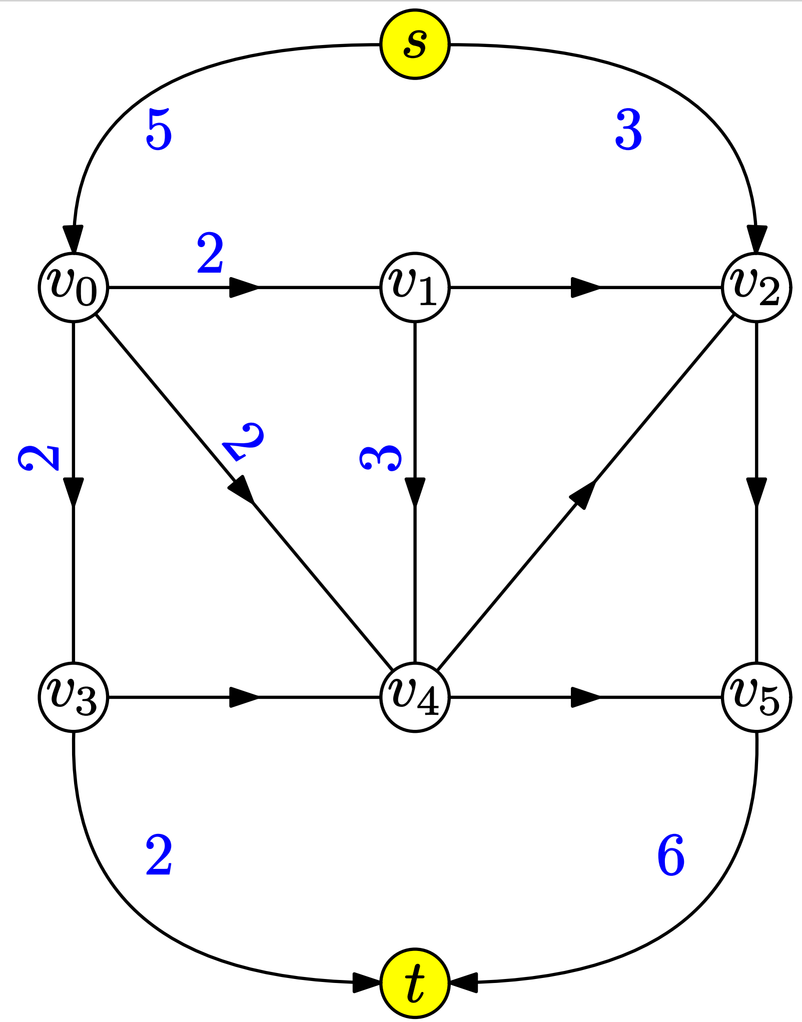
- $c_{uv} - p_u + p_v < 0$ ならば，$f_{uv} = u_{uv}$
- $c_{uv} - p_u + p_v > 0$ ならば，$f_{uv} = 0$
- $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ ならば，$0 \leq f_{uv} \leq u_{uv}$

最適ポテンシャル：確認法 (1/2)

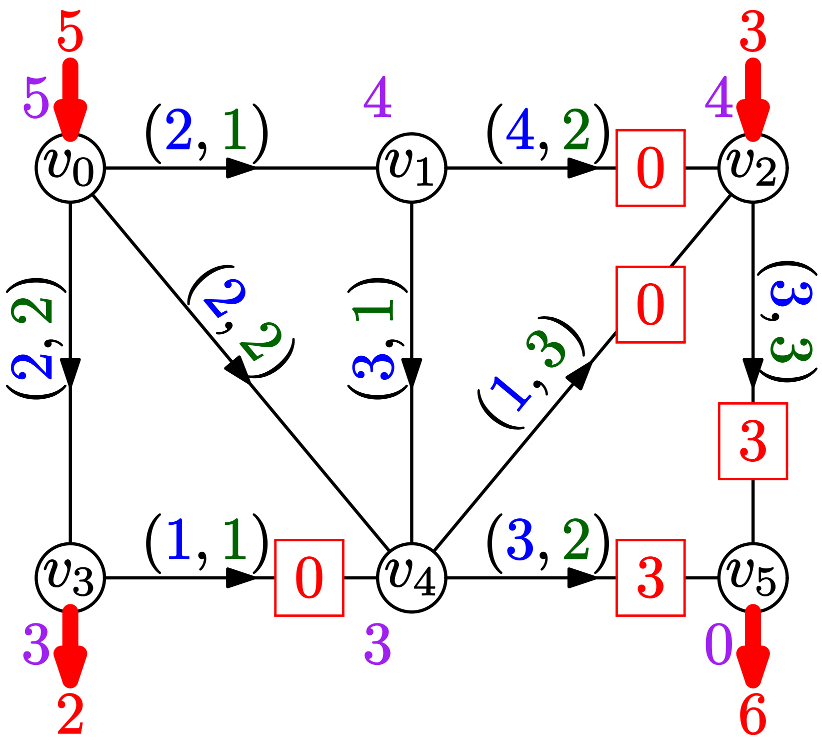


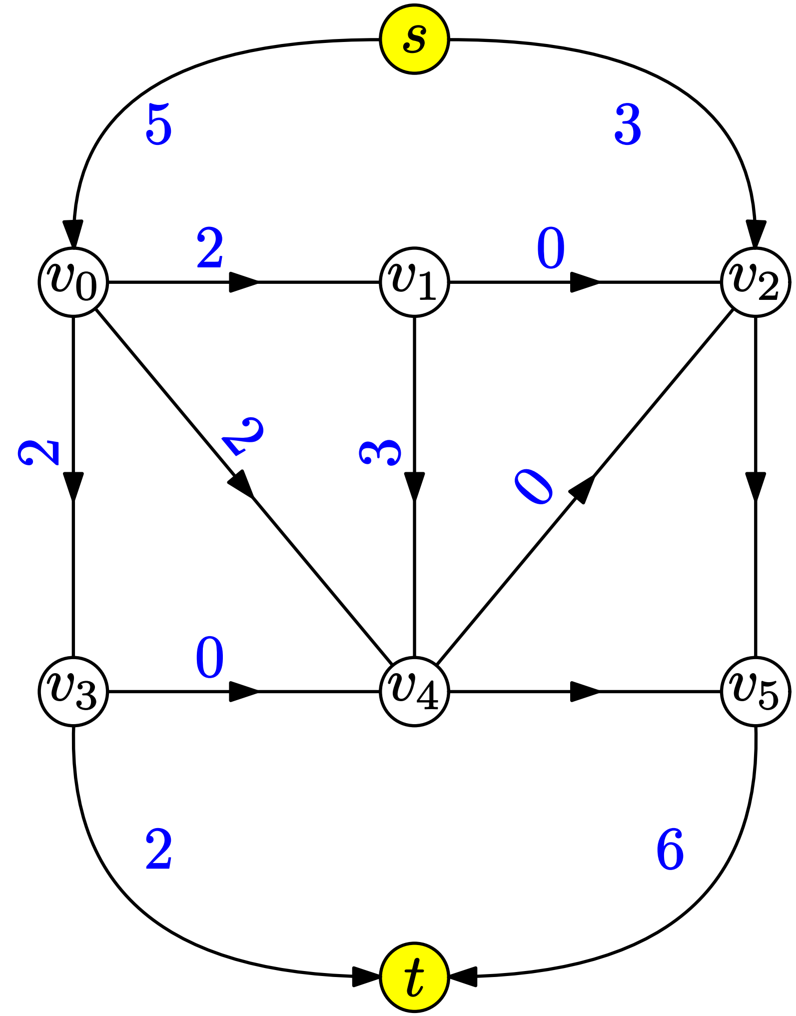
最適ポテンシャル：確認法 (1/2)



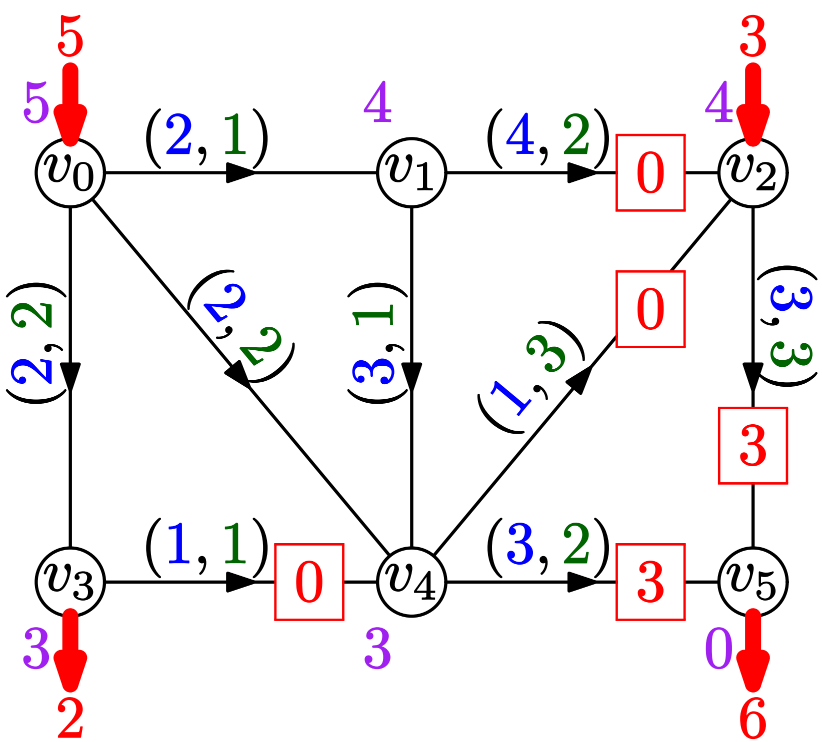


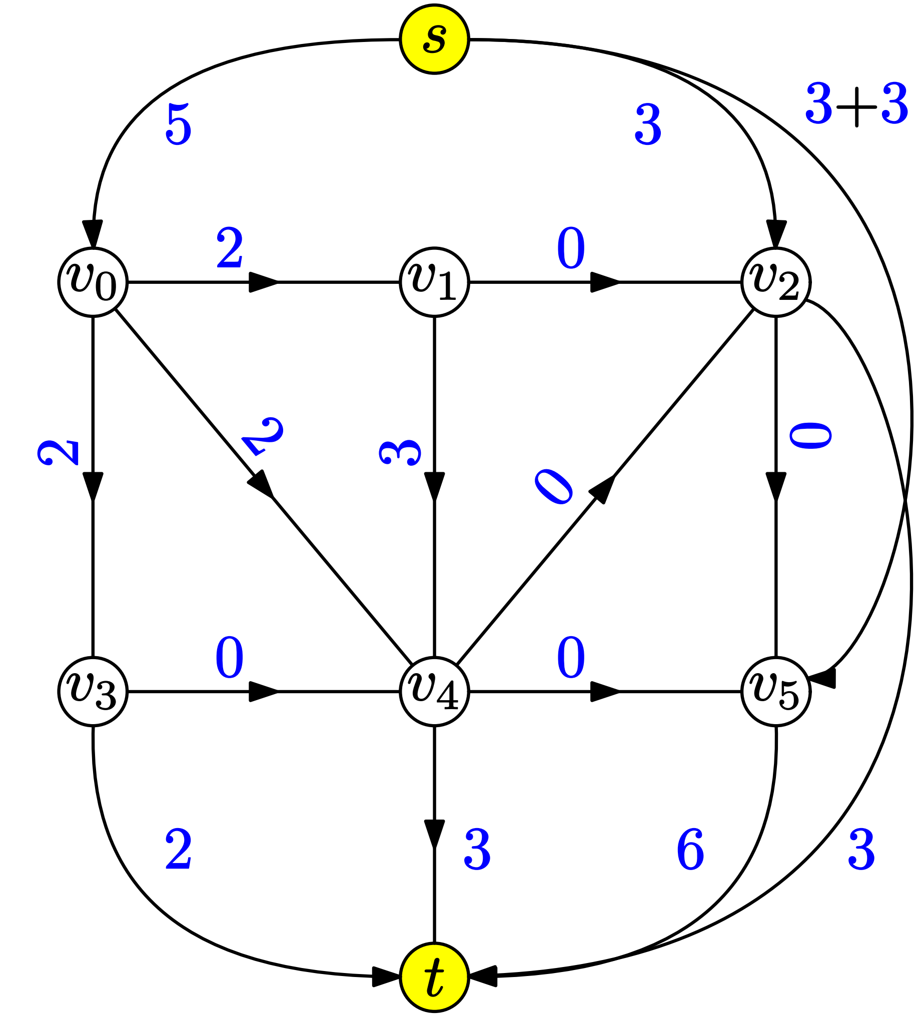
最適ポテンシャル：確認法 (1/2)

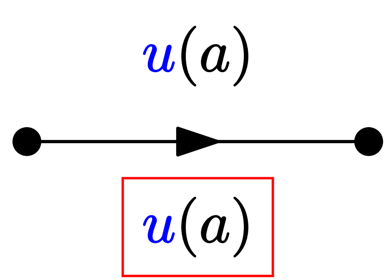


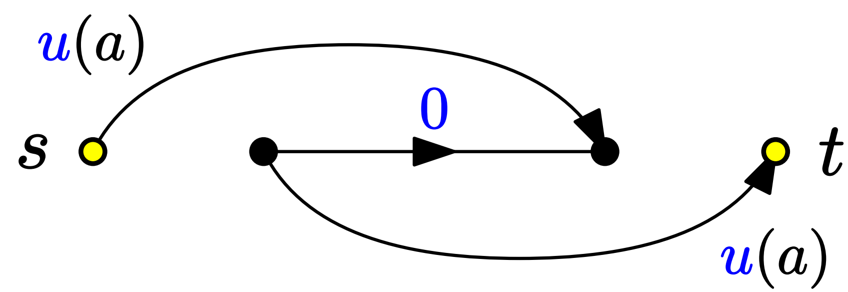


最適ポテンシャル：確認法 (1/2)

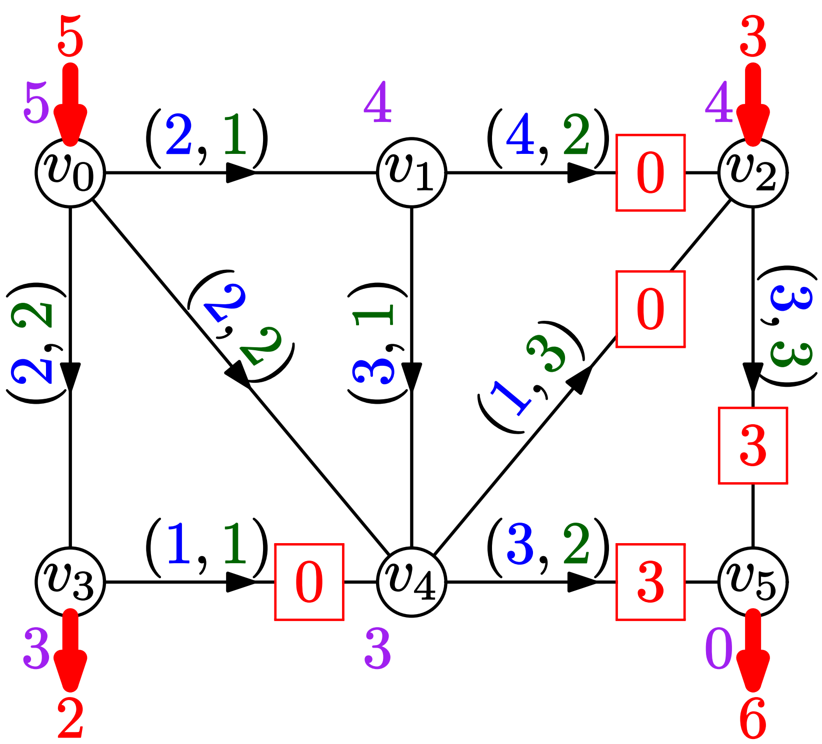


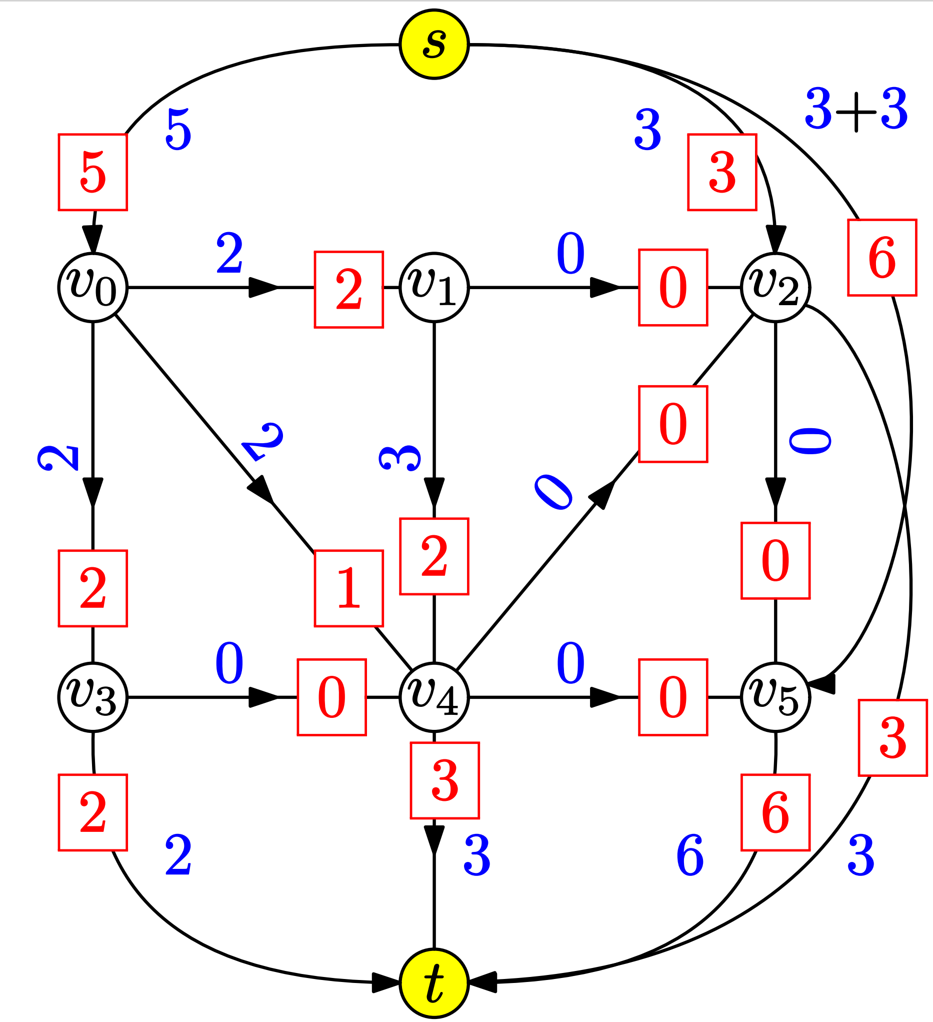




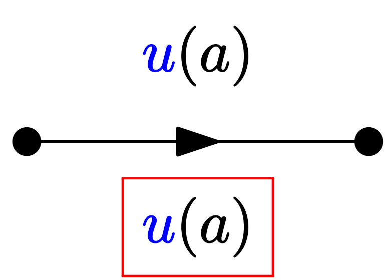


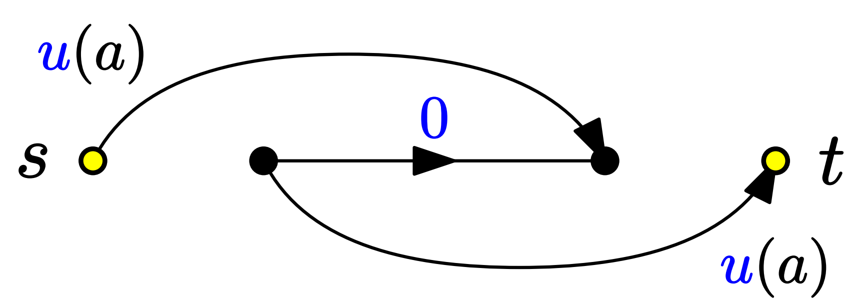
最適ポテンシャル：確認法 (1/2)



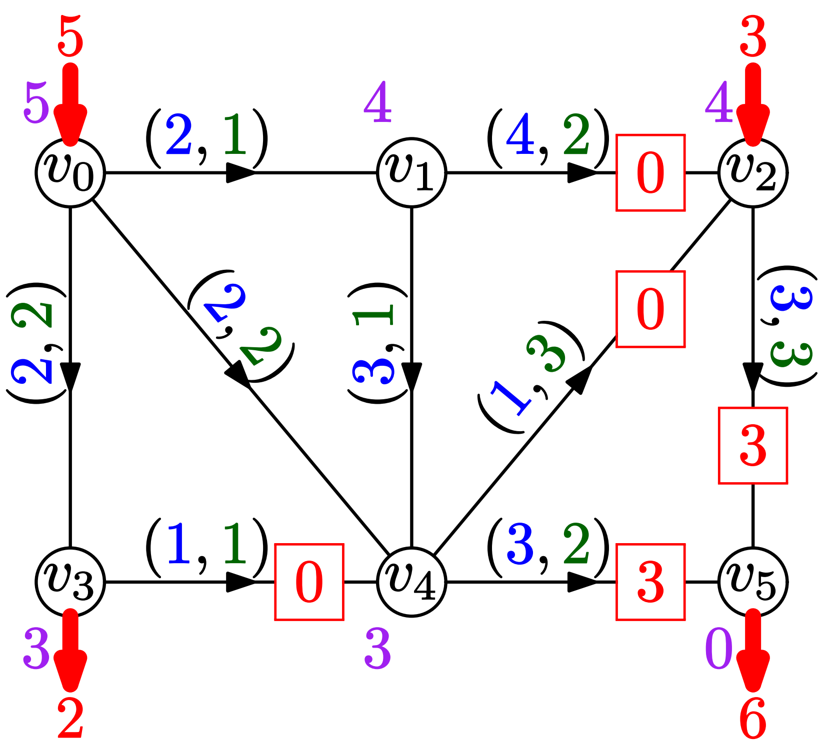


最適ポテンシャルである

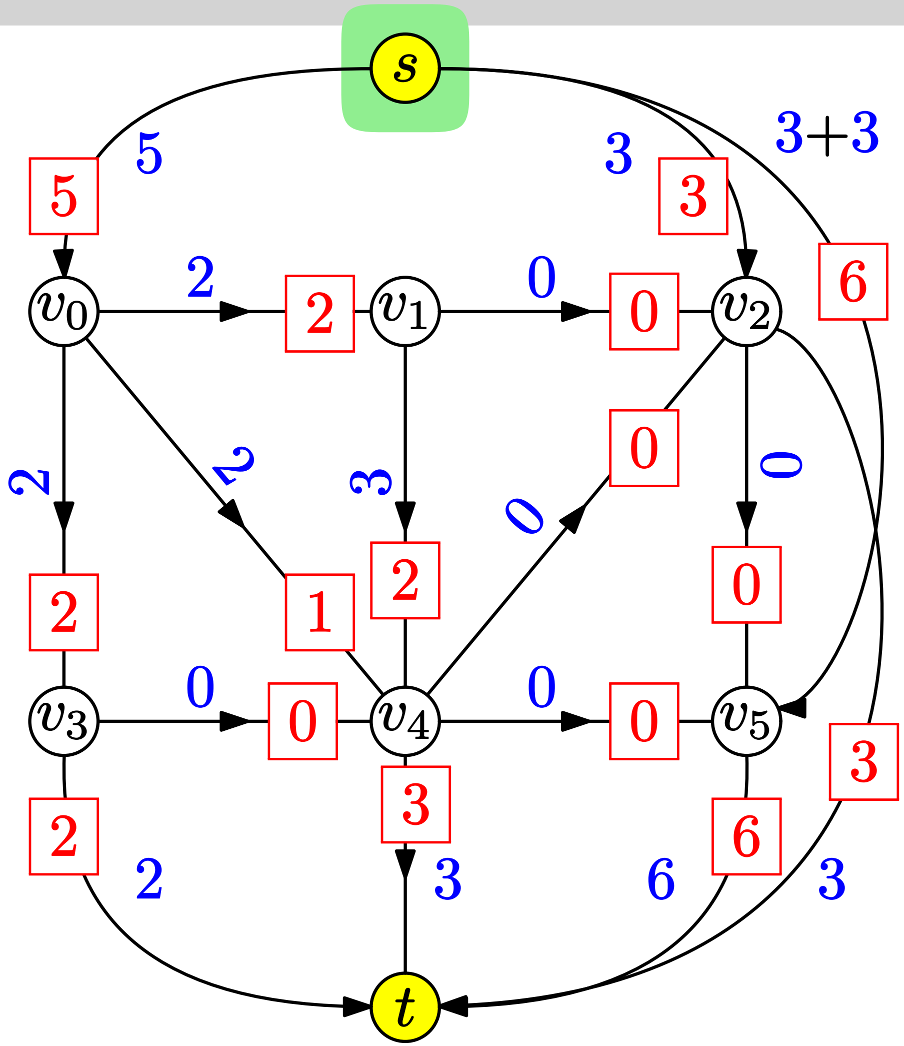


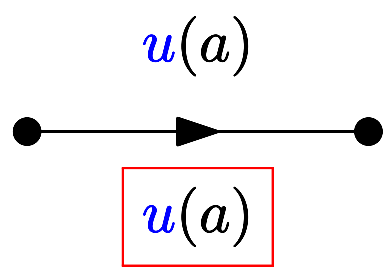


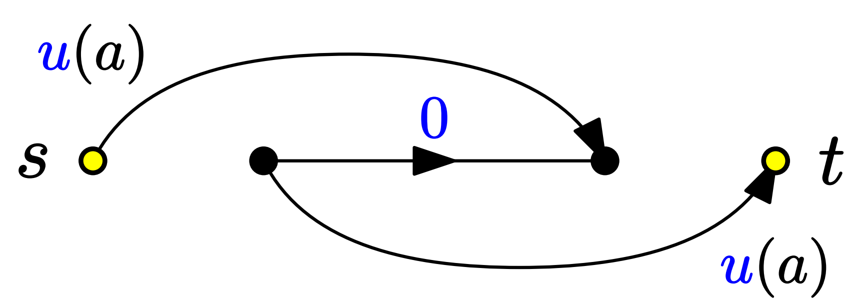
最適ポテンシャル：確認法 (1/2)



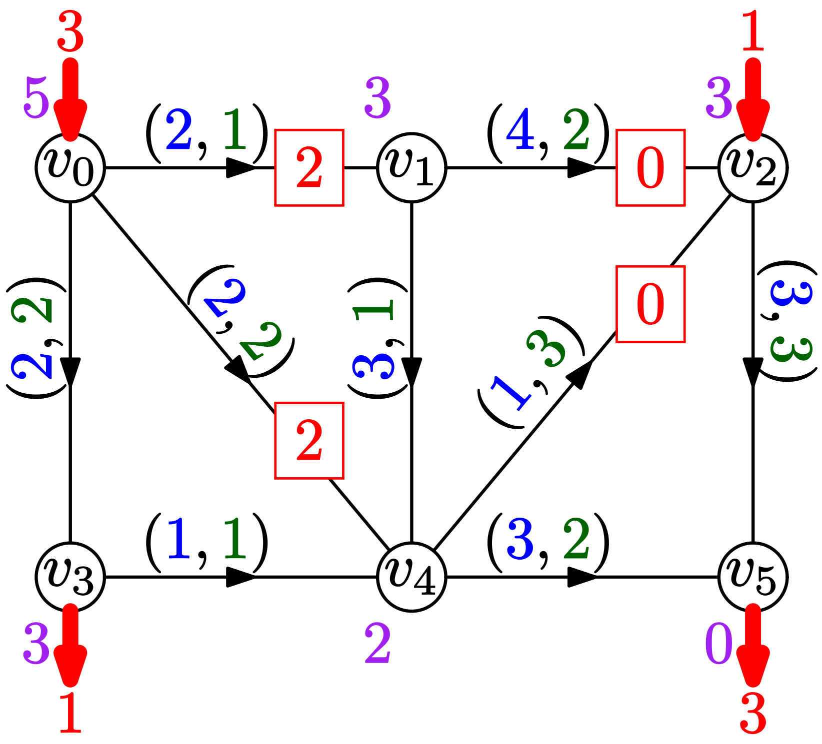
最適ポテンシャルである



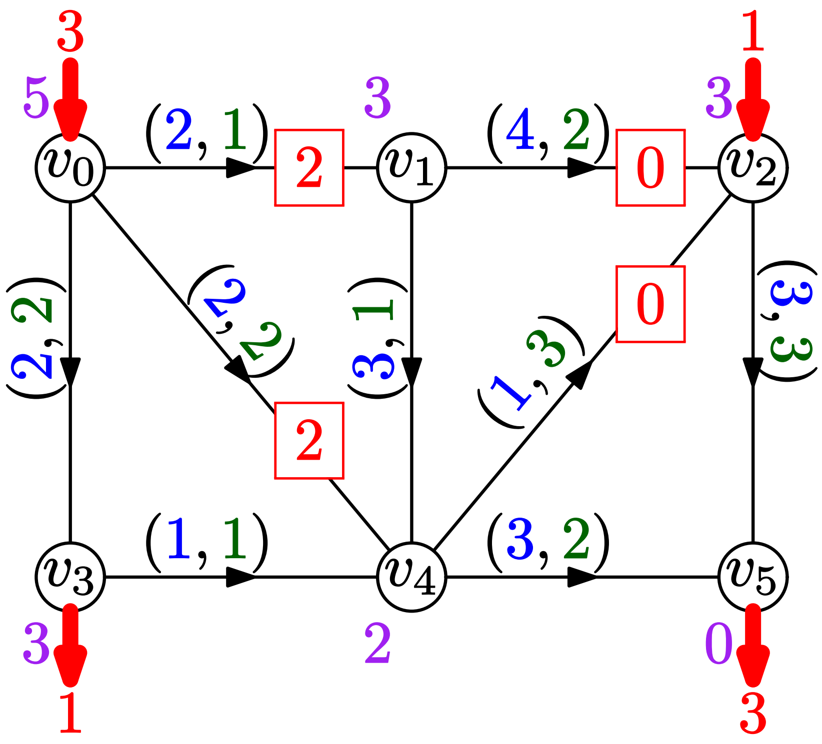


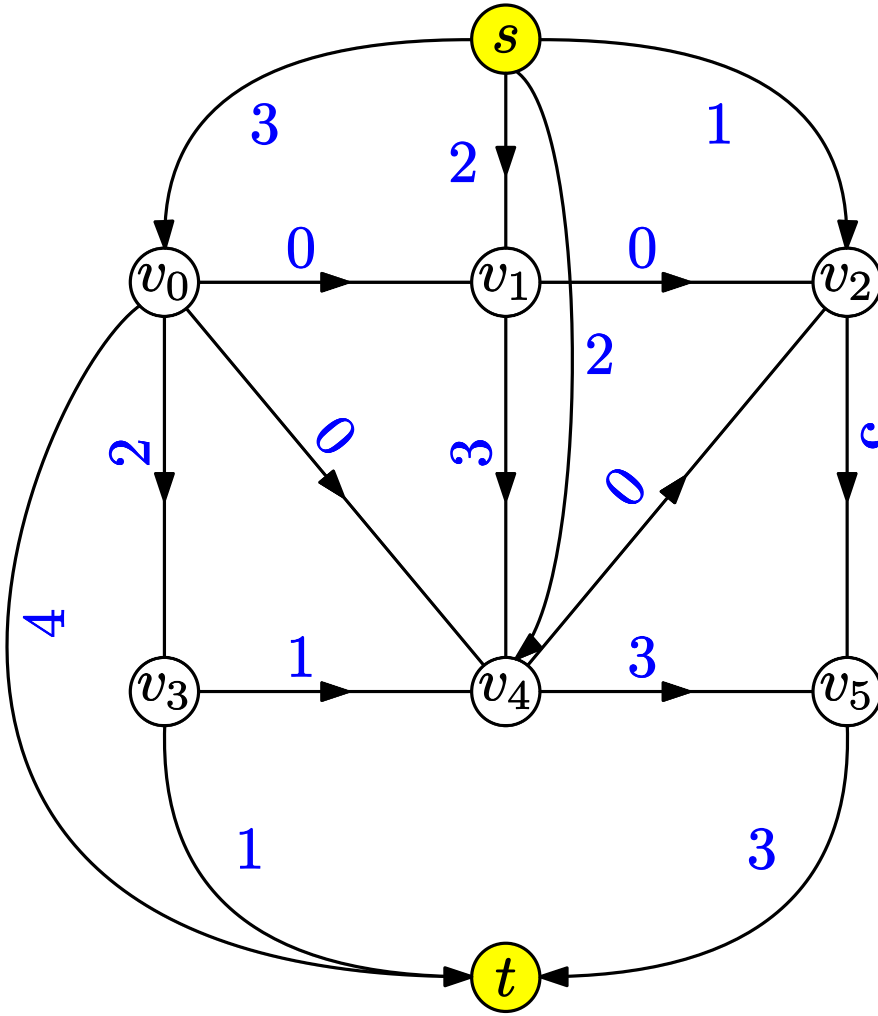


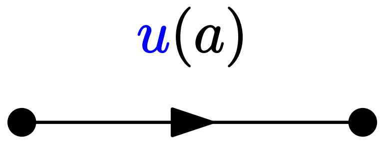
最適ポテンシャル：確認法 (2/2)

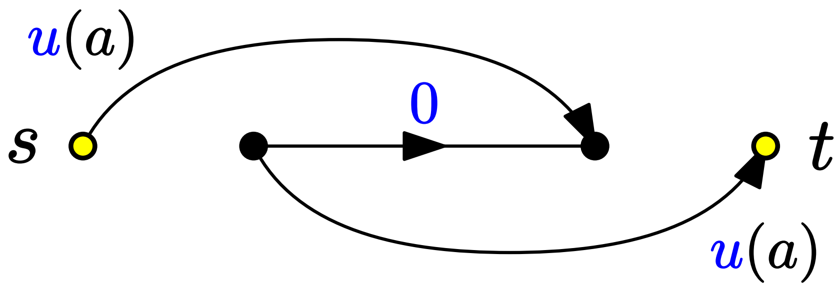


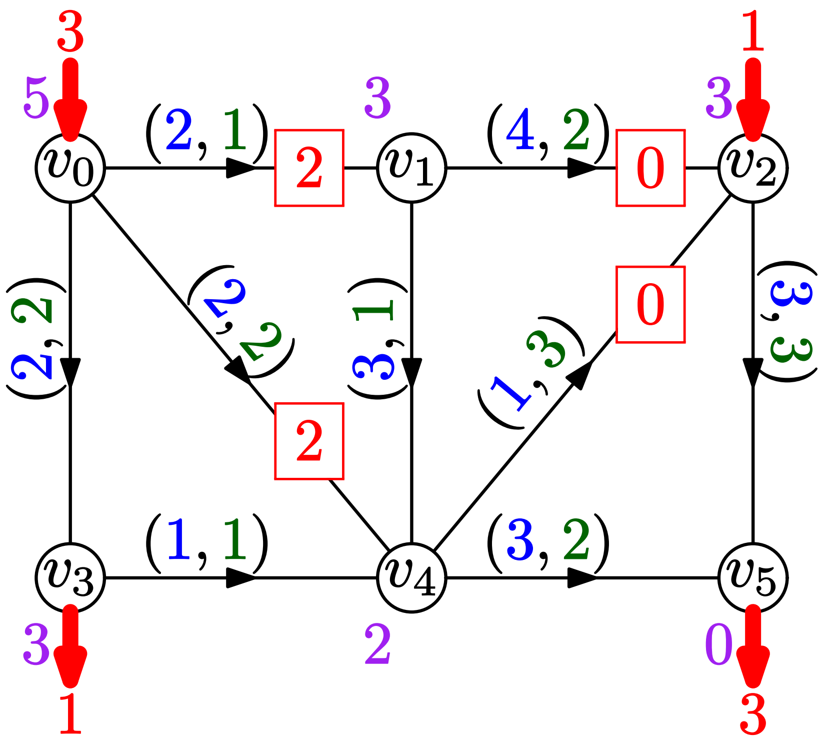
最適ポテンシャル：確認法 (2/2)



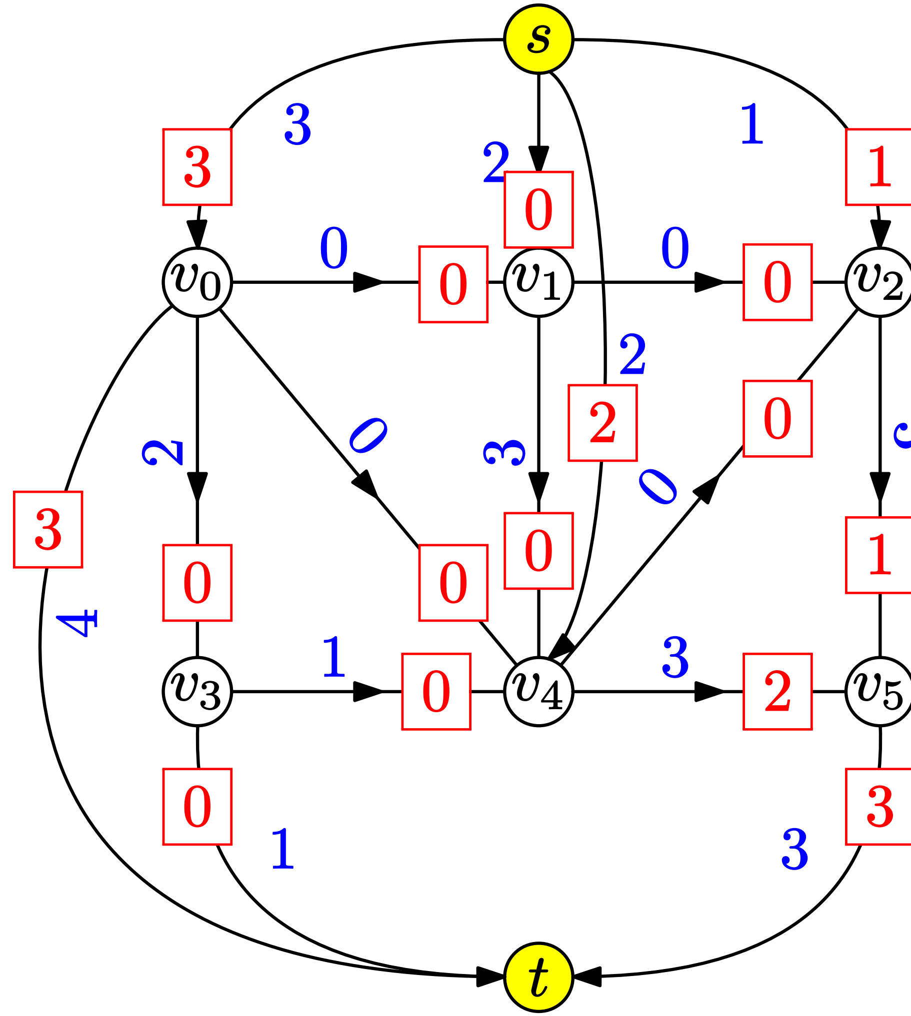


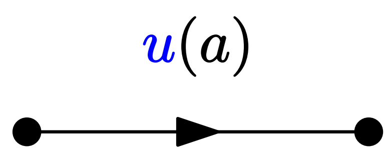


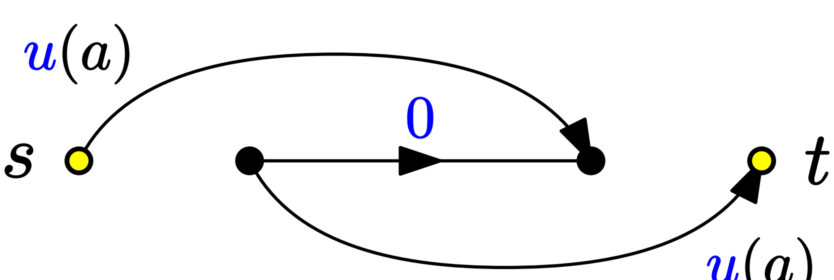




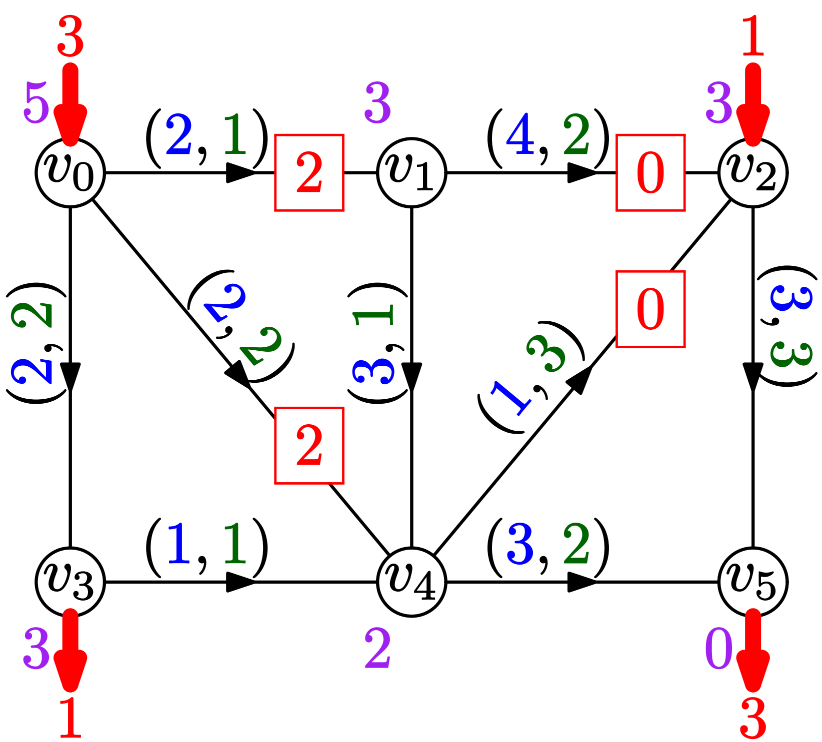
最適ポテンシャルではない



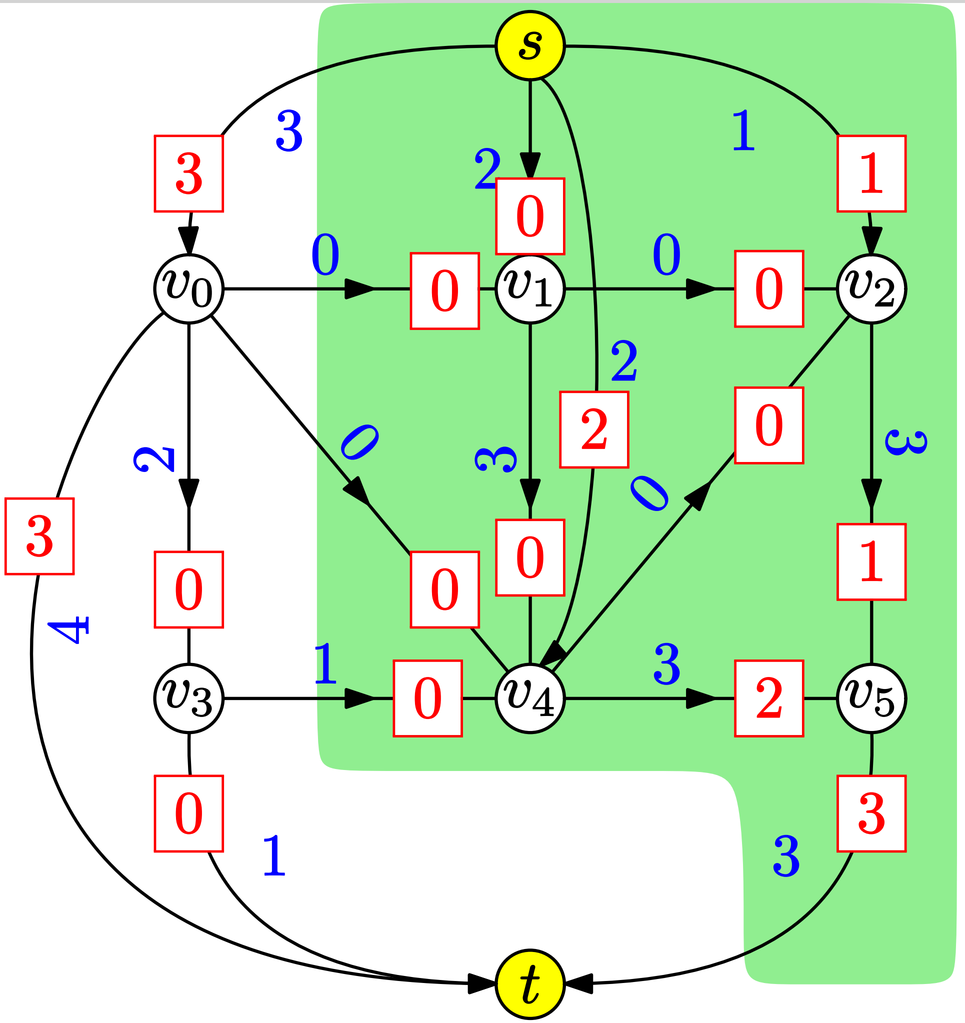


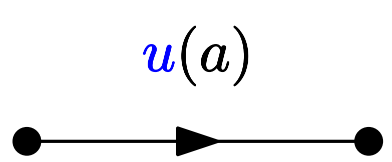


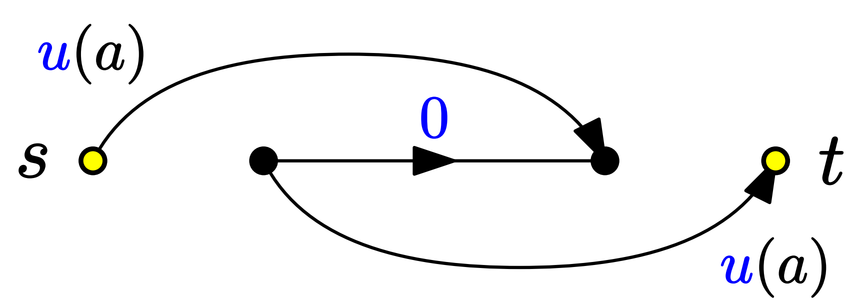
最適ポテンシャル：確認法 (2/2)



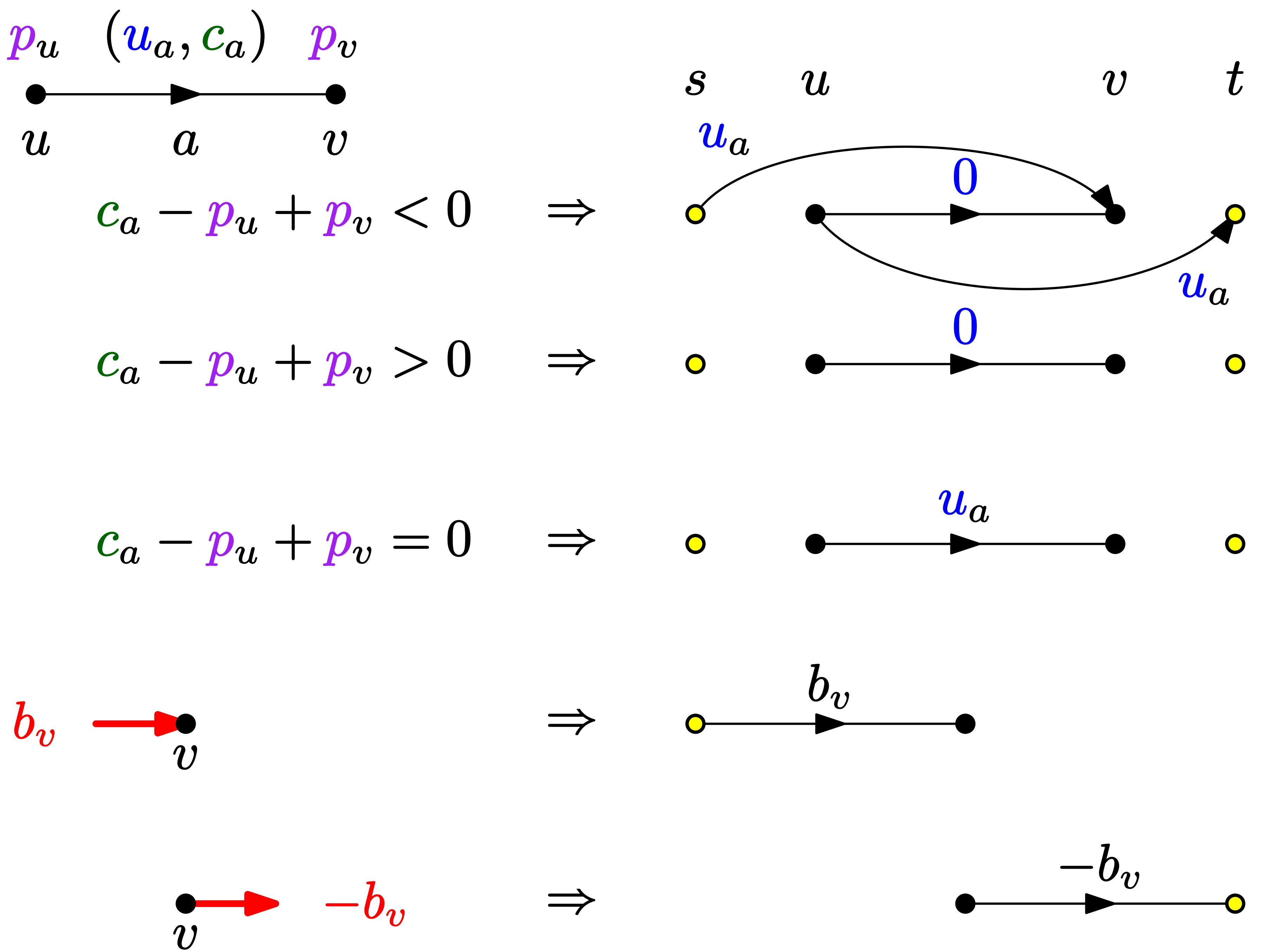
最適ポテンシャルではない



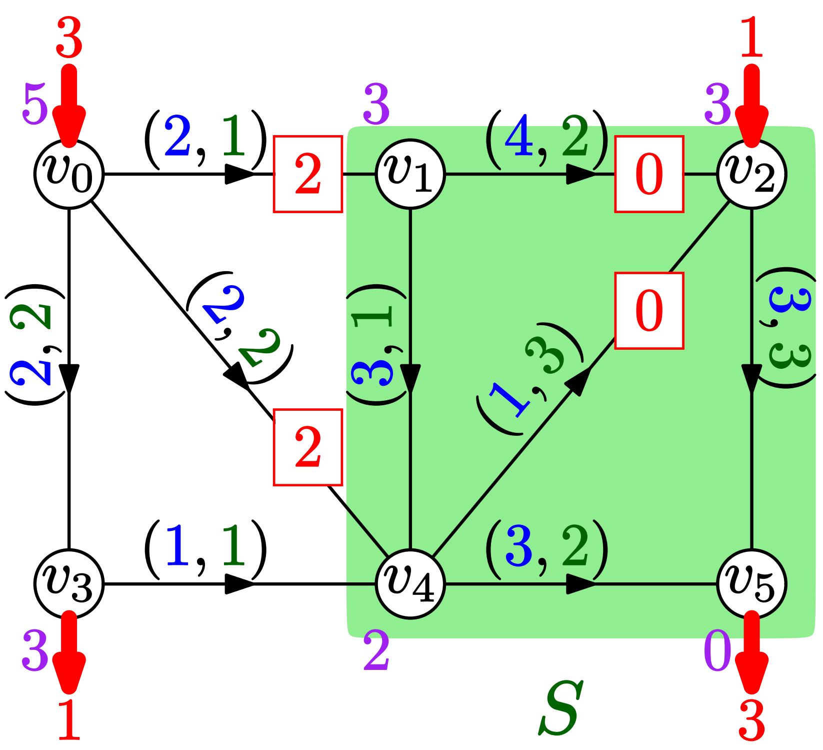




最適ポテンシャル：一般的な構成法



1. 最適ポテンシャル
2. **正カット最適性条件**
3. 正カット消去法



正カット最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$
弧費用 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，ポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$

性質：正カット最適性条件 (Hassin ’83)

p が (G, u, c) における最適ポテンシャル ⇔
任意の非空な真部分集合 $S \subseteq V$ に対して次が成立

$$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \leq 0$$

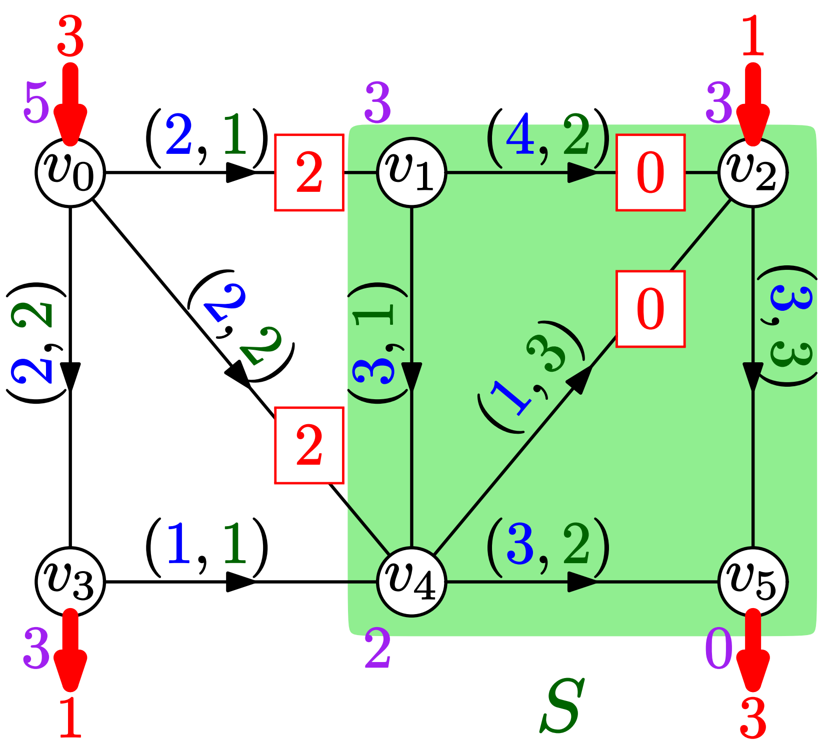
備考：「左辺 > 0」を満たす S を **正カット** と呼ぶことにする

正カット最適性条件：例

$$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \leq 0$$

$= 1 - 3 = -2$ $= 0$ $= 2 + 2 = 4$

成り立たない



正カット最適性条件：証明の流れ

性質：正カット最適性条件 (Hassin '83)

p が (G, u, c) における最適ポテンシャル $\Leftrightarrow$
任意の非空な真部分集合 $S \subseteq V$ に対して次が成立

$$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \leq 0$$

p が最適ポテンシャル

$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
最大流の値 $= s$ から出る弧の容量の和

正カット最適性条件：証明の流れ

性質：正カット最適性条件 (Hassin '83)

p が (G, u, c) における最適ポテンシャル $\Leftrightarrow$
任意の非空な真部分集合 $S \subseteq V$ に対して次が成立

$$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \le 0$$

p が最適ポテンシャル

$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
最大流の値 $= s$ から出る弧の容量の和

$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
s-t カットの最小容量 $= s$ から出る弧の容量の和

最大流最小カット定理

正カット最適性条件：証明の流れ

性質：正カット最適性条件 (Hassin ’83)

p が (G, u, c) における最適ポテンシャル $\Leftrightarrow$
任意の非空な真部分集合 $S \subseteq V$ に対して次が成立

$$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \leq 0$$

p が最適ポテンシャル

$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
最大流の値 $=$ s から出る弧の容量の和

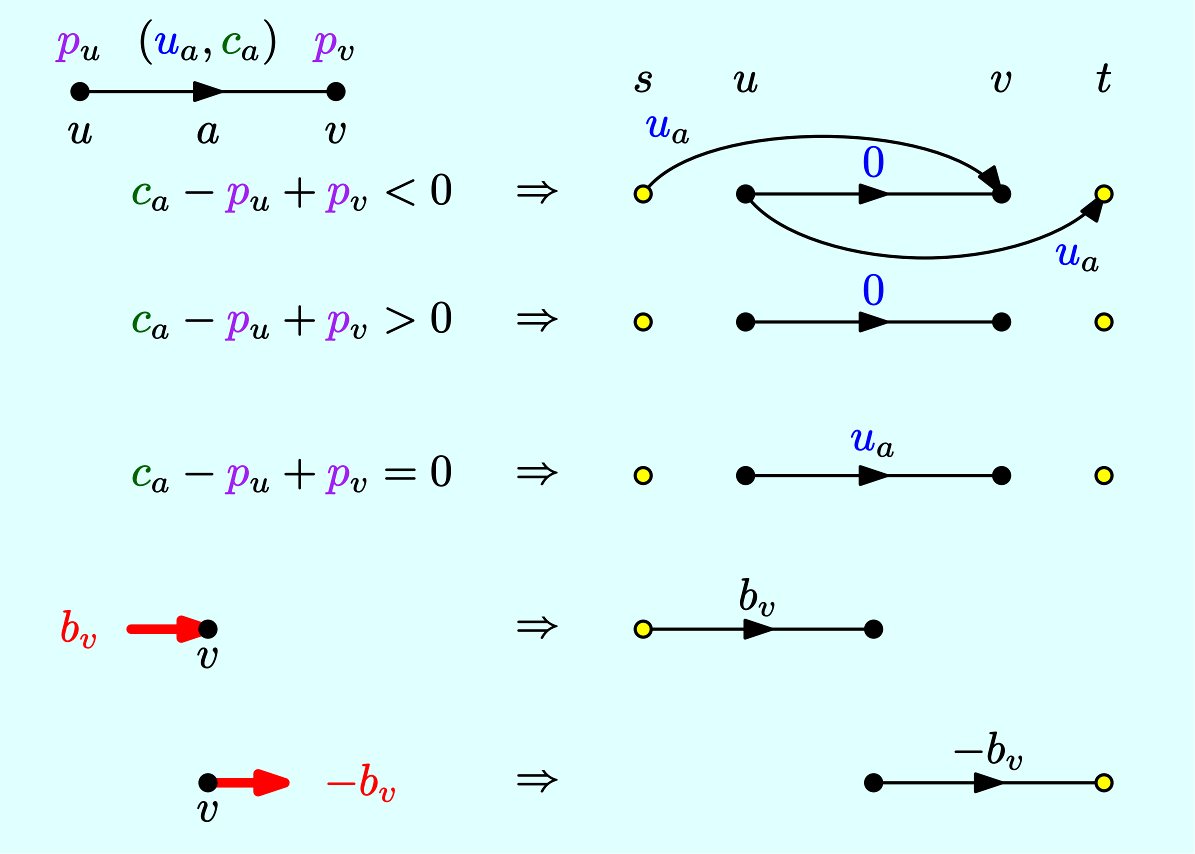
$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
s-t カットの最小容量 $=$ s から出る弧の容量の和

$\Leftrightarrow$ 構成したネットワークにおいて
任意の s-t カットの容量 $\geq$ s から出る弧の容量の和

$\{s\}$ は s-t カット

s から出る弧の容量の和

$$= \sum_{\substack{v \in V, \\ b_v > 0}} b_v + \sum_{\substack{uv \in A, \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv}$$



正カット最適性条件：証明 (2/6)

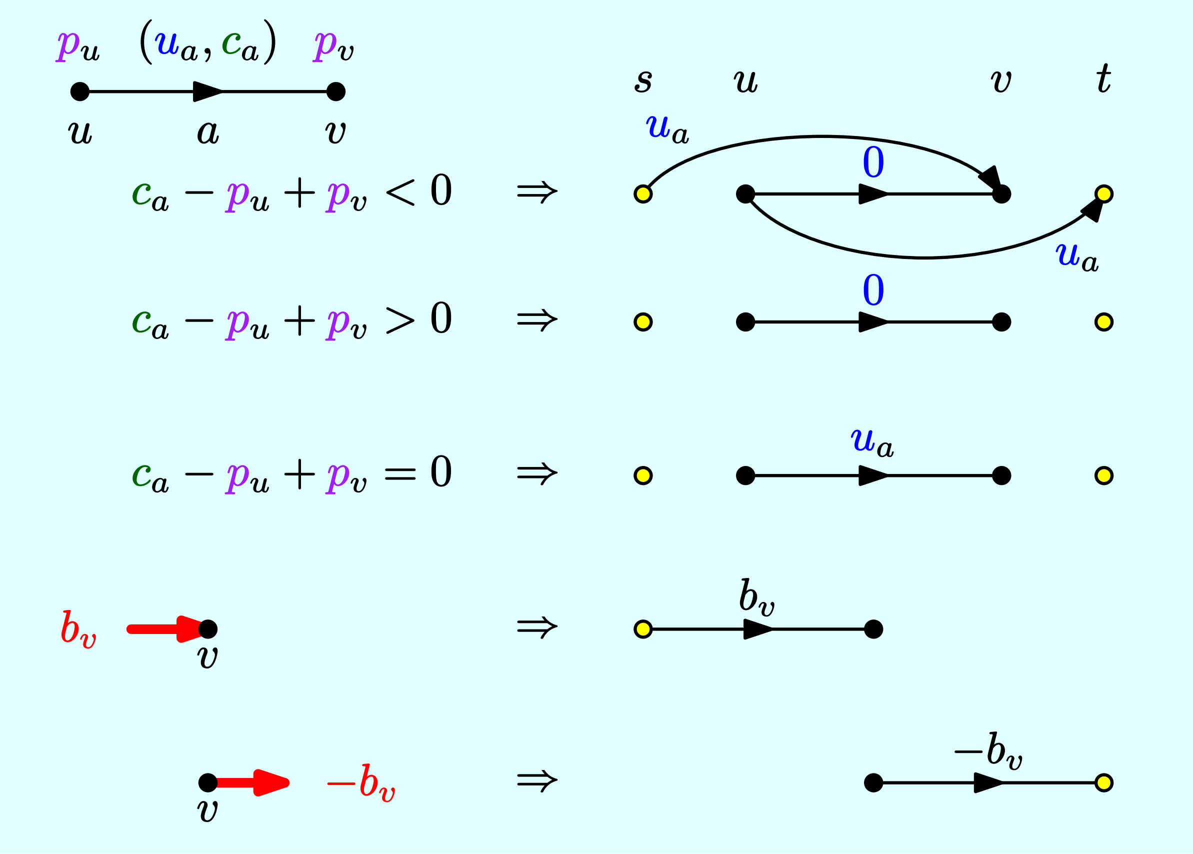
s-t カット $S \cup \{s\}$ に対して，cap$(S \cup \{s\})$

$$= \sum_{\substack{v \notin S,\\ b_v > 0}} b_v + \sum_{\substack{v \in S,\\ b_v < 0}} (-b_v)$$

$$+ \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0,\\ u \in S}} u_{uv}$$

$$+ \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0,\\ v \notin S}} u_{uv}$$

$$+ \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v = 0,\\ u \in S, v \notin S}} u_{uv}$$



正カット最適性条件：証明 (3/6)

p が最適ポテンシャル

$\Leftrightarrow$ 任意の s-t カット $S \cup \{s\}$ の容量 $\geq$ s から出る弧の容量の和

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{v \notin S,\\ b_v > 0}} b_v + \sum_{\substack{v \in S,\\ b_v < 0}} (-b_v) + \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v = 0,\\ u \in S, v \notin S}} u_{uv}$$

$$+ \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0,\\ u \in S}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0,\\ v \notin S}} u_{uv}$$

$$\geq \sum_{\substack{v \in V,\\ b_v > 0}} b_v + \sum_{\substack{uv \in A,\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv}$$

正カット最適性条件：証明 (4/6)

(a) $$\sum_{\substack{v \in V,\\ b_v > 0}} b_v - \sum_{\substack{v \notin S,\\ b_v > 0}} b_v - \sum_{\substack{v \in S,\\ b_v < 0}} (-b_v)$$

$$= \sum_{\substack{v \in S,\\ b_v > 0}} b_v + \sum_{\substack{v \in S,\\ b_v < 0}} b_v = \sum_{v \in S} b_v$$

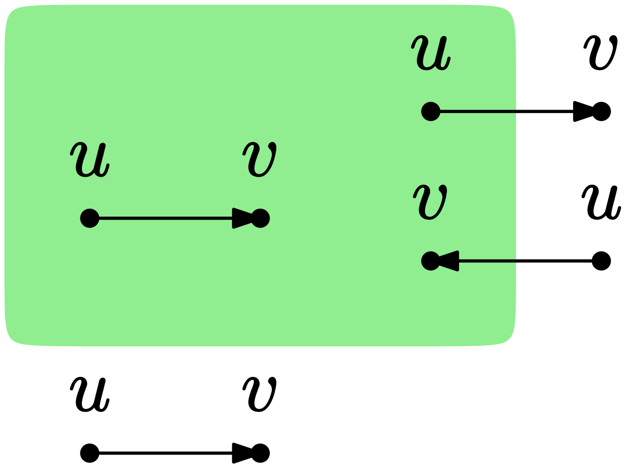
正カット最適性条件：証明 (4/6)

(a) $$\sum_{\substack{v\in V,\\ b_v>0}} b_v - \sum_{\substack{v\notin S,\\ b_v>0}} b_v - \sum_{\substack{v\in S,\\ b_v<0}} (-b_v)$$

$$= \sum_{\substack{v\in S,\\ b_v>0}} b_v + \sum_{\substack{v\in S,\\ b_v<0}} b_v = \sum_{v\in S} b_v$$

(b) $$-\sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v=0,\\ u\in S, v\notin S}} u_{uv} = -\sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v=0}} u_{uv}$$

(c) $$\sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\in S}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ v\notin S}} u_{uv}$$



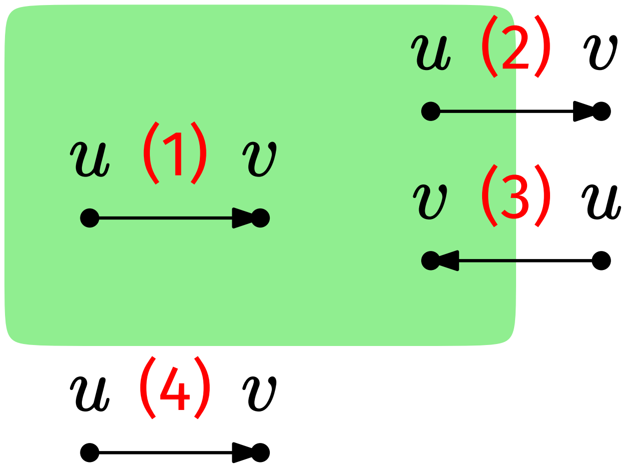
正カット最適性条件：証明 (5/6)

(c) $$\sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\in S}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ v\notin S}} u_{uv}$$

(1), (2), (3), (4) (1), (2) (2), (4)

$$= \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\notin S, v\in S}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\in S, v\notin S}} u_{uv}$$

(3) (2)



正カット最適性条件：証明 (5/6)

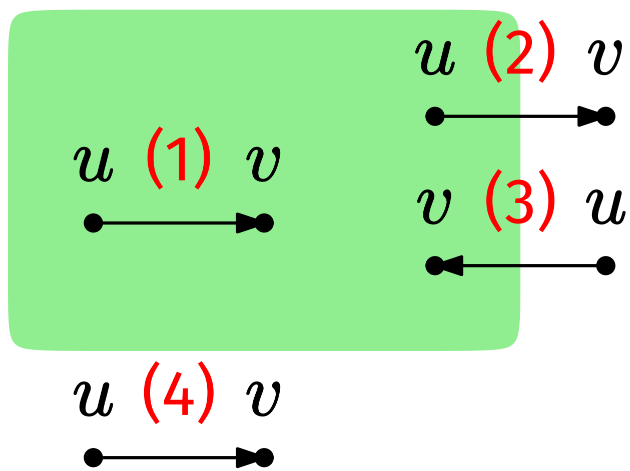
(c) $$\sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\in S}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ v\notin S}} u_{uv}$$

(1), (2), (3), (4)   (1), (2)   (2), (4)

$$= \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\notin S, v\in S}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in A,\\ c_{uv}-p_u+p_v<0,\\ u\in S, v\notin S}} u_{uv}$$

(3)   (2)

$$= \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv}$$



p が最適ポテンシャル

$$\Leftrightarrow \sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v = 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \leq 0 \quad \forall\, S \subseteq V, \; S \neq \emptyset, V$$

正カット最適性条件：証明 (6/6)

p が最適ポテンシャル

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v = 0}} u_{uv} & \\
+ \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \le 0 & \quad \forall\, S \subseteq V,\ S \neq \emptyset, V \\
\Leftrightarrow \sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} \le 0 & \\
& \quad \forall\, S \subseteq V,\ S \neq \emptyset, V
\end{aligned}
$$

$\square$

[再掲] 正カット最適性条件

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，弧容量 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$
弧費用 $c\colon A\to\mathbb{R}_+$，$b\colon V\to\mathbb{R}$，ポテンシャル $p\colon V\to\mathbb{R}$

性質：正カット最適性条件 (Hassin '83)

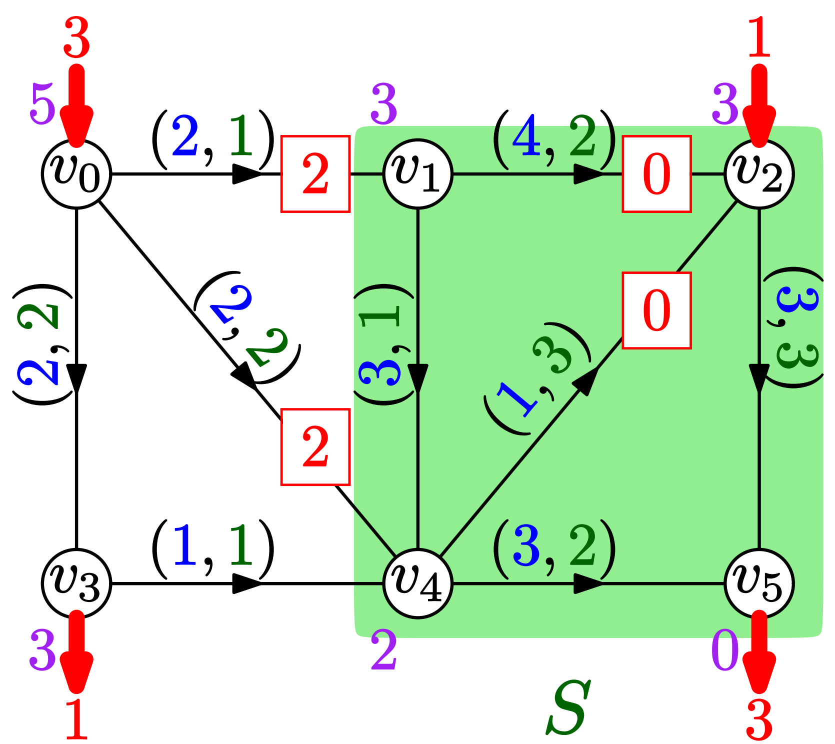
p が (G,u,c) における最適ポテンシャル $\Leftrightarrow$
任意の非空な真部分集合 $S\subseteq V$ に対して次が成立

$$\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} \le 0$$

備考：「左辺 >0」を満たす S を **正カット** と呼ぶことにする

本日の内容

1. 最適ポテンシャル
2. 正カット最適性条件
3. **正カット消去法**



正カット最適性条件と正カット消去法

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$
弧費用 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，ポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$

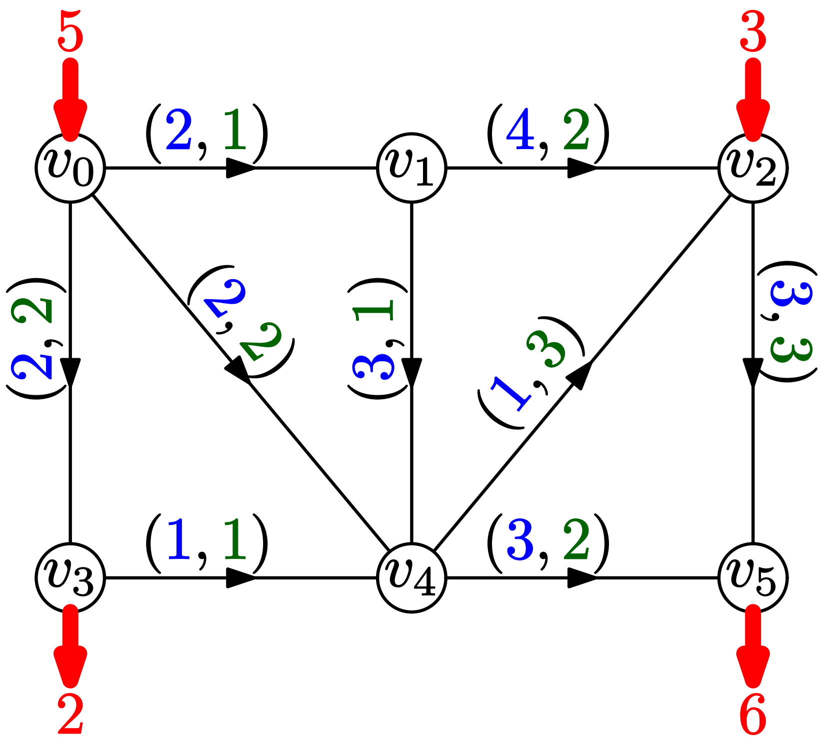
性質：正カット最適性条件 (Hassin ’83)

p が (G, u, c) における最適ポテンシャル ⇔
正カットが存在しない

正カット最適性条件から「自然に」アルゴリズムが得られる

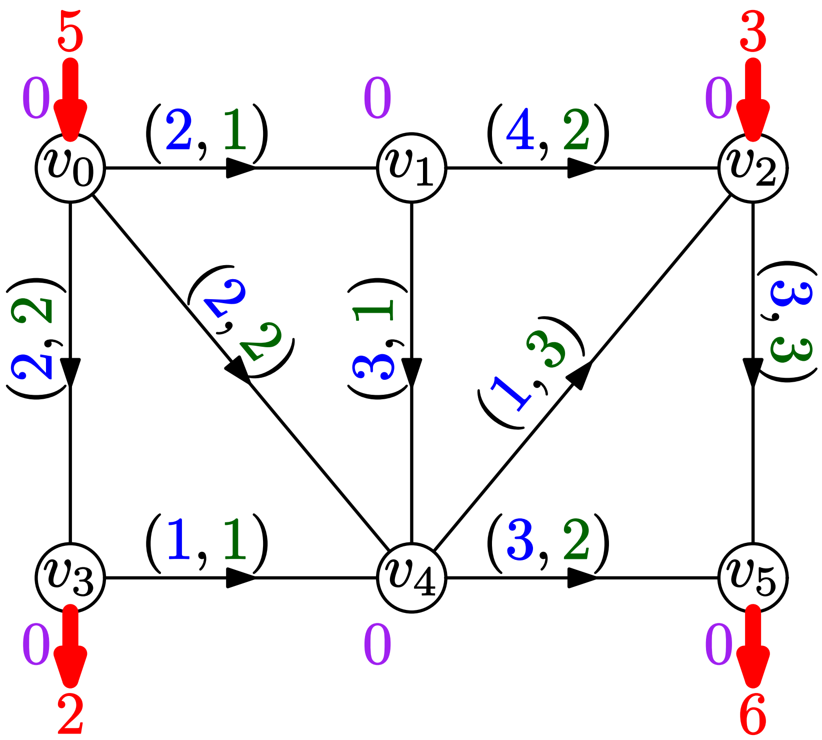
$\rightsquigarrow$ 正カット消去法 (cut canceling algorithm)

正カット消去法：例 (1/5)



正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

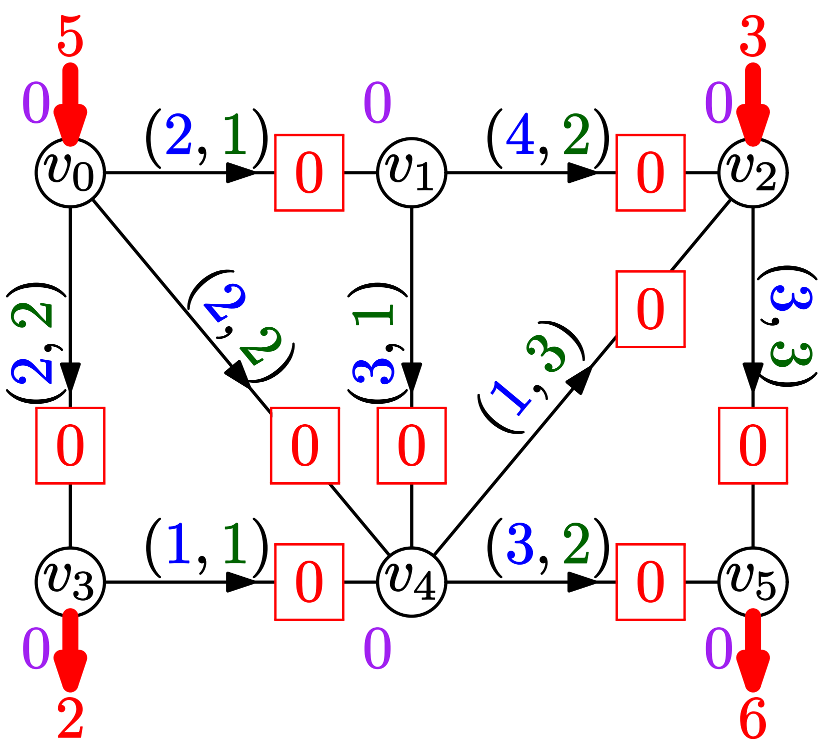
正カット消去法：例 (1/5)



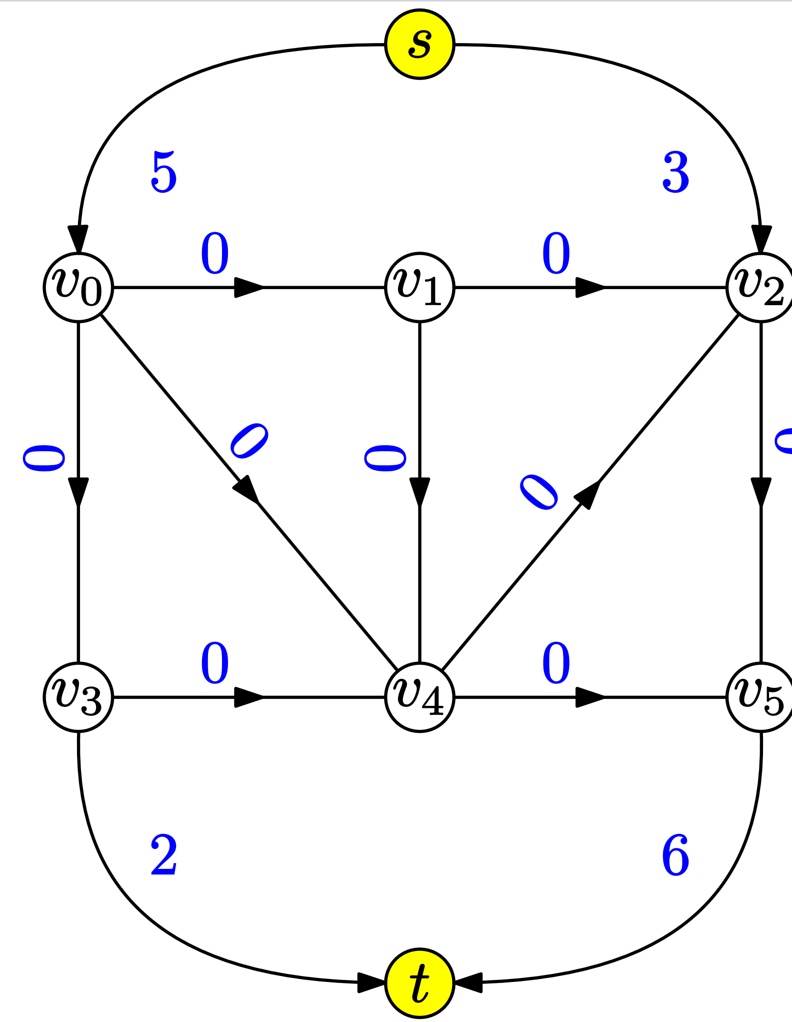
任意のポテンシャルに初期化

正カット：$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (1/5)

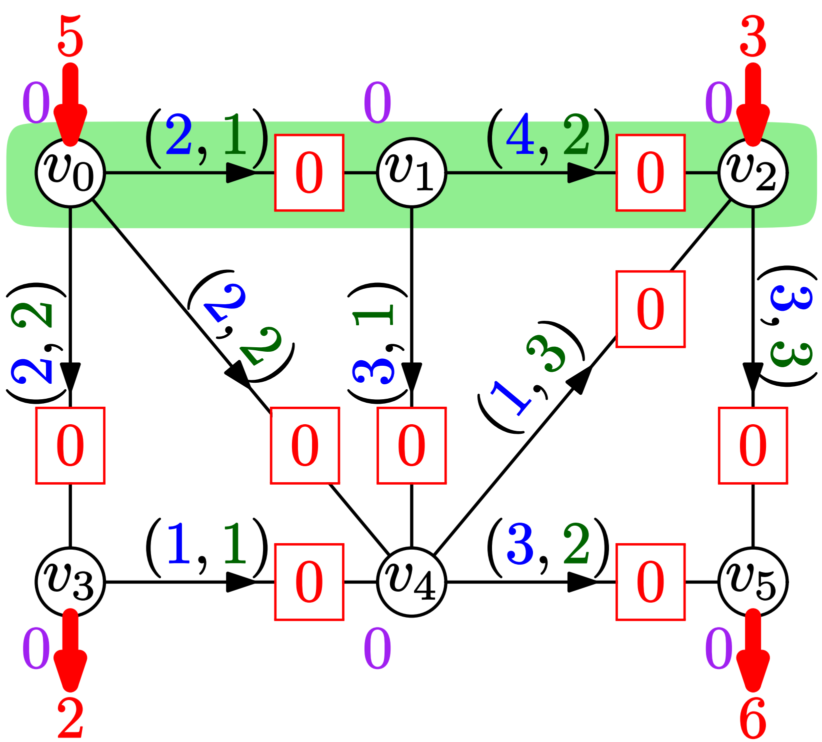


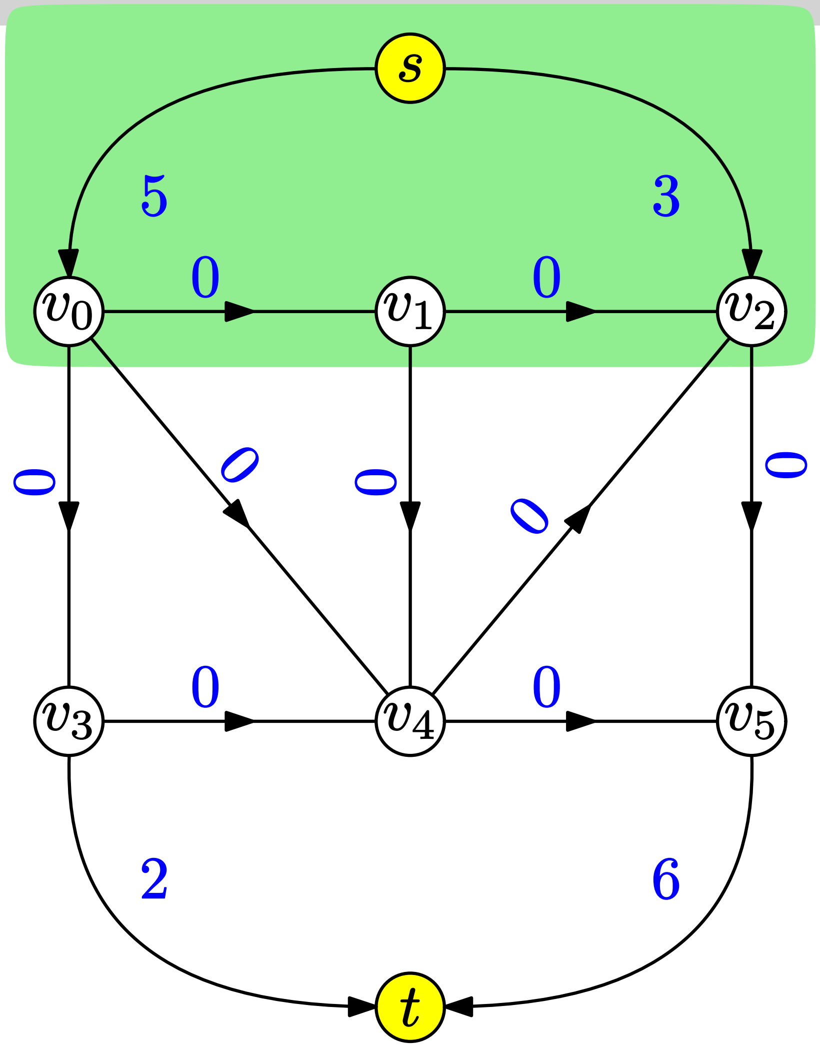
最大流のネットワークを構成



正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (1/5)

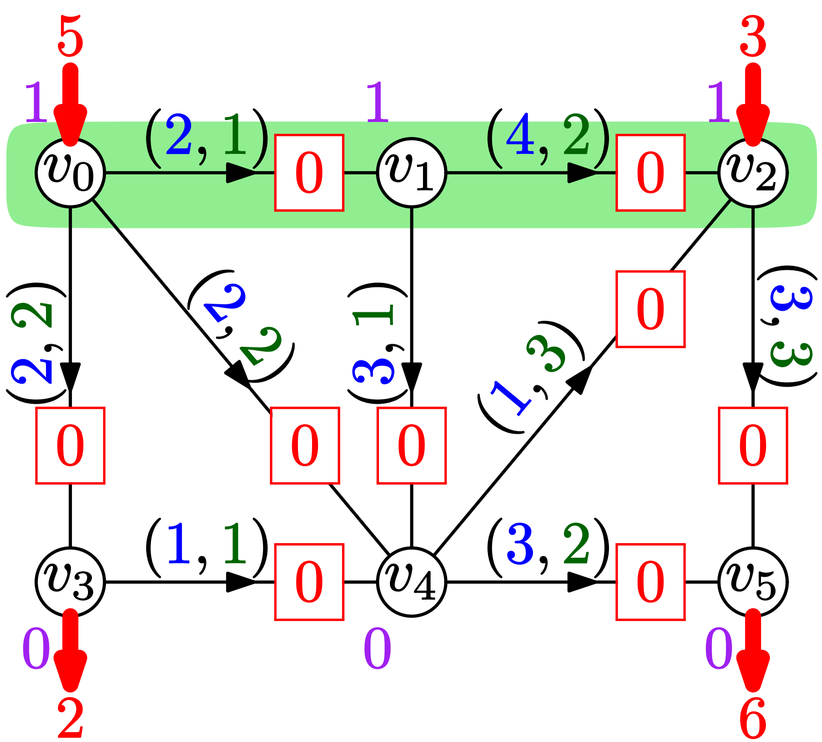


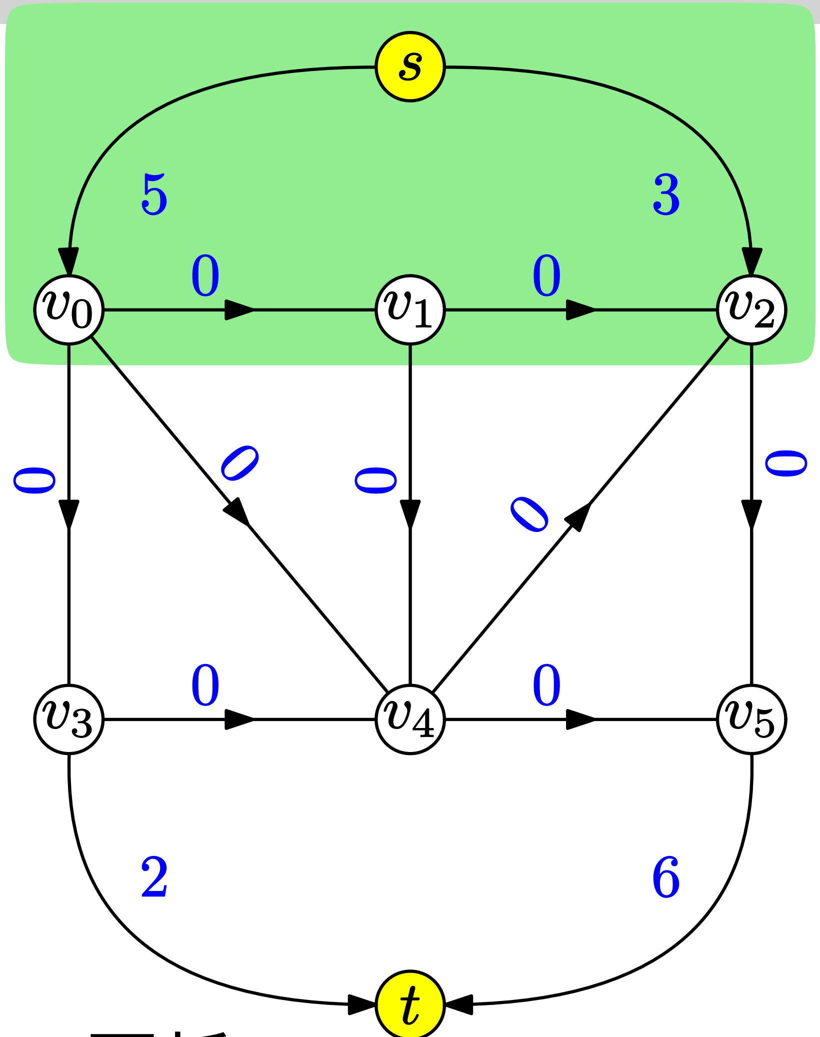


最大流のネットワークを構成

正カットの探索

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$



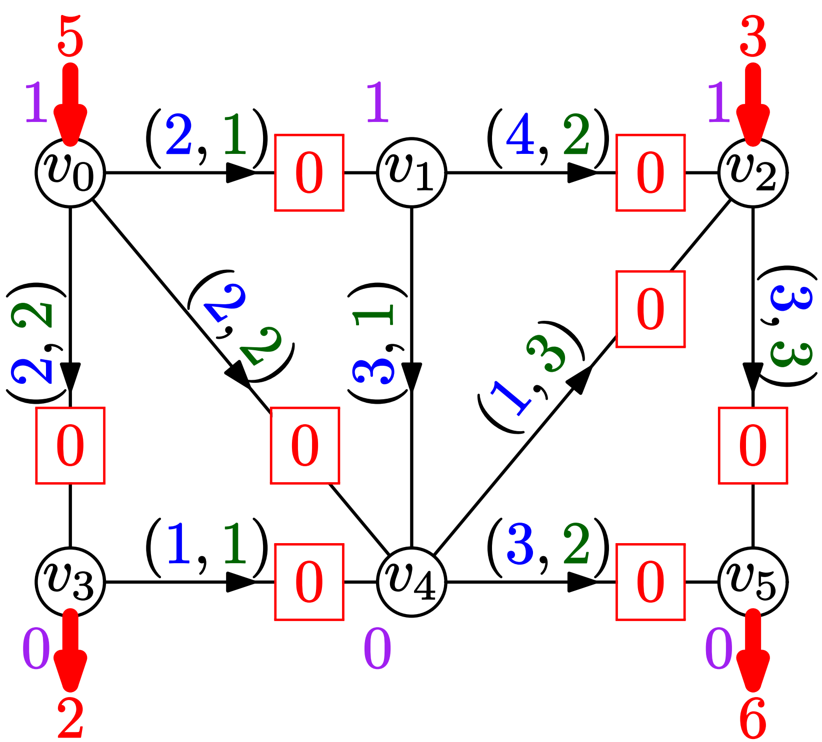


最大流のネットワークを構成

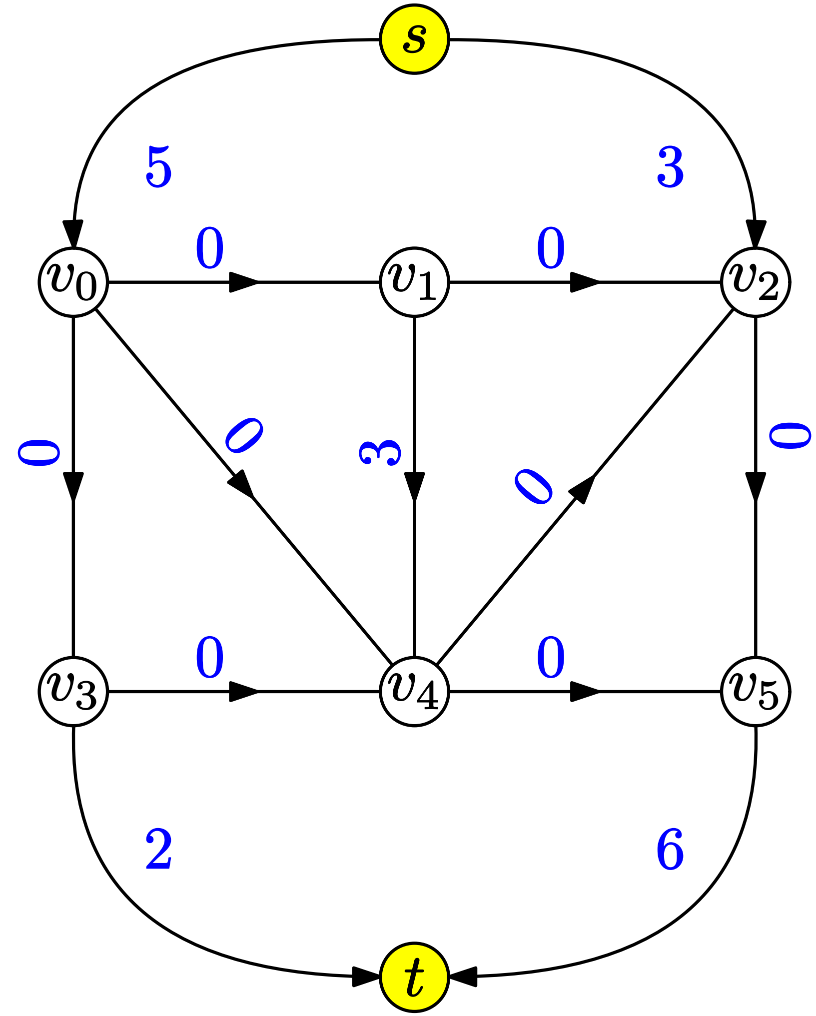
正カットの探索，ポテンシャルの更新

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (2/5)

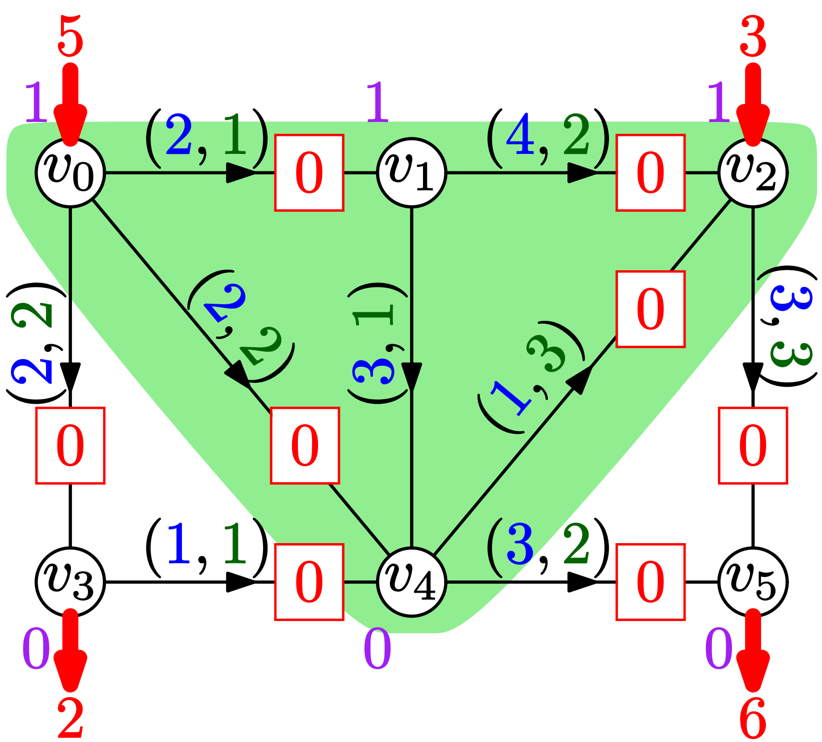


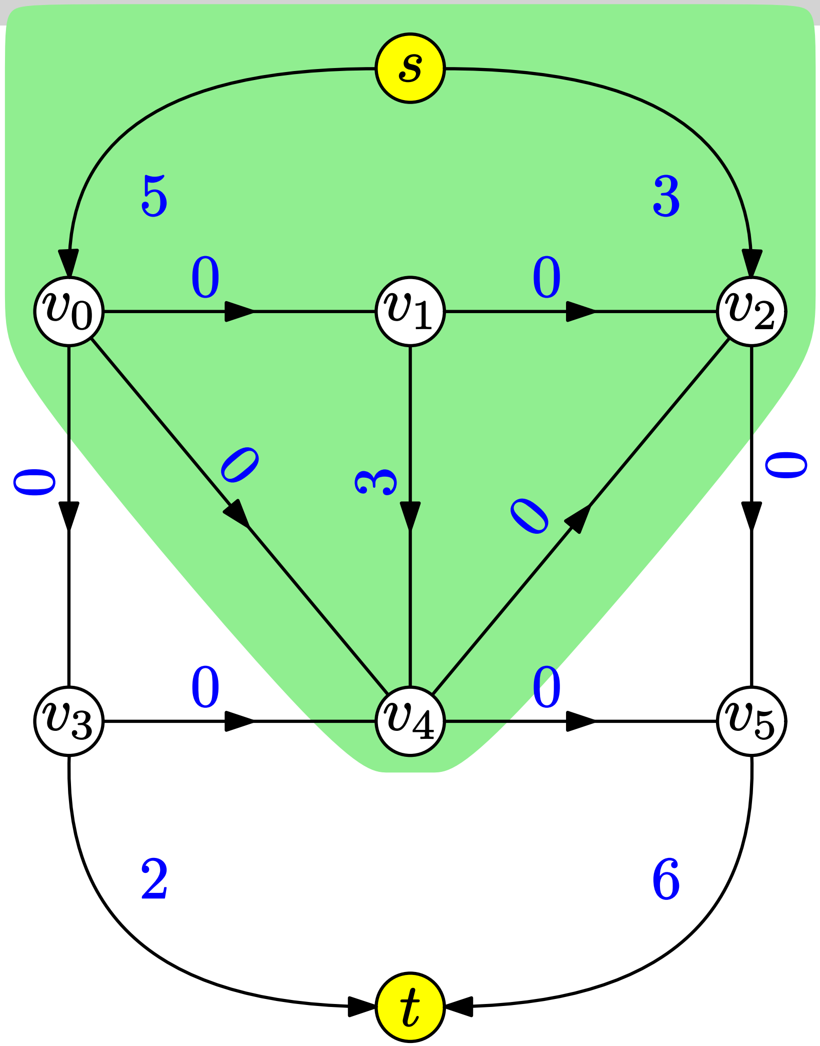
最大流のネットワークを構成



正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (2/5)

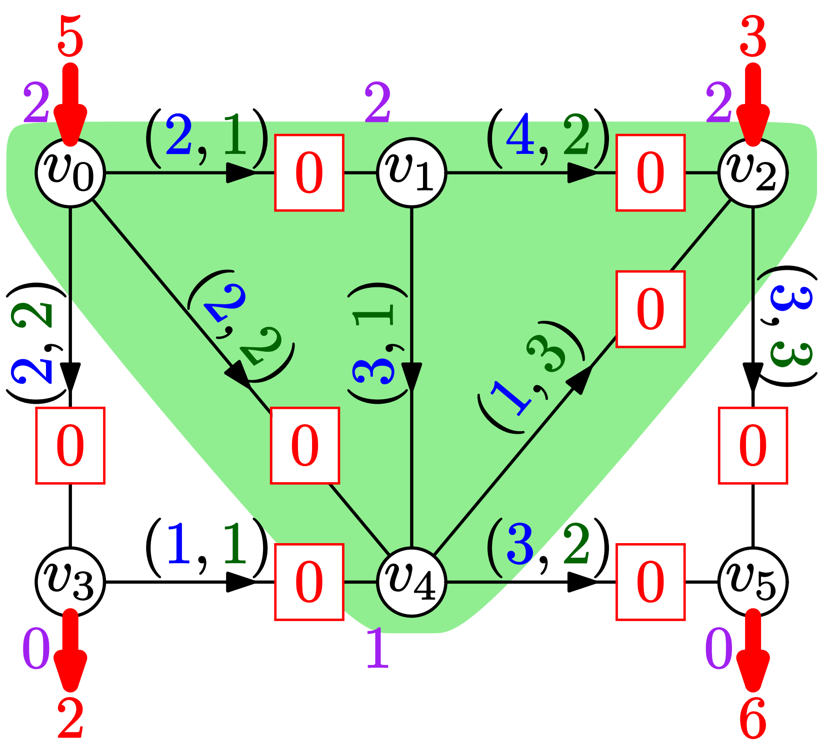


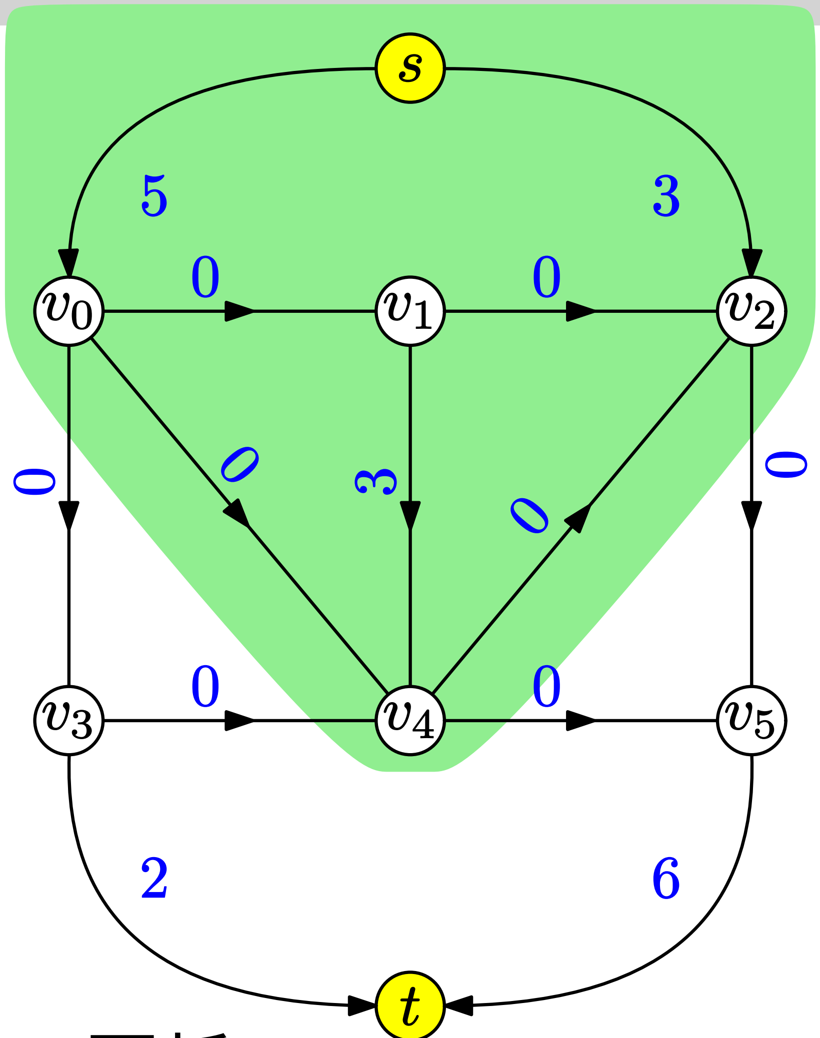


最大流のネットワークを構成

正カットの探索

正カット：$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$



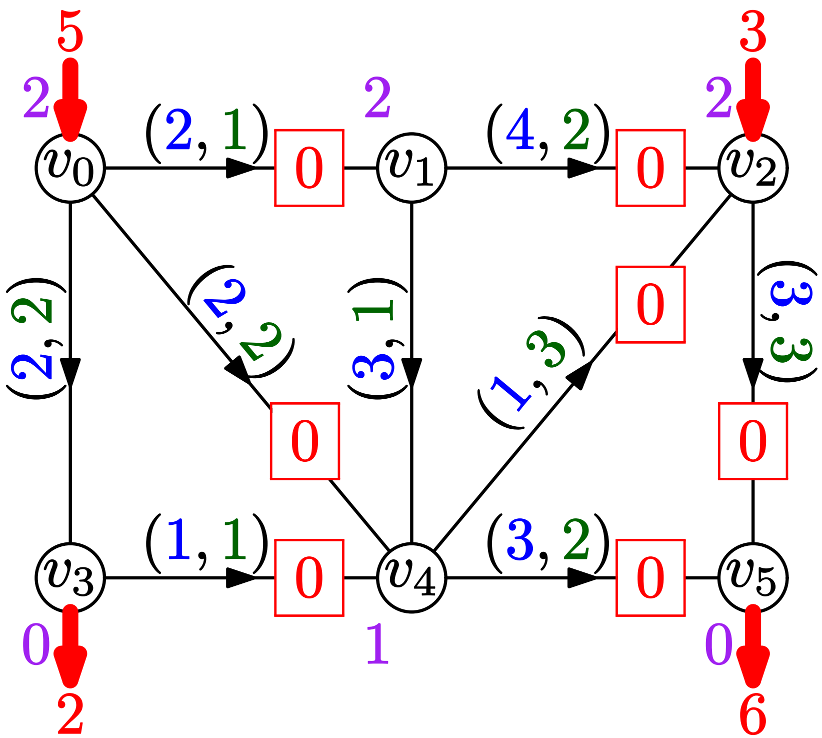


最大流のネットワークを構成

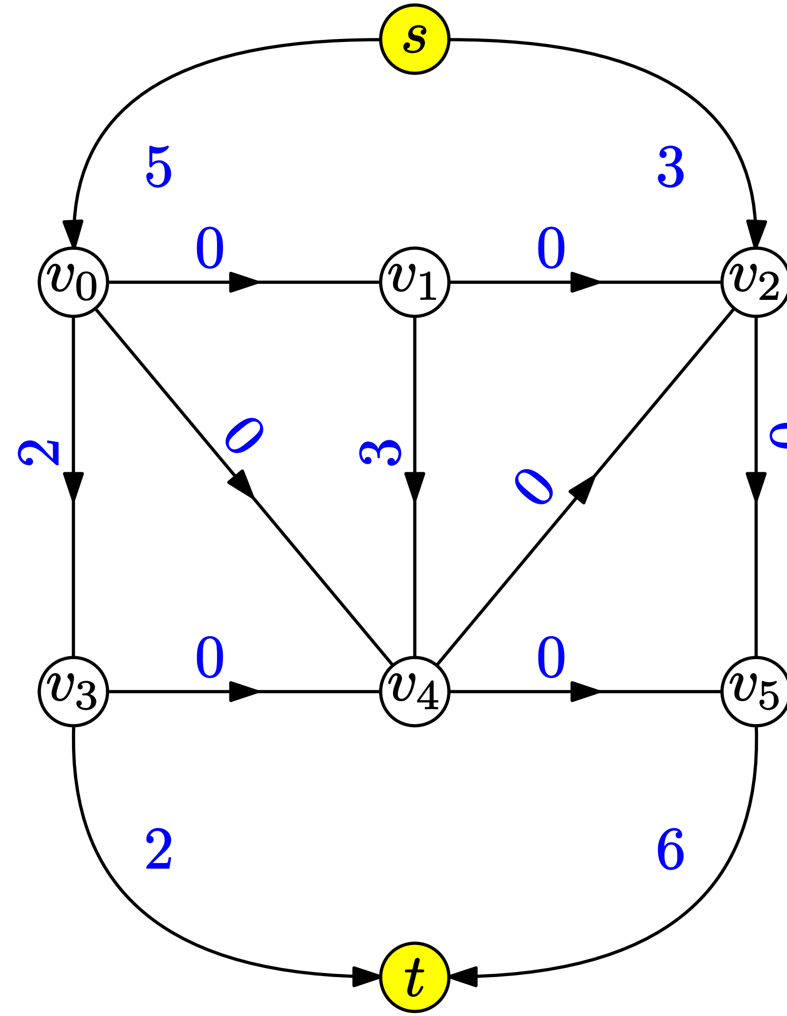
正カットの探索，ポテンシャルの更新

正カット：$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (3/5)

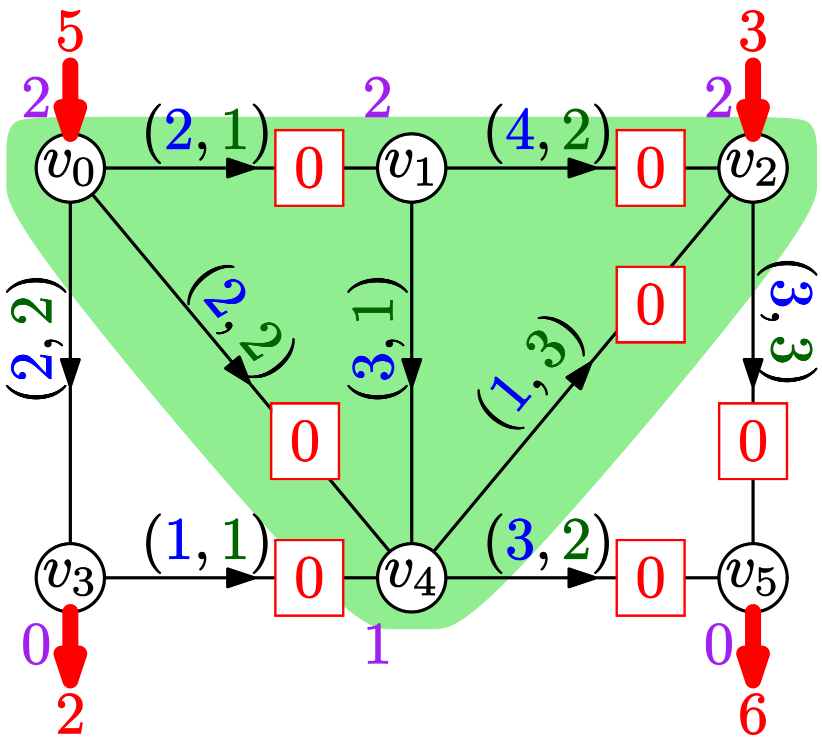


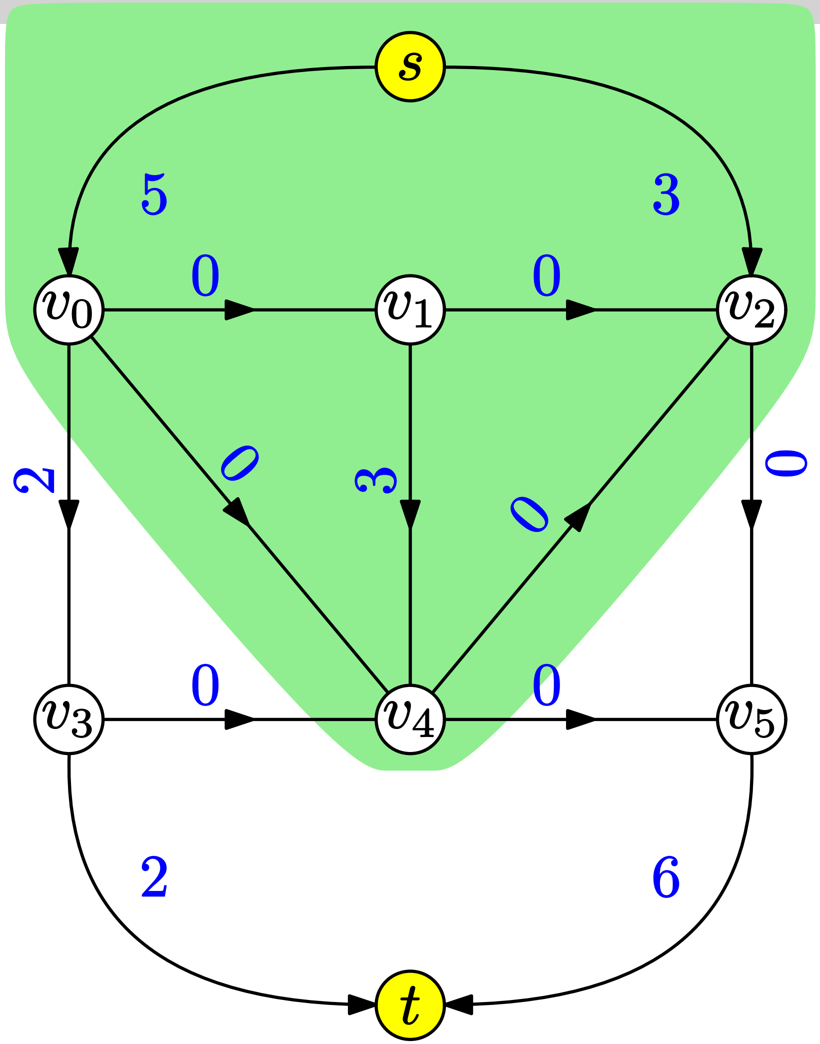
最大流のネットワークを構成



正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (3/5)



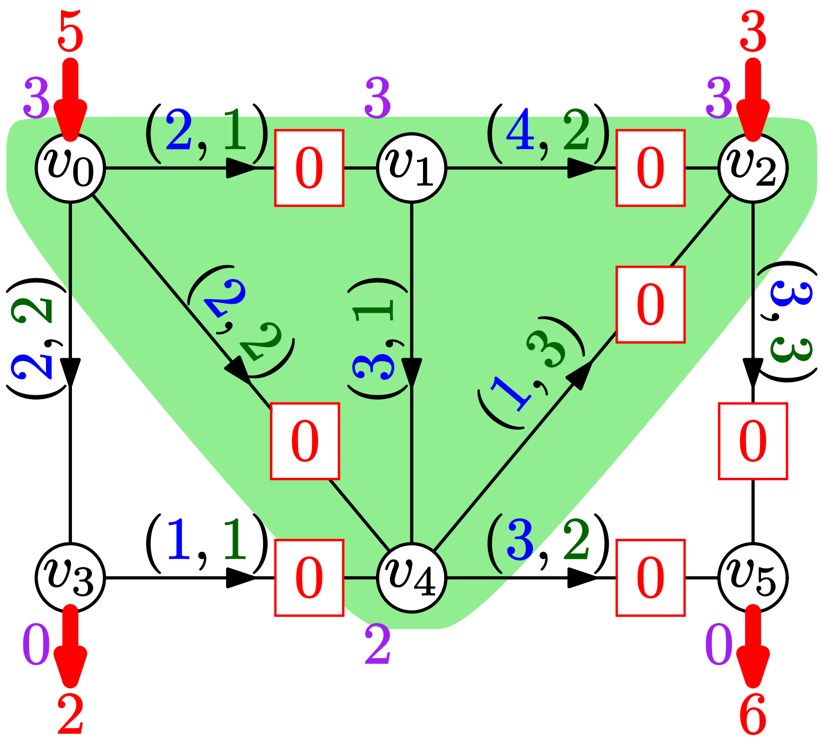


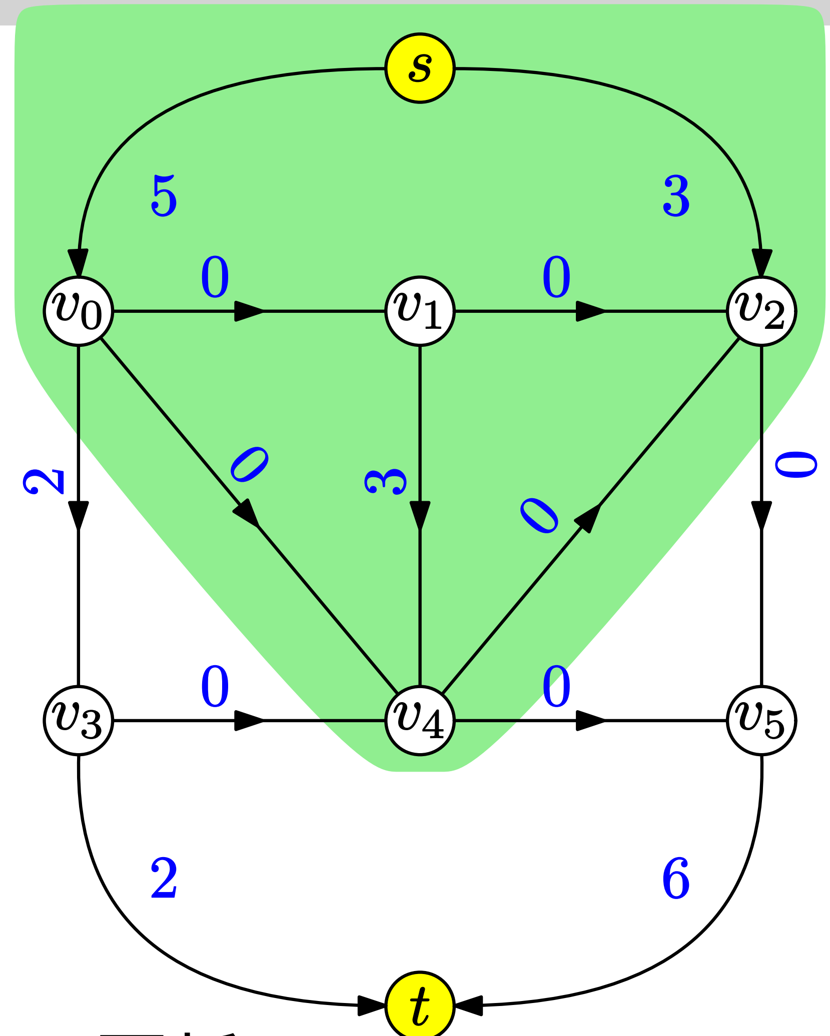
最大流のネットワークを構成

正カットの探索

正カット：$\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (3/5)



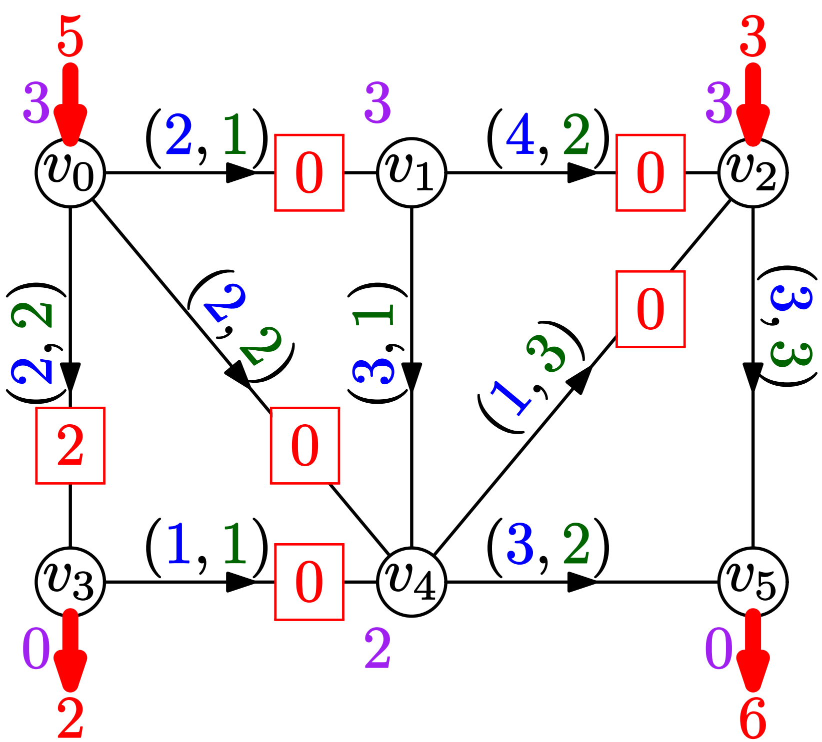


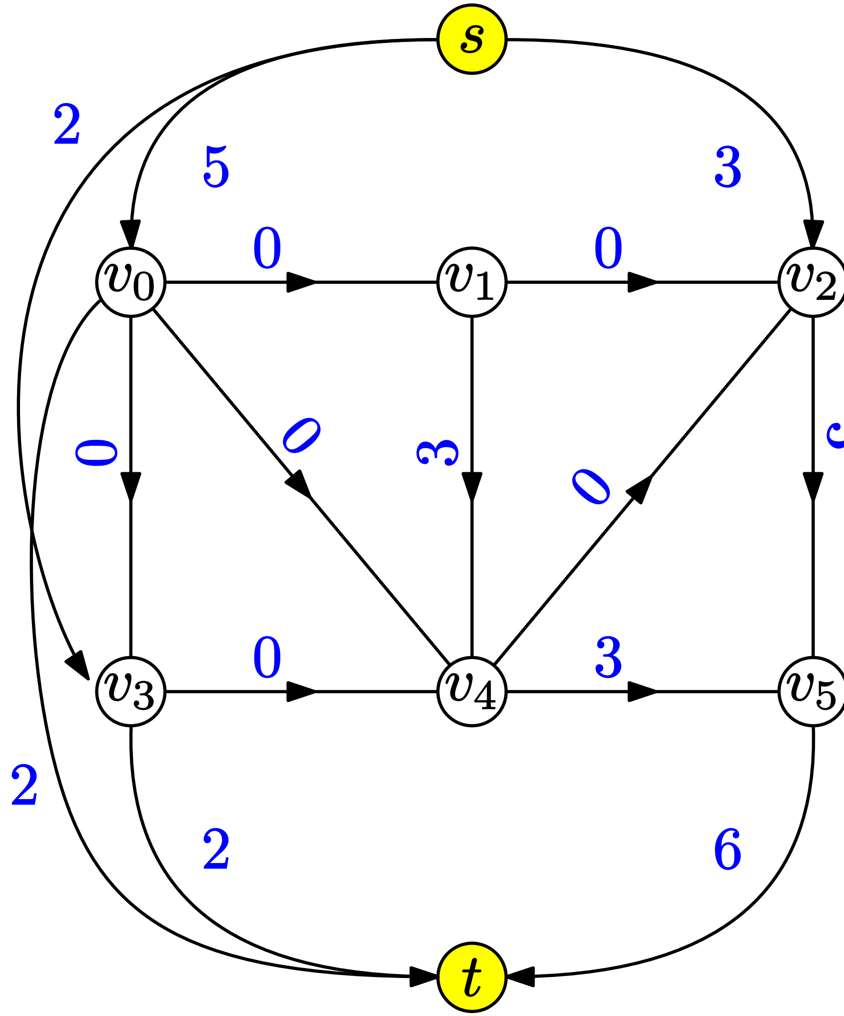
最大流のネットワークを構成

正カットの探索，ポテンシャルの更新

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (4/5)

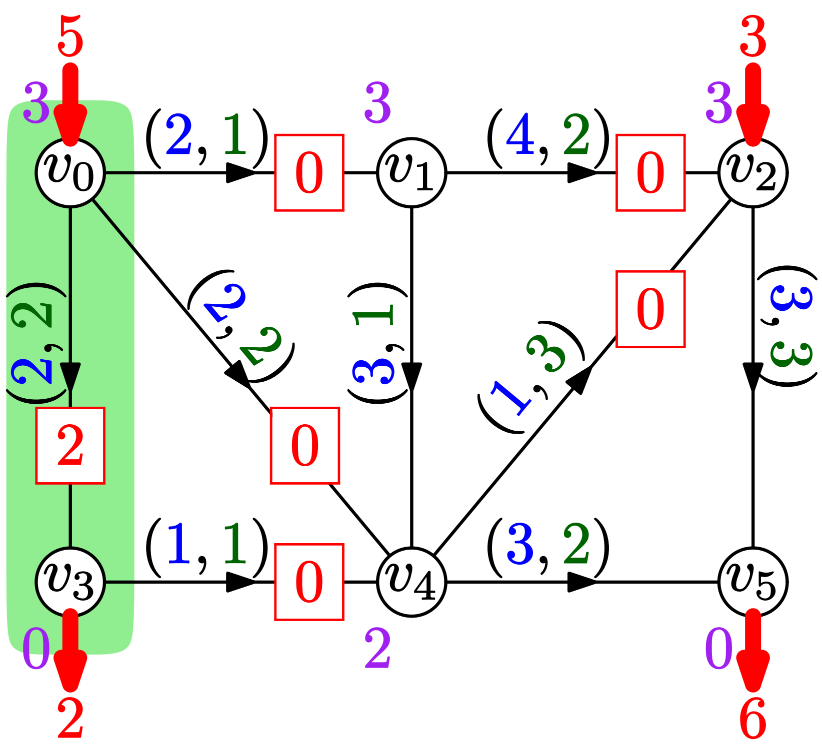


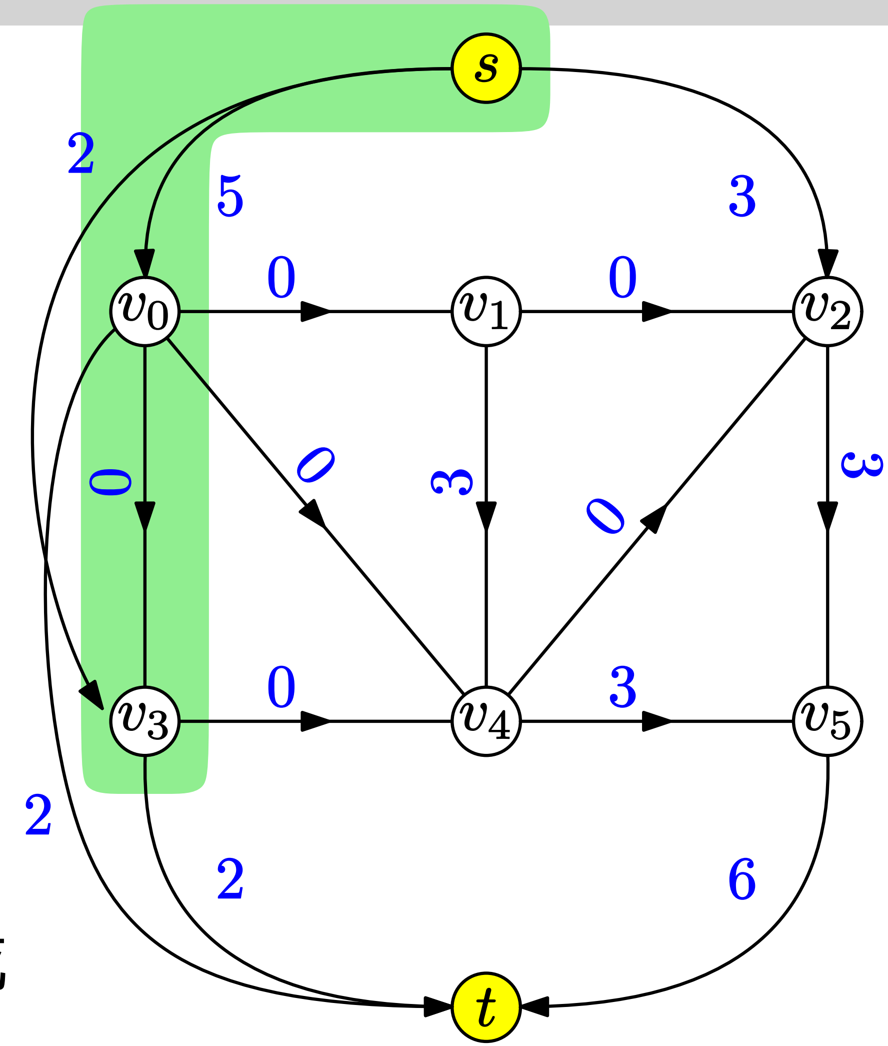


最大流のネットワークを構成

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (4/5)

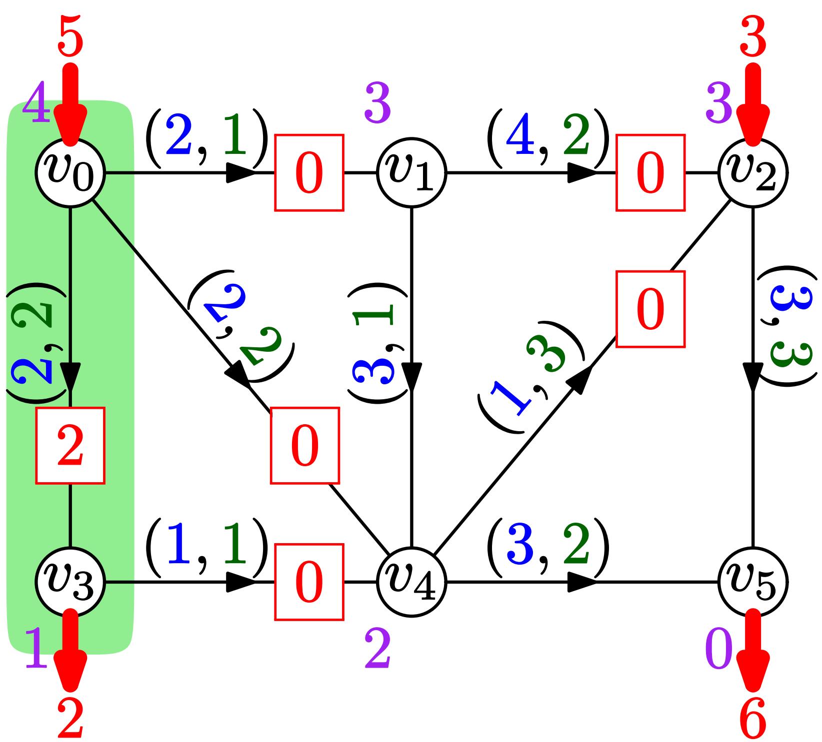


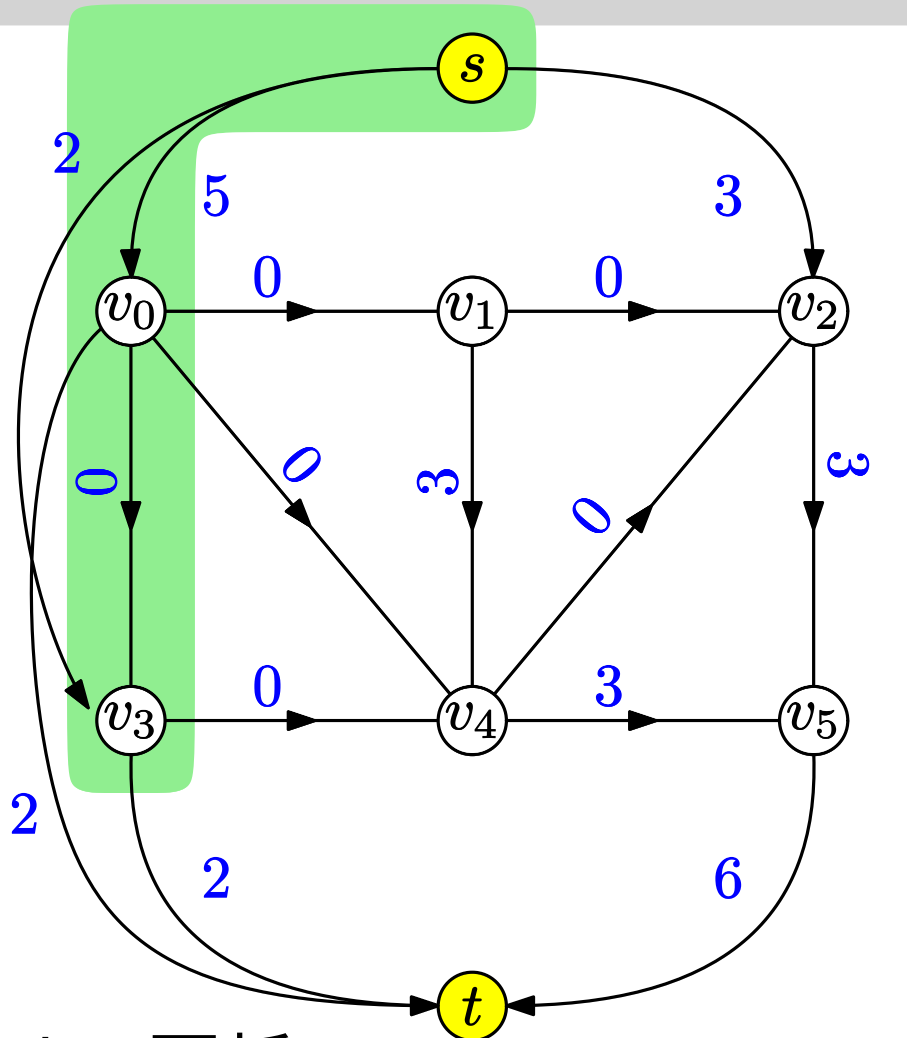


- 最大流のネットワークを構成
- 正カットの探索

正カット：$\displaystyle\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (4/5)



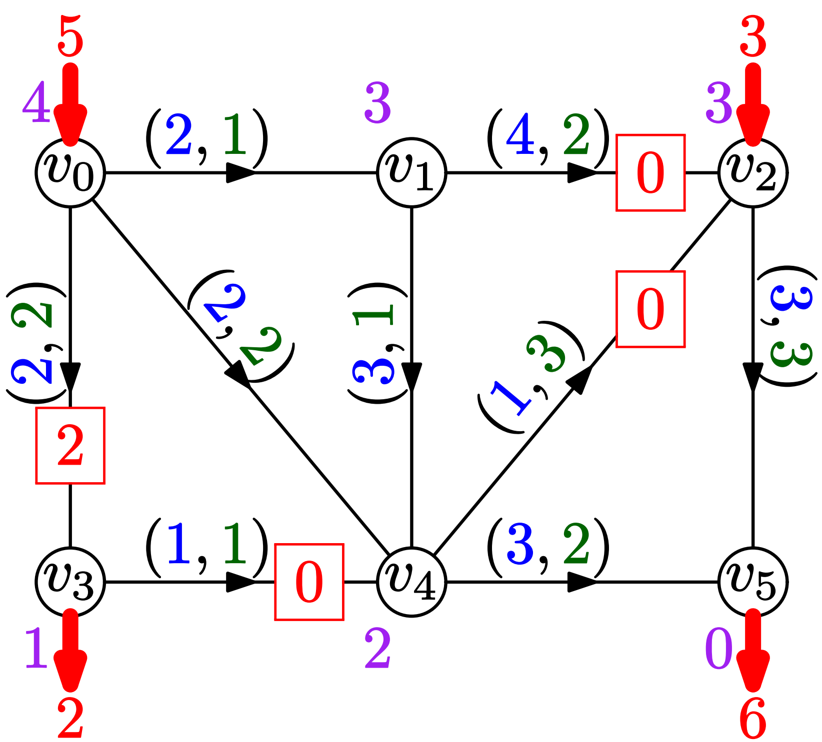


最大流のネットワークを構成

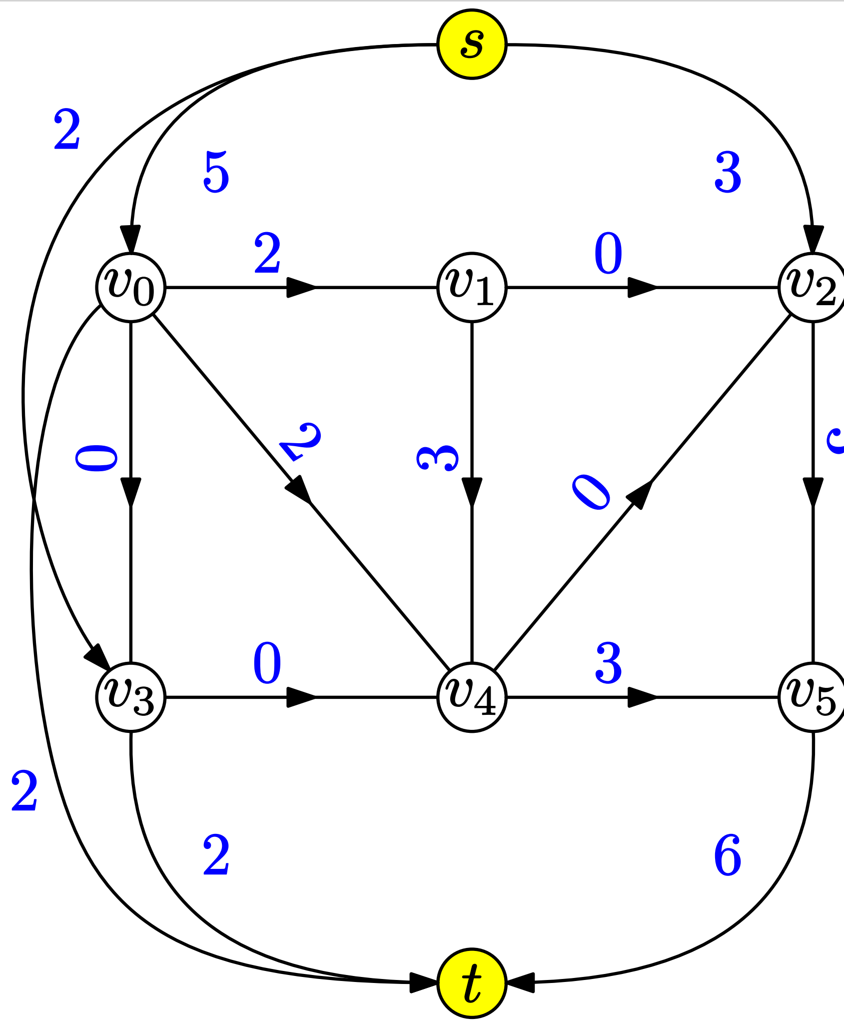
正カットの探索，ポテンシャルの更新

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v< 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (5/5)

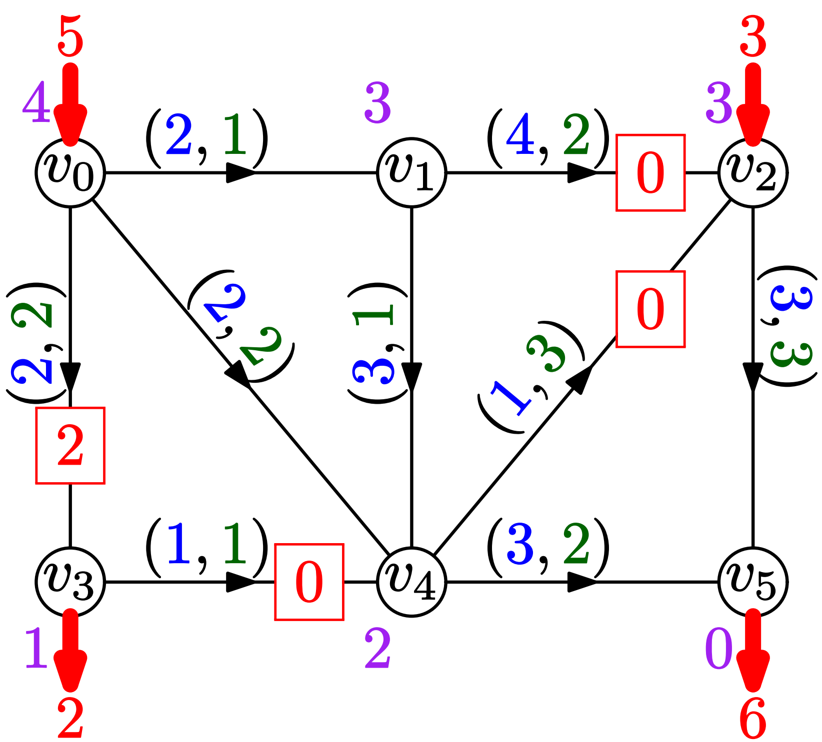


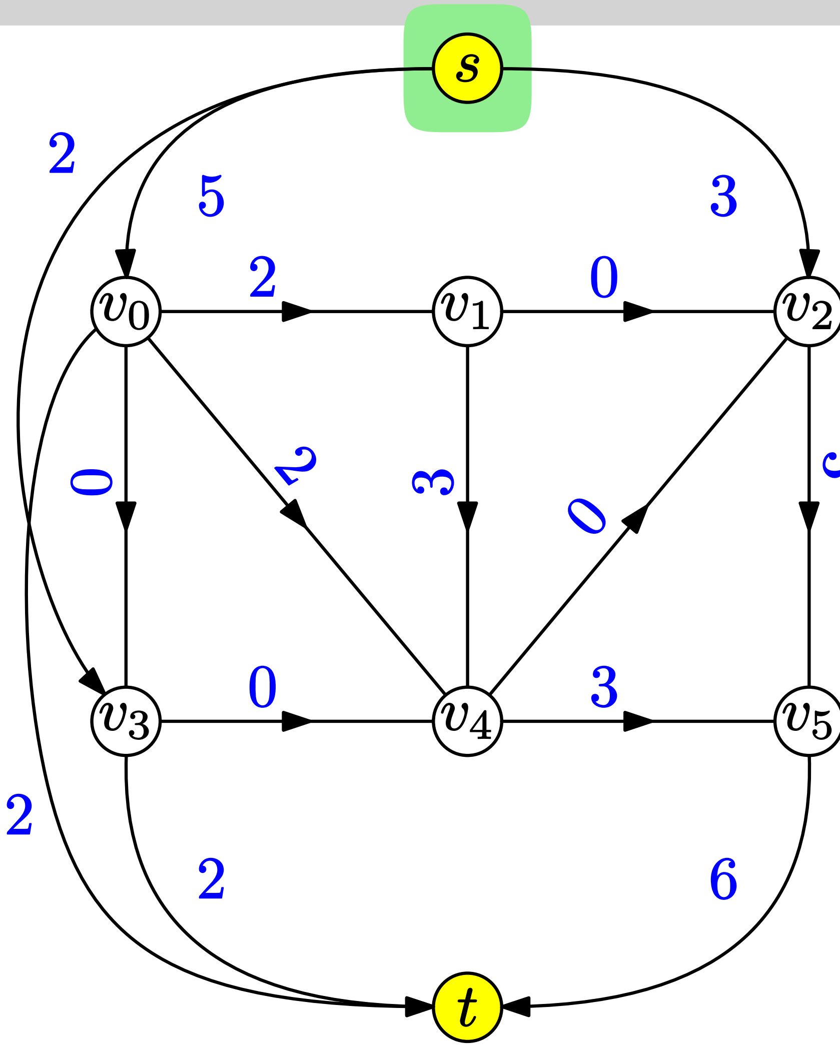
最大流のネットワークを構成



正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v< 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (5/5)



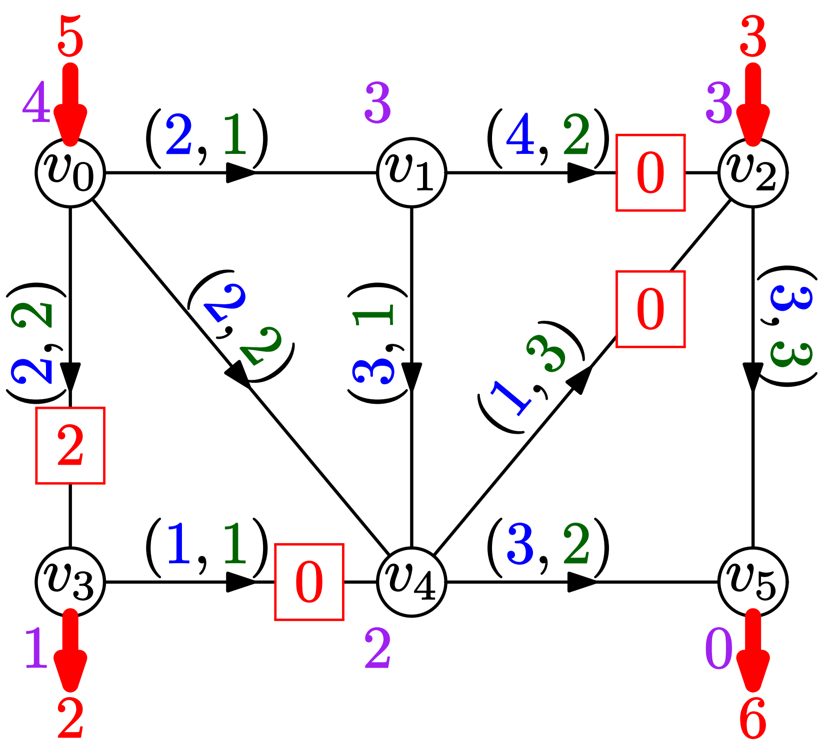


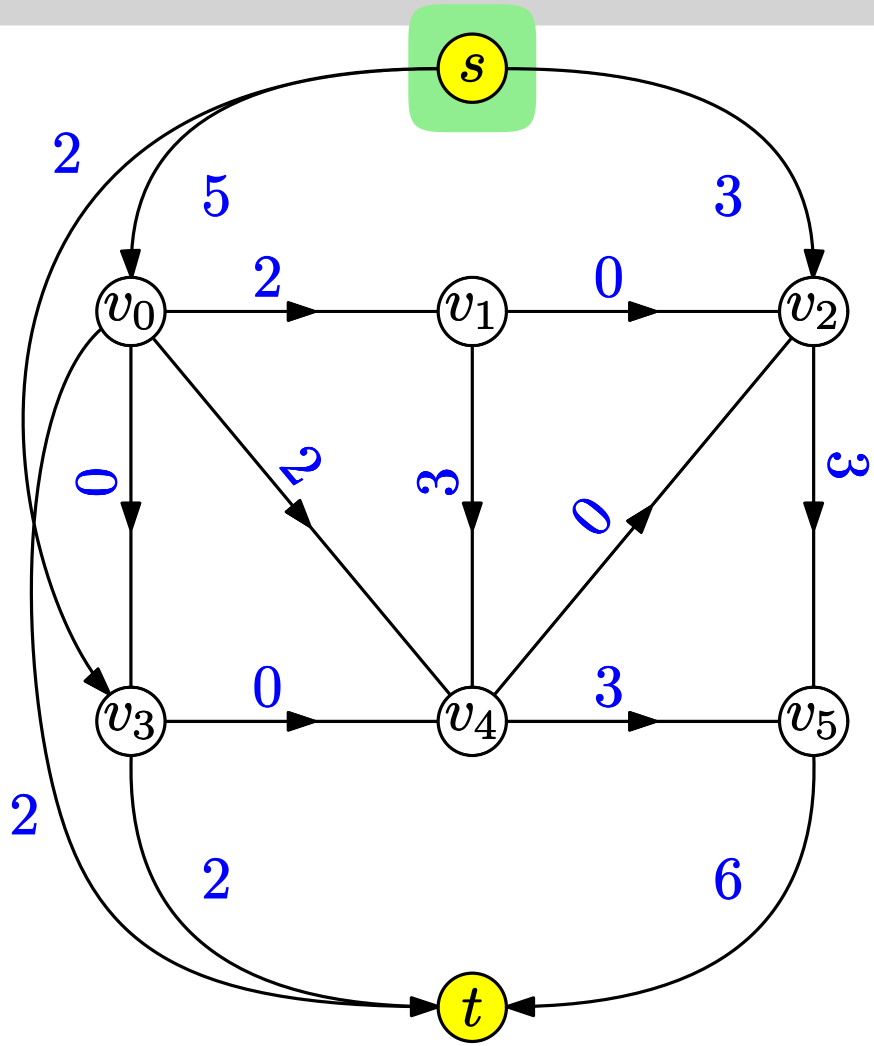
最大流のネットワークを構成

正カットの探索

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (5/5)



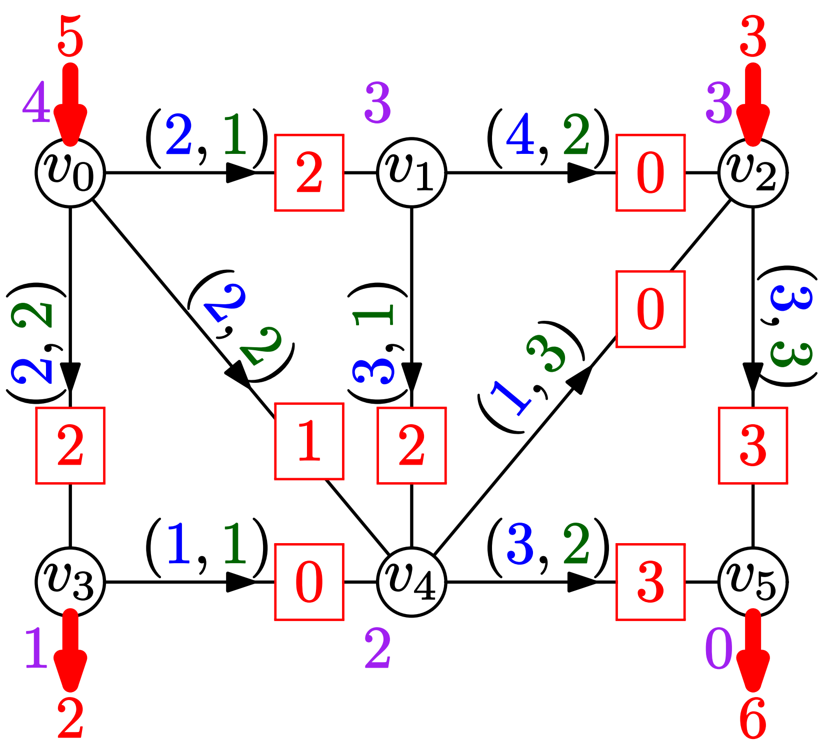


最大流のネットワークを構成

正カットの探索，存在しない

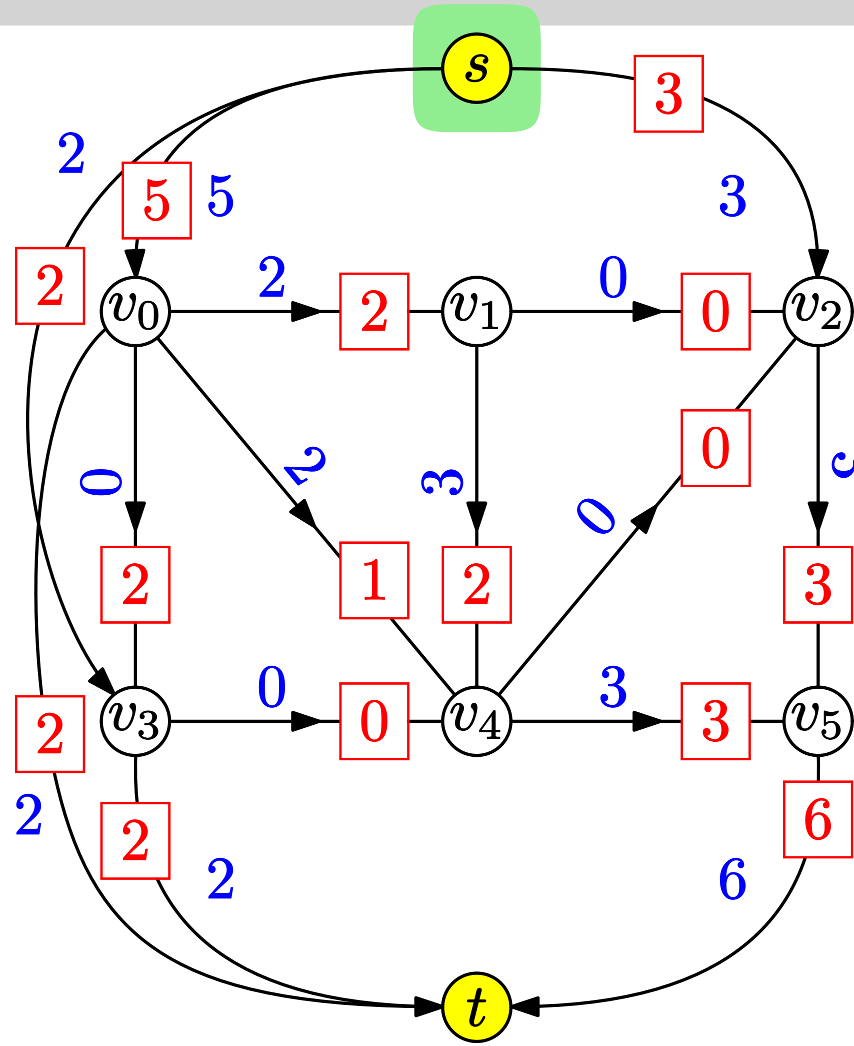
正カット：$\displaystyle\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：例 (5/5)



最大流のネットワークを構成

正カットの探索，存在しない



$\rightsquigarrow$ 最小費用 b-流の計算

正カット：$\displaystyle\sum_{v\in S} b_v - \sum_{\substack{uv\in\delta^+(S),\\ c_{uv}-p_u+p_v\le 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv\in\delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv}-p_u+p_v<0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法

最適ポテンシャル問題に対するアルゴリズム

アルゴリズム：正カット消去法　　(Hassin '83)

- 初期化：任意のポテンシャル p
- 反復：正カット S が存在する限り，次を実行
  - S の頂点のポテンシャルを一律に増加
- p を出力

ある $uv \in \delta^+(S)$ が新たに $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ を満たすか，
ある $uv \in \delta^+(\overline{S})$ が新たに $c_{uv} - p_u + p_v = 0$ を満たすまで

正カット：$\displaystyle\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S),\\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}),\\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カット消去法：正当性

最適ポテンシャル問題に対するアルゴリズム

アルゴリズム：正カット消去法　(Hassin '83)

- 初期化：任意のポテンシャル p
- 反復：正カット S が存在する限り，次を実行
  - S の頂点のポテンシャルを一律に増加
- p を出力

性質：正カット消去法の正当性

正カット消去法が停止する $\Rightarrow$
出力 p は最適ポテンシャルである

証明：正カット最適性条件より □

正カット消去法と双対問題 (1/2)

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & -\sum_{a \in A} u_a z_a + \sum_{v \in V} b_v y_v \\
\text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv} \qquad \forall\, uv \in A, \\
& z_a \geq 0 \qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

$$y_v = p_v$$
$$z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\}$$

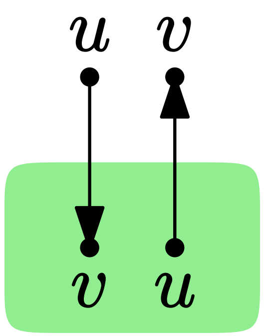
第 9 回講義スライド
35 ページ参照

$$\text{max.} \quad -\sum_{uv \in A} u_{uv} \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\} + \sum_{v \in V} b_v p_v$$

正カットの消去により，

目的関数値は必ず増加する $\rightsquigarrow$ なぜ？ (次ページ)

$$\text{max.} \quad -\sum_{uv \in A} u_{uv} \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\} + \sum_{v \in V} b_v p_v$$



正カット S において，

p_v を $p_v + \varepsilon$ とする ($\forall\, v \in S$， $\varepsilon > 0$: 微小)

更新後の目的関数値 − 更新前の目的関数値

$$= -\sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - (p_u + \varepsilon) + p_v \leq 0}} u_{uv}\varepsilon - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + (p_v + \varepsilon) \leq 0}} u_{uv}(-\varepsilon) + \sum_{v \in S} b_v \varepsilon$$

$$= -\sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv}\varepsilon + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv}\varepsilon + \sum_{v \in S} b_v \varepsilon > 0$$

正カット : $\displaystyle\sum_{v \in S} b_v - \sum_{\substack{uv \in \delta^+(S), \\ c_{uv} - p_u + p_v \leq 0}} u_{uv} + \sum_{\substack{uv \in \delta^+(\overline{S}), \\ c_{uv} - p_u + p_v < 0}} u_{uv} > 0$

正カットの選択に工夫なし

停止しない場合がある

正カットの選択に工夫あり

最大平均カット消去法 (maximum mean cut canceling algo.)
(Ervolina, McCormick ’93)

計算量：$O(n^2m^2\underline{\mathrm{MF}})$ (強多項式時間)

最大流問題の計算量

正カット消去法と相補性定理

相補性定理：f, y, z が最適解

$$\Leftrightarrow \text{主許容性} + \text{双対許容性} + \text{相補性条件}$$

正カット消去法に対する視点

双対許容性
相補性
を満たしたまま **主許容性** を満たしに行く

$$\begin{array}{ccc}
\text{(主非許容解)}\ f & \xrightarrow{\text{更新}} & f\ \text{(主許容解)} \\
\text{相補性}\ \updownarrow & & \updownarrow\ \text{相補性} \\
\text{(双対許容解)}\ \text{ポテンシャル}\ p & \xrightarrow{\text{更新}} & p\ \text{(双対許容解)}
\end{array}$$

まとめと予告

最小費用流問題

最適性条件 → アルゴリズム

- 簡約費用最適性条件
- 負閉路最適性条件
- **正カット最適性条件**

- 次回
- 負閉路消去法
- **正カット消去法**

次回の内容

- アルゴリズム：逐次最短路法