離散最適化基礎論

第 10 回

最小費用流問題：負閉路消去法

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 12 月 19 日

最終更新：2023 年 12 月 19 日　08:22

スケジュール (前半)

1. 最大流と最小費用流：定義 (10/3)
2. 最大流問題：増加道法 (10/10)

＊ 休み (10/17)

3. 線形計画法の復習 (10/24)
4. 最大流問題：線形計画問題として (10/31)
5. 最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム (11/7)
6. 最大流問題：容量スケーリング法 (11/14)
7. 最大流問題：Push-Relabel 法 (概要) (11/21)
8. 最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価) (11/28)

スケジュール (後半)

*	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
*	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
*	休み	(1/30)

第 11 回はオンデマンド

(10:40 に動画公開，18:00 までにコメント投稿)

[復習] b-流：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$

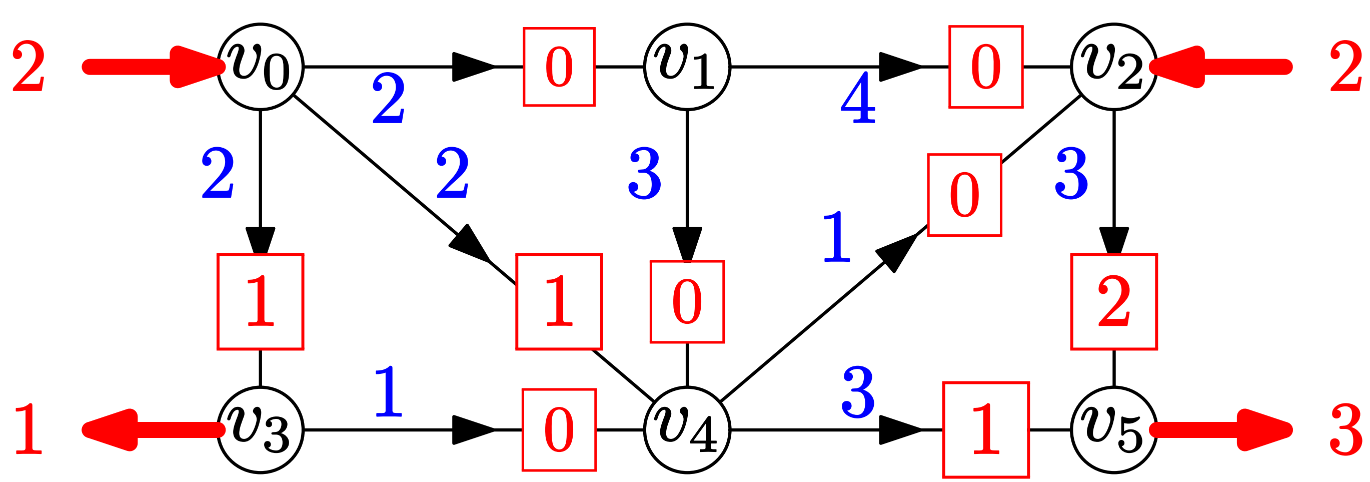
$b\colon V \to \mathbb{R}$ (負の値をとってもよい)

定義：b-流 (b-flow)

b-流 とは 次を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して，$0 \le f(a) \le u(a)$
2. 任意の頂点 $v \in V$ に対して，

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$



$b(v_0) = 2,$
$b(v_1) = 0,$
$b(v_2) = 2,$
$b(v_3) = -1,$
$b(v_4) = 0,$
$b(v_5) = -3$

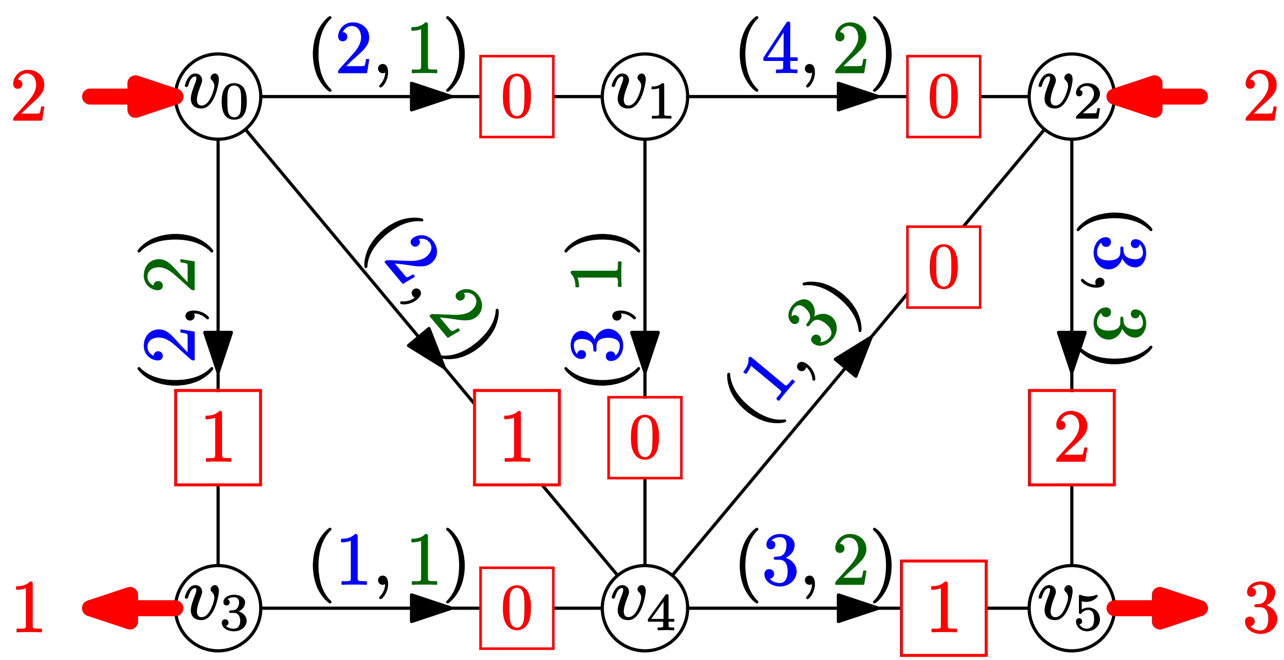
[復習] b-流の費用：定義

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$
弧費用関数 $c\colon A\to\mathbb{R}_+$，$b\colon V\to\mathbb{R}$，b-流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

定義：b-流の費用

b-流 f の**費用** を次の式で定義する

$$\mathrm{cost}(f)=\sum_{a\in A}c(a)f(a)$$



$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(f)&=0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2\\&\quad+0\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 3\\&\quad+0\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 2\\&=12\end{aligned}$$

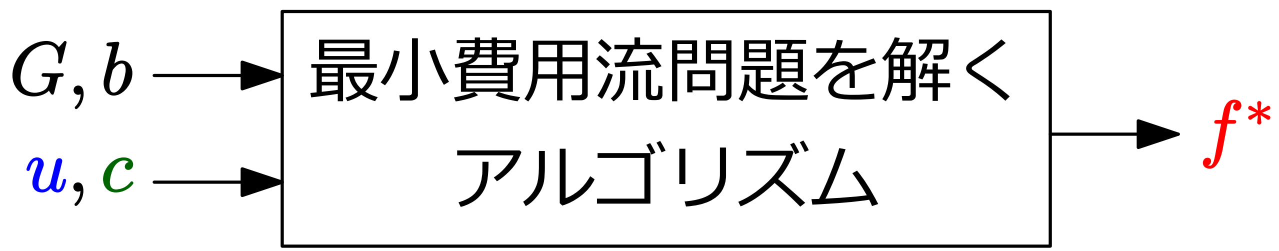
[復習] 最小費用流問題：定義

定義：最小費用流問題 (minimum-cost flow problem)

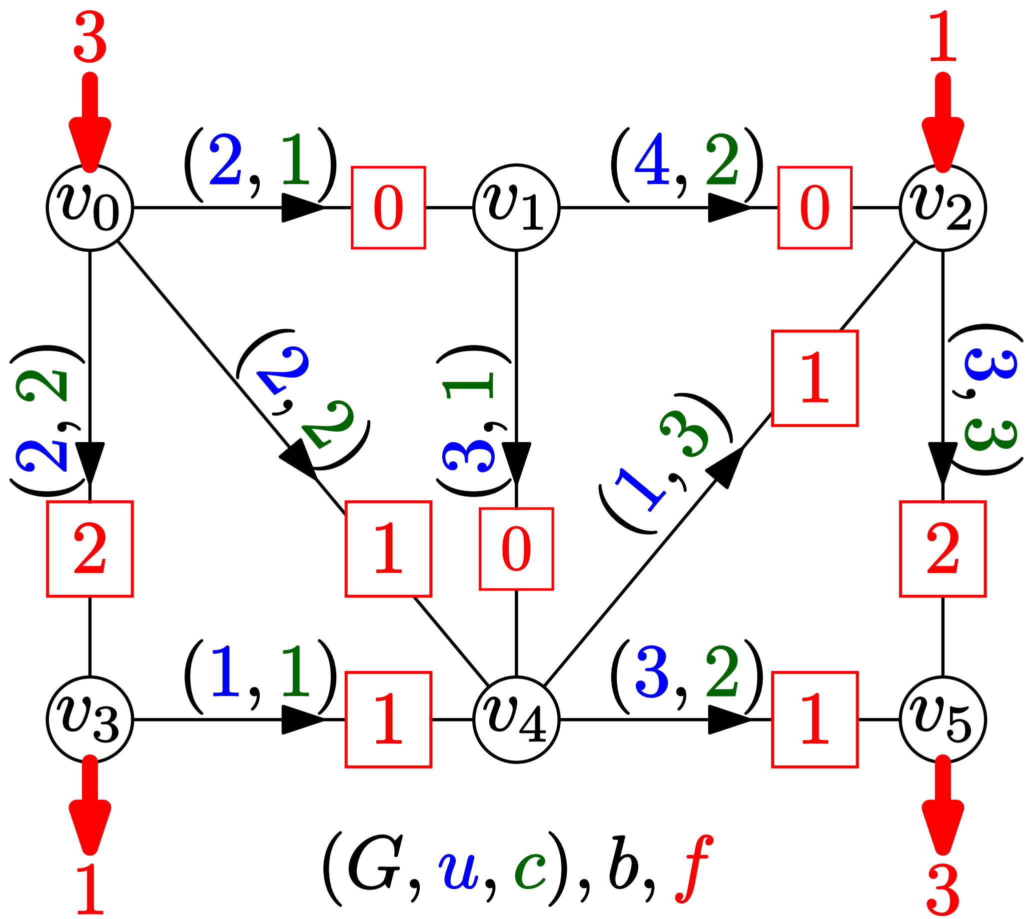
入力
- 有向グラフ $G = (V, A)$，関数 $b\colon V \to \mathbb{R}$
- 弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$

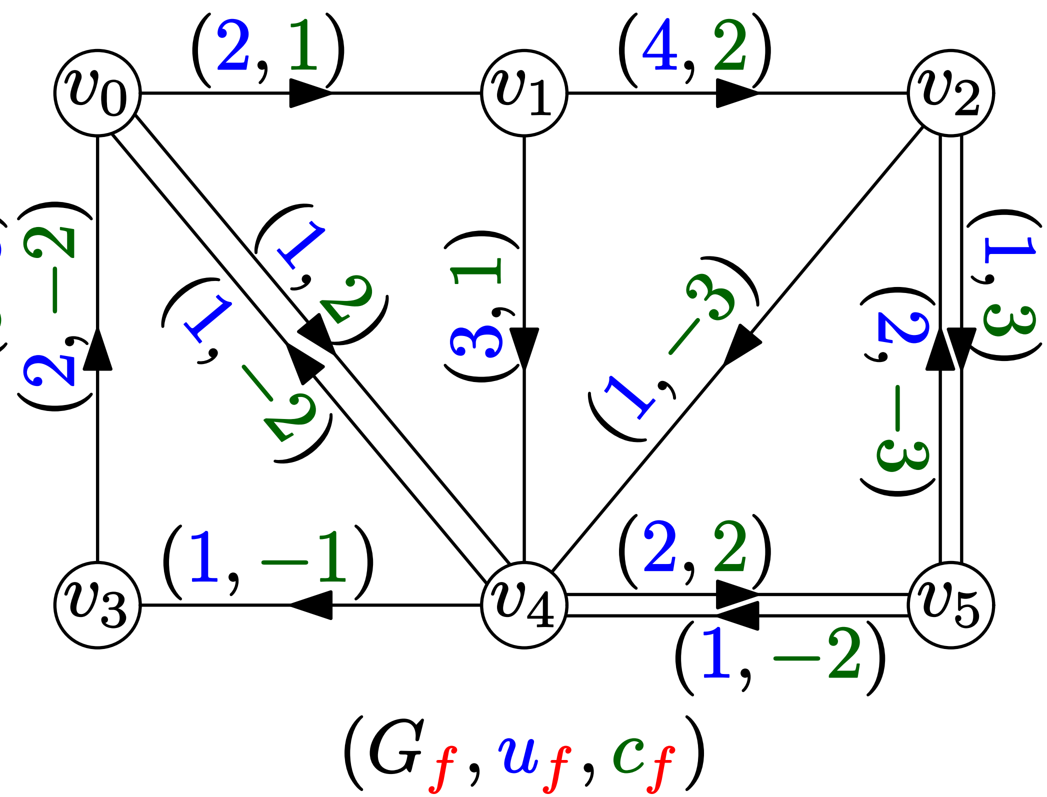
出力
- ネットワーク (G, u, c) に対する最小費用 b-流 f^*

任意の b-流 f に対して，$\mathrm{cost}(f^*) \leq \mathrm{cost}(f)$

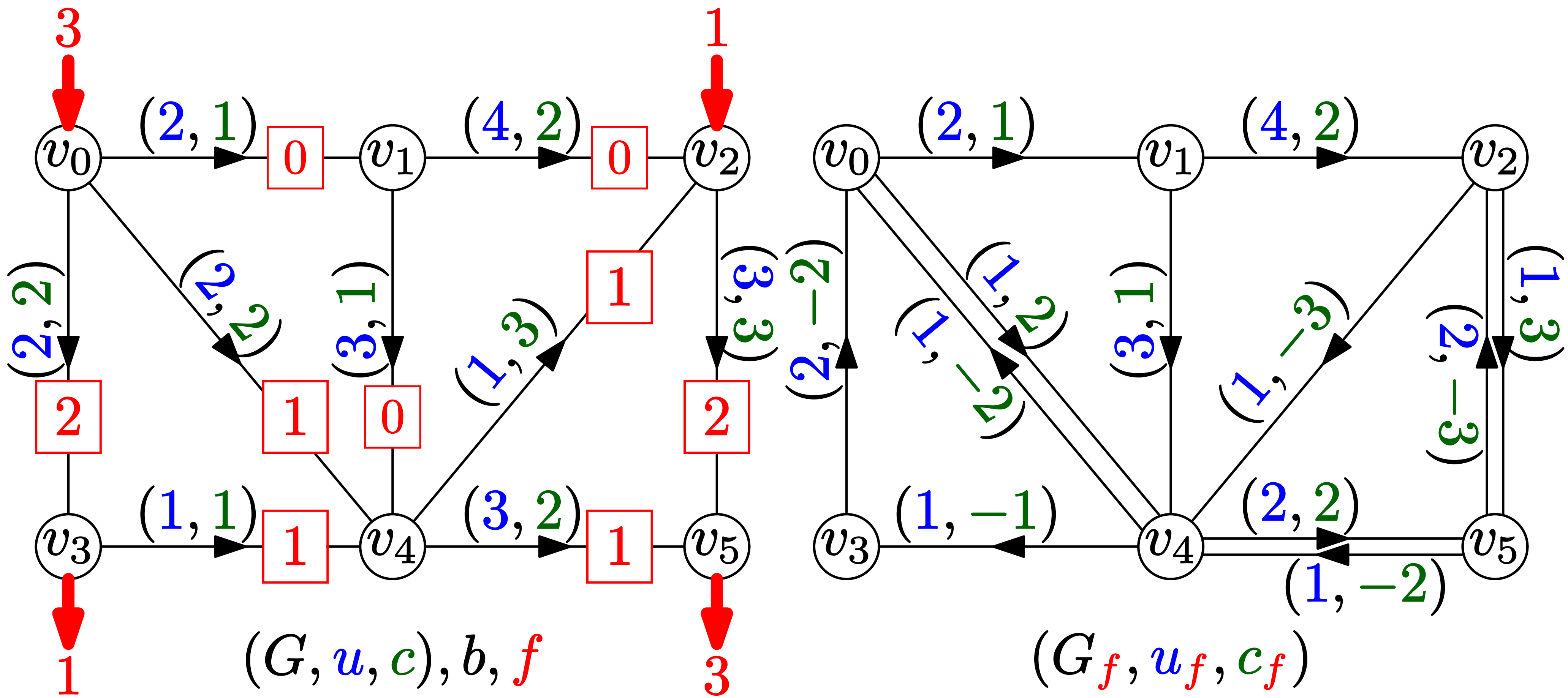


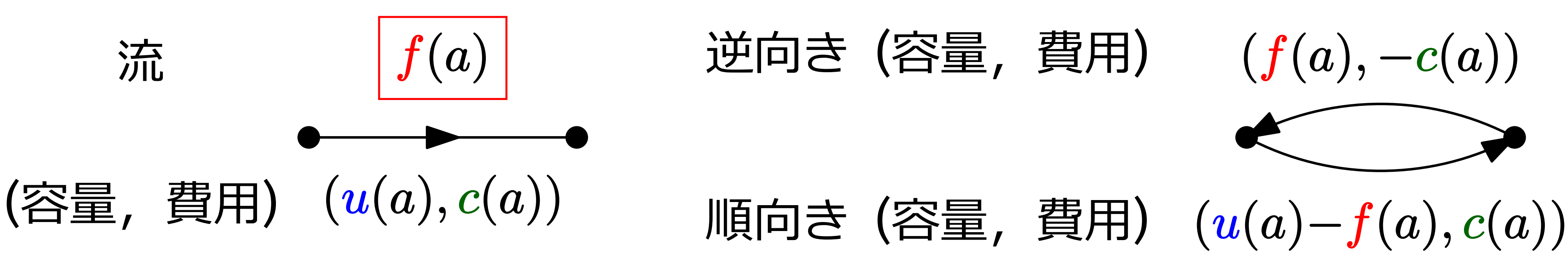
[復習] 補助ネットワーク：例





[復習] 補助ネットワーク：例





[復習] 簡約費用最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：簡約費用最適性条件 (Ford, Fulkerson '62)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在

- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して，$c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

前回のまとめ と 今回の内容

最小費用流問題

最適性条件 ——→ アルゴリズム

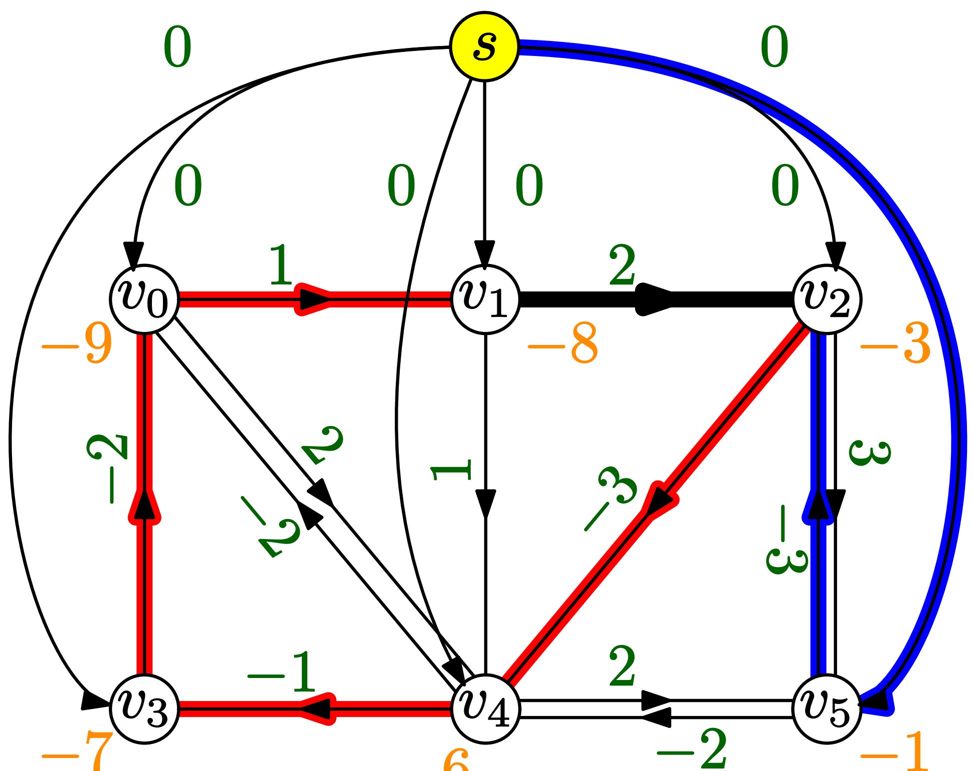
- **簡約費用最適性条件**
- 負閉路最適性条件
- 正カット最適性条件

- 次々回
- 今回
- 次回

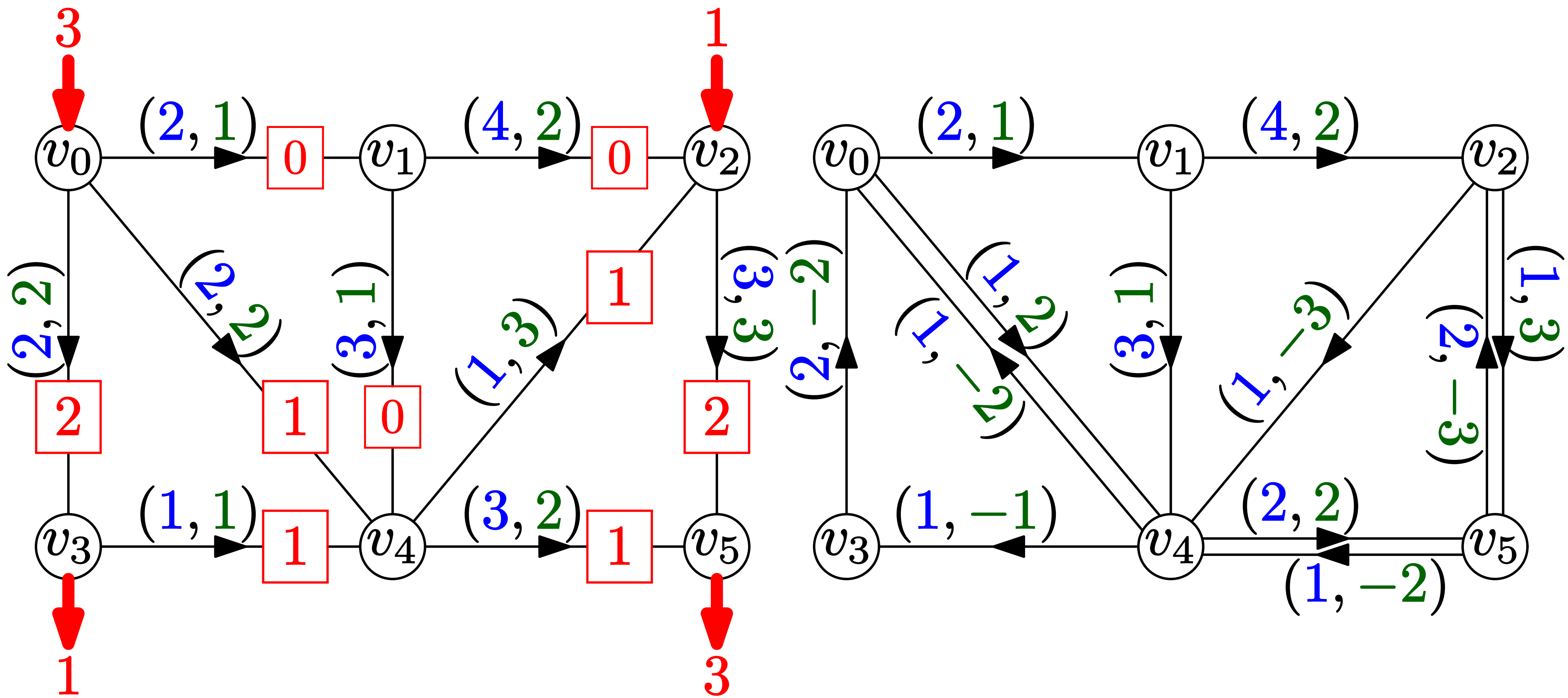
今回の内容

- 最適性条件：負閉路最適性条件
- アルゴリズム：負閉路消去法

1. **負閉路最適性条件**
2. 負閉路消去法

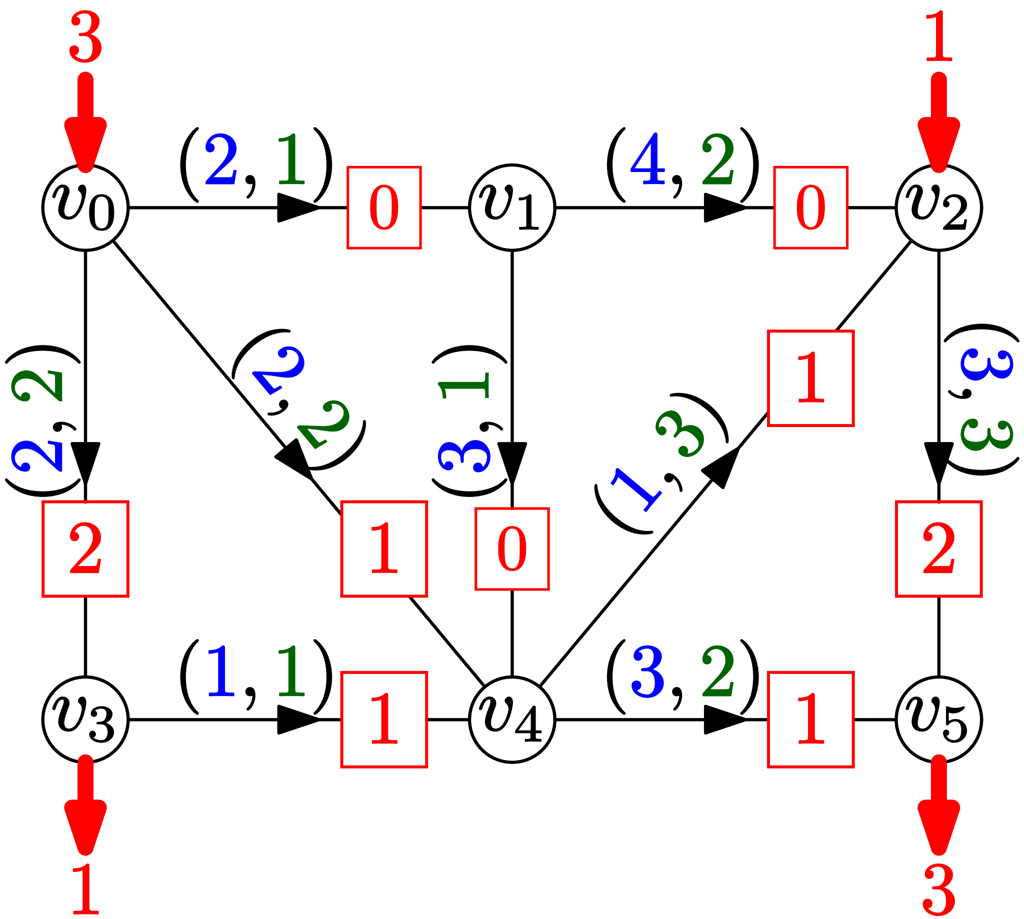


負閉路最適性条件：例

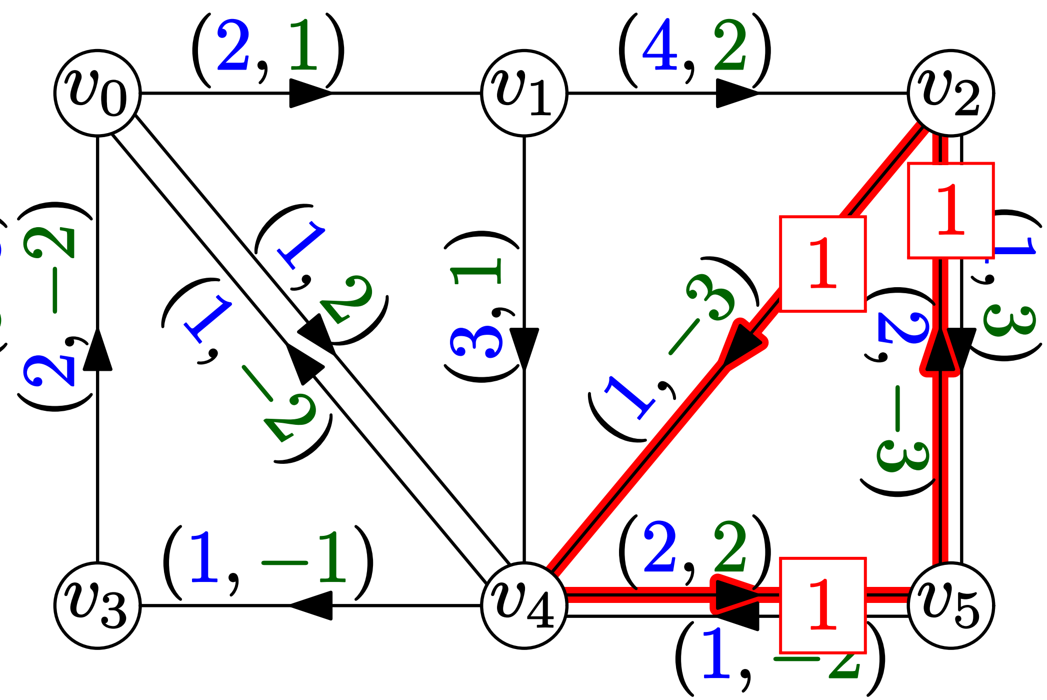


費用 $= 18$

負閉路最適性条件：例

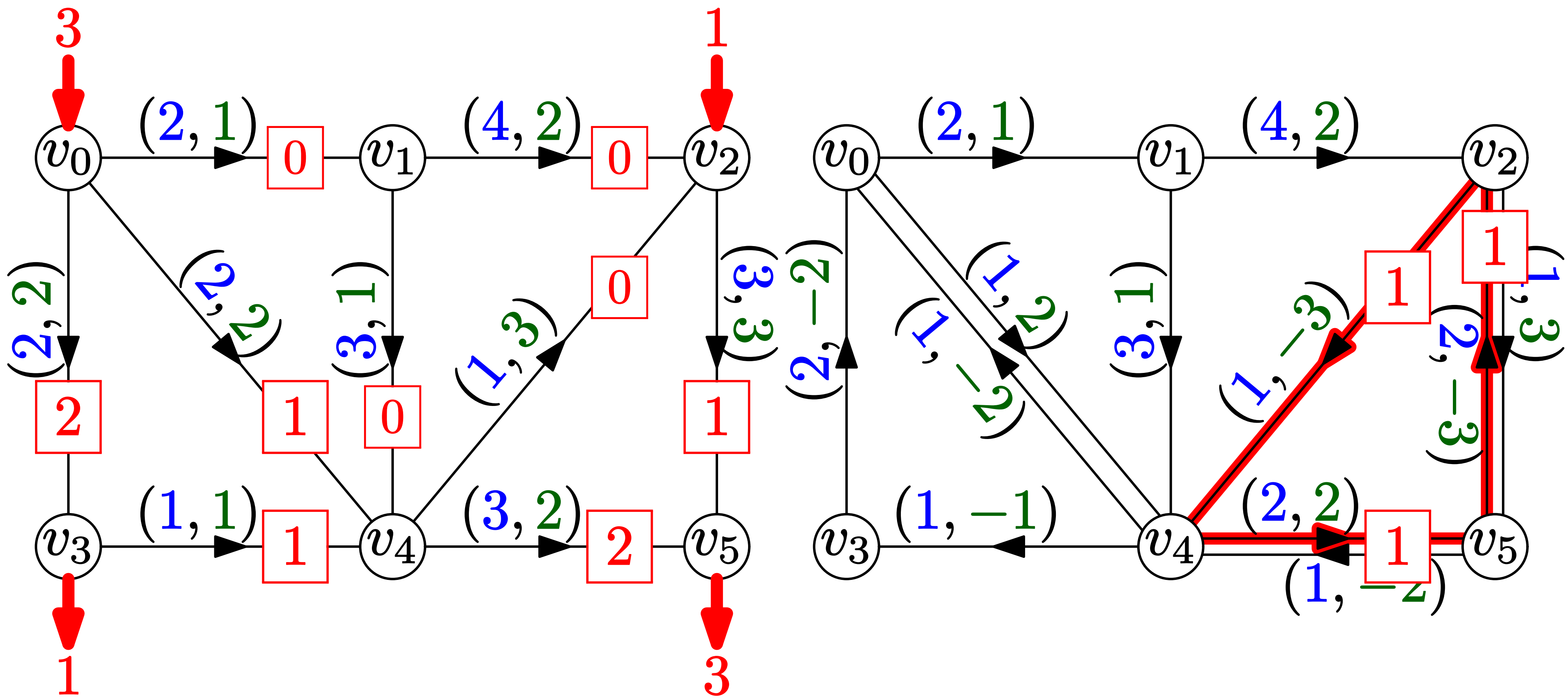


費用 $= 18$



費用 $= -4$

負閉路最適性条件：例



費用 $= 18$

↓

費用 $= 14$

費用 $= -4$

負閉路最適性条件に向けて

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

いま観察したこと

補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) の閉路 C で，
$\sum_{a \in C} c_f(a) < 0$ を満たすものが存在 $\Rightarrow$
f は (G, u, c) における最小費用 b-流ではない

以後，$\sum_{a \in C} c_f(a) < 0$ を満たす閉路 C を
補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) の **負閉路** と呼ぶことがある

負閉路最適性条件に向けて

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

いま観察したこと

補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) の閉路 C で，
$\sum_{a \in C} c_f(a) < 0$ を満たすものが存在 $\Rightarrow$
f は (G, u, c) における最小費用 b-流ではない

その対偶

f は (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Rightarrow$
補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) は負閉路を持たない

負閉路最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：負閉路最適性条件 (Busacker, Saaty ’65)

f は (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) は負閉路を持たない

$\Rightarrow$ の証明：例の状況を一般的に書けばよい

$\Leftarrow$ の証明：ここからの主題 (簡約費用最適性条件を用いる)

負閉路最適性条件：証明 (1/4)

$\Leftarrow$ の証明：補助ネットワークが負閉路を持たないと仮定

- このとき，次の条件を満たすポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ の存在を示せばよい

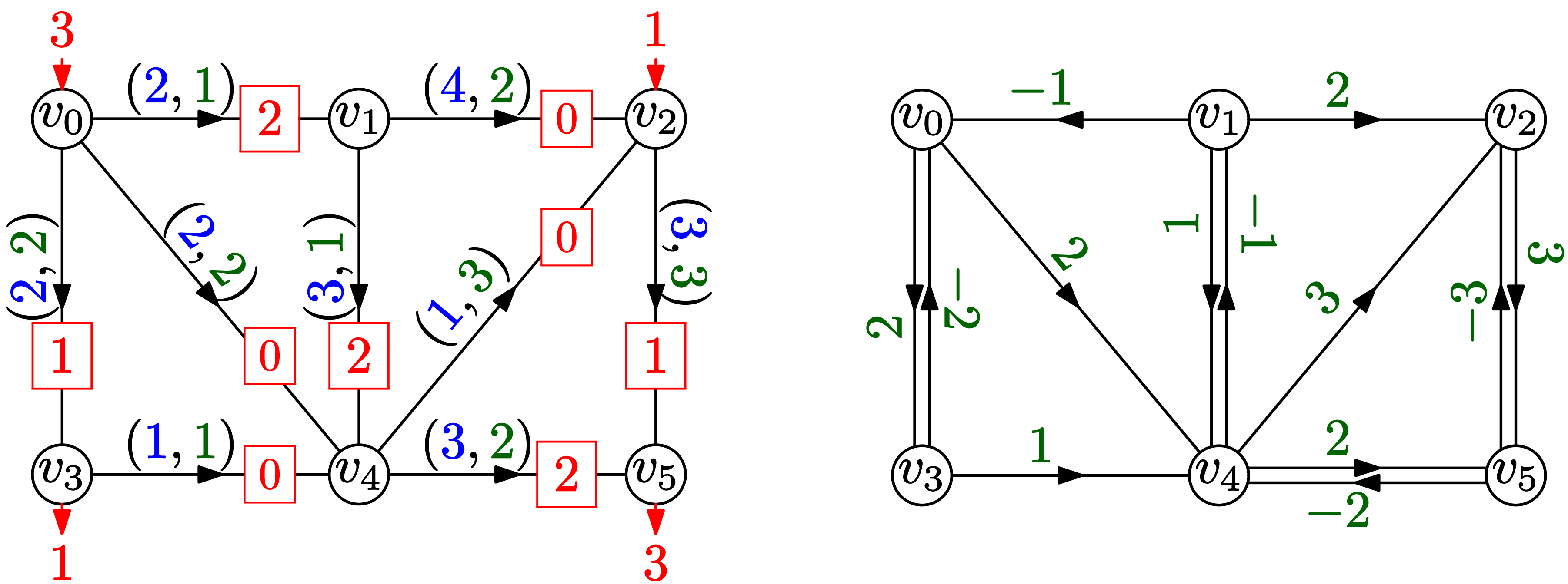
$$\text{任意の弧 } uv \in A_f \text{ に対して，} c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$$

- **これができれば**，簡約費用最適性条件より，f は最小費用 b-流である $\square$

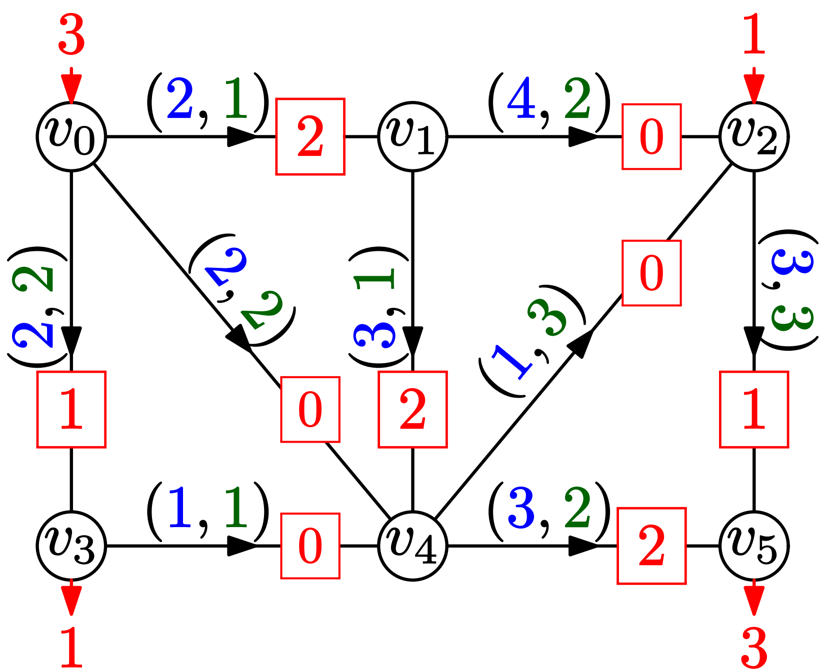
性質 (再掲)：簡約費用最適性条件　(Ford, Fulkerson ’62)

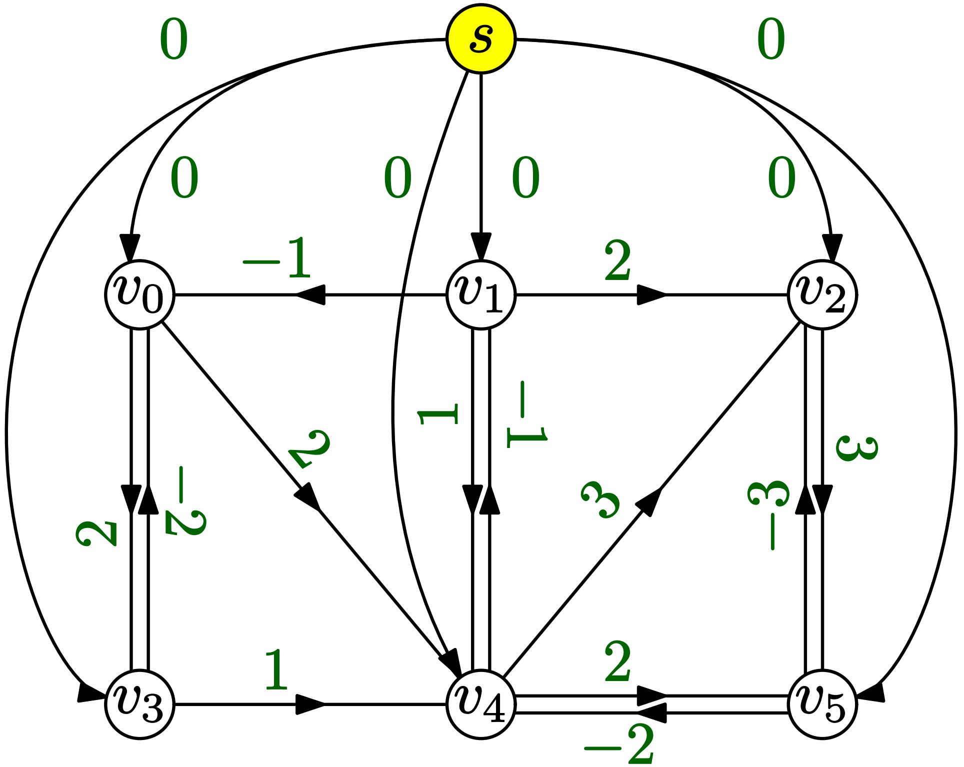
f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在
- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して，$c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

負閉路最適性条件：証明のアイディア

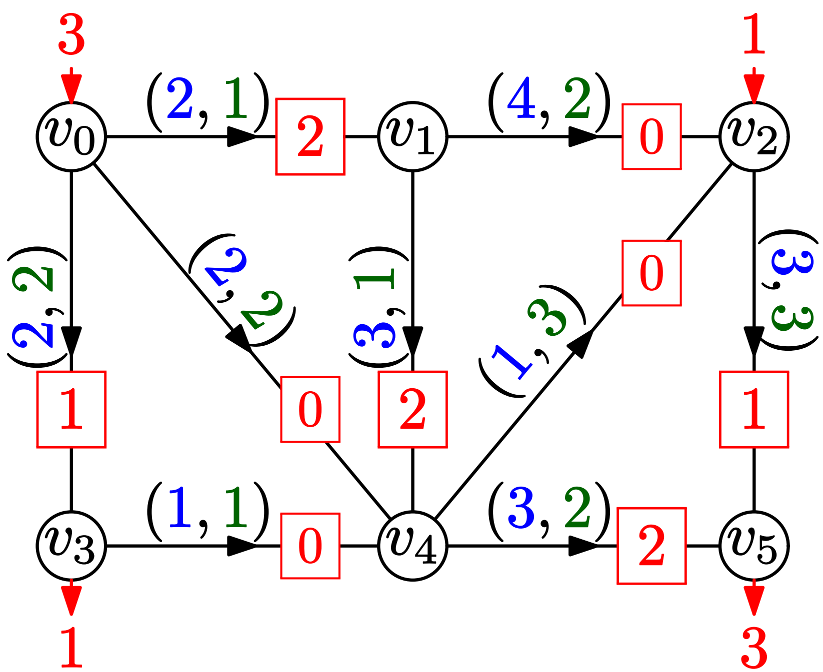


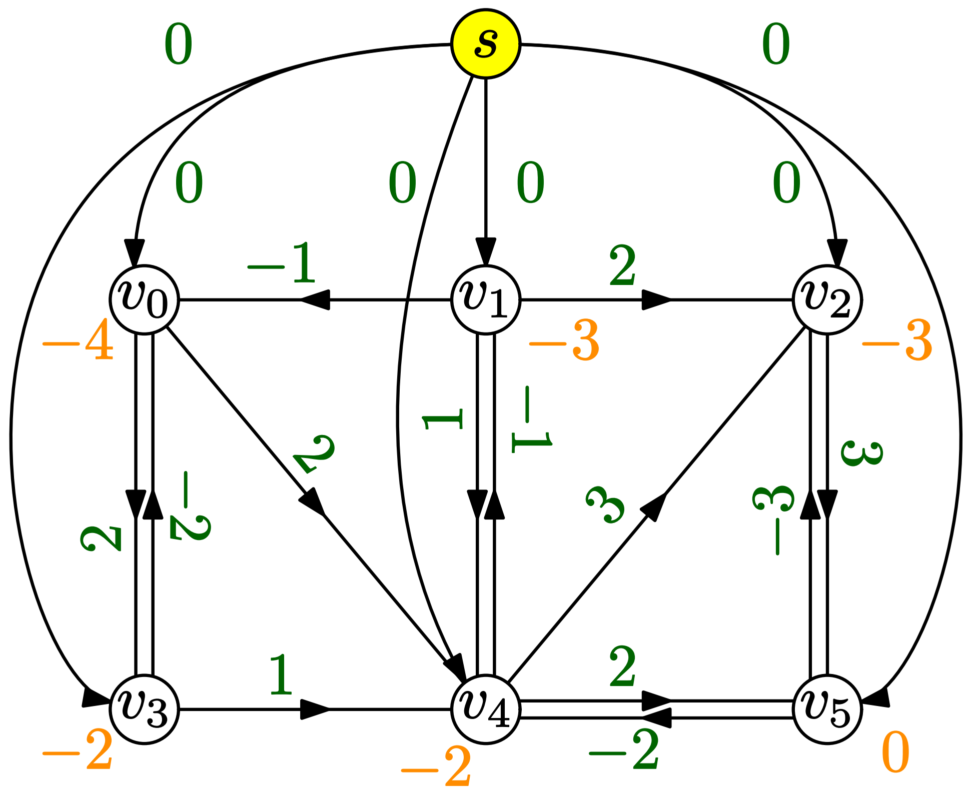
負閉路最適性条件：証明のアイディア



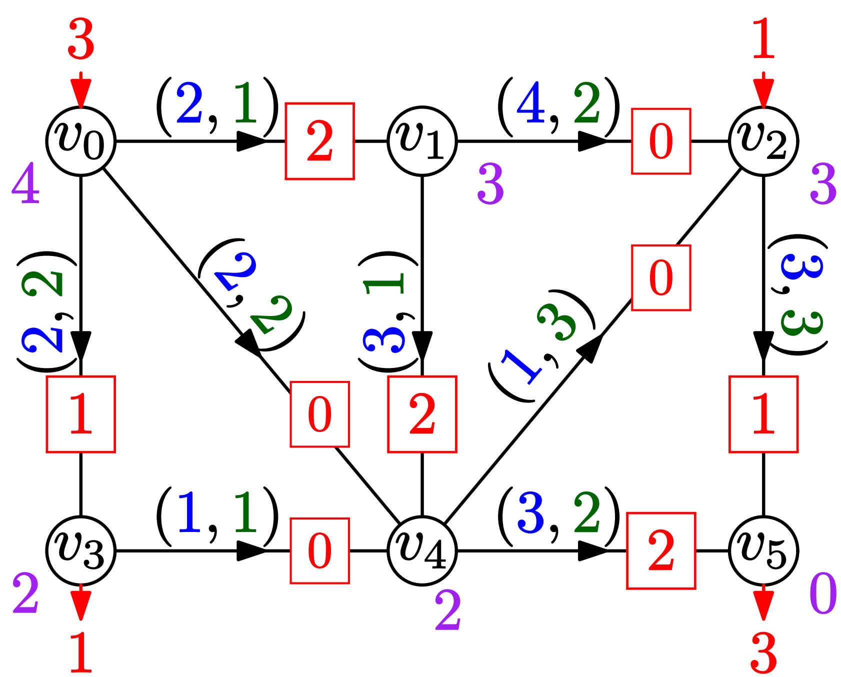


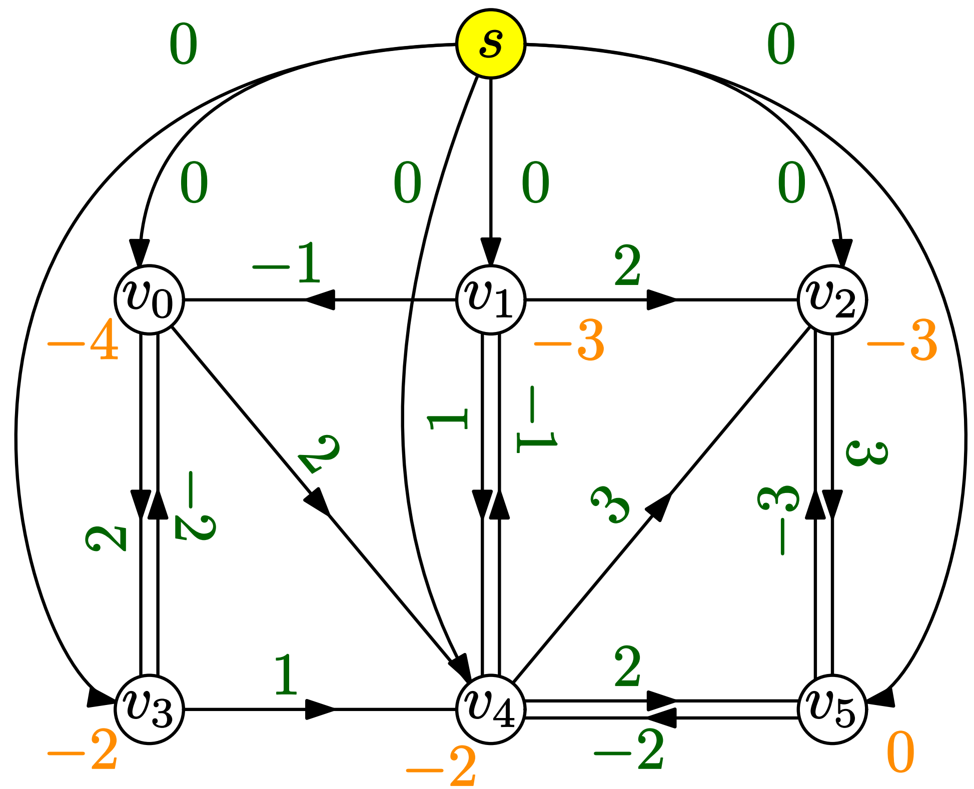
負閉路最適性条件：証明のアイディア

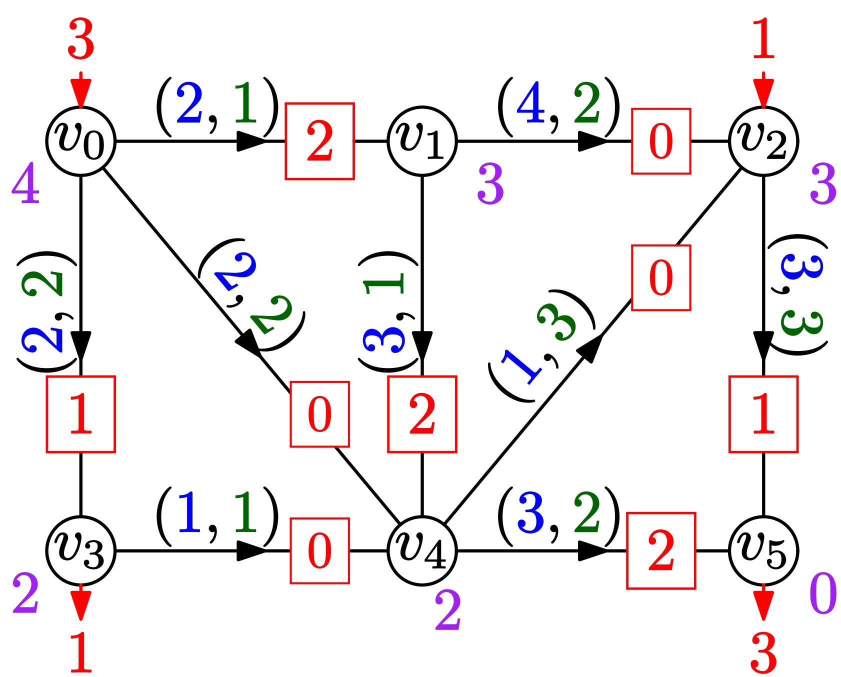


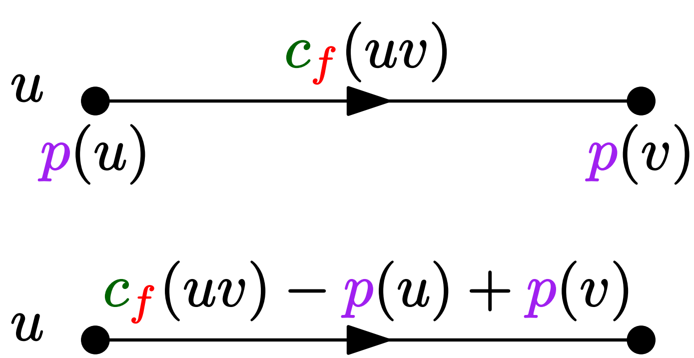


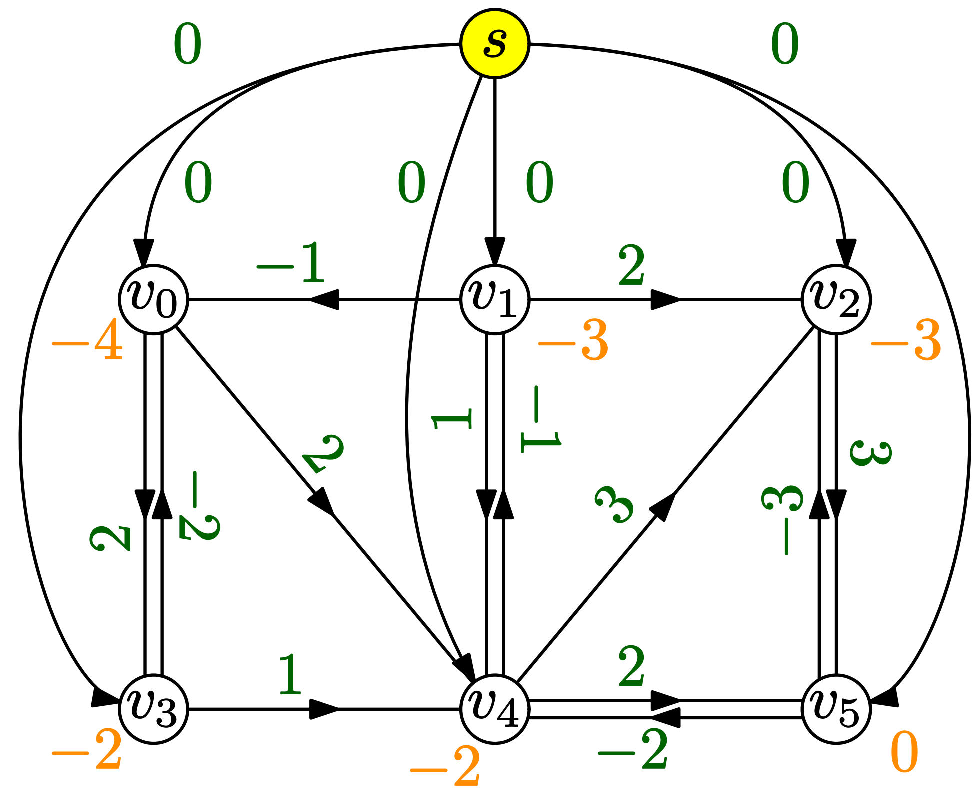
負閉路最適性条件：証明のアイディア

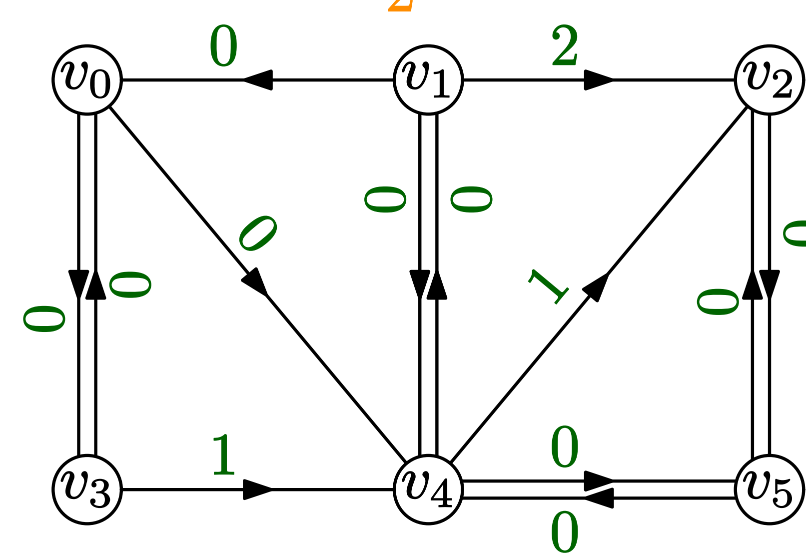







u
v
$c_f(uv)$
$p(u)$
$p(v)$
u
v
$c_f(uv) - p(u) + p(v)$





補題：負閉路と三角不等式

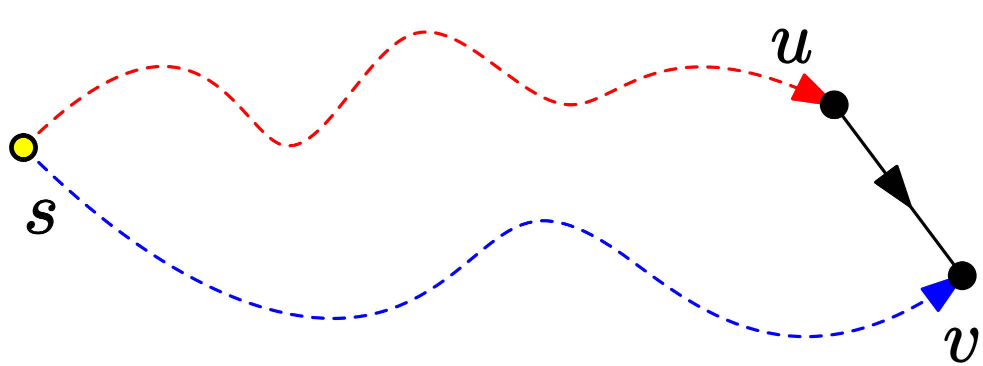
<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell \colon A \to \mathbb{R}$，

$uv \in A$

性質：負閉路と三角不等式

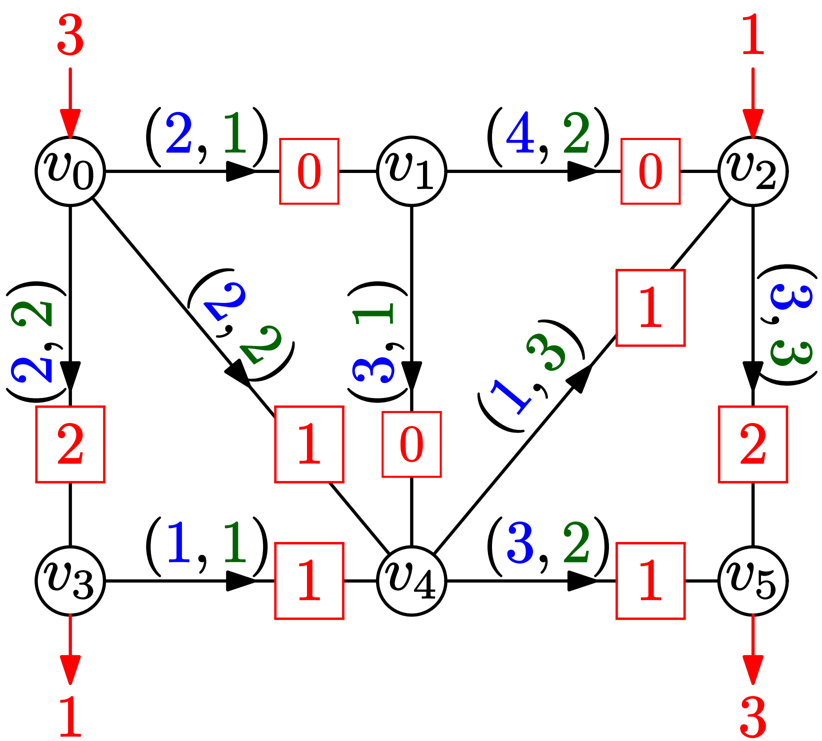
G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」,
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると,

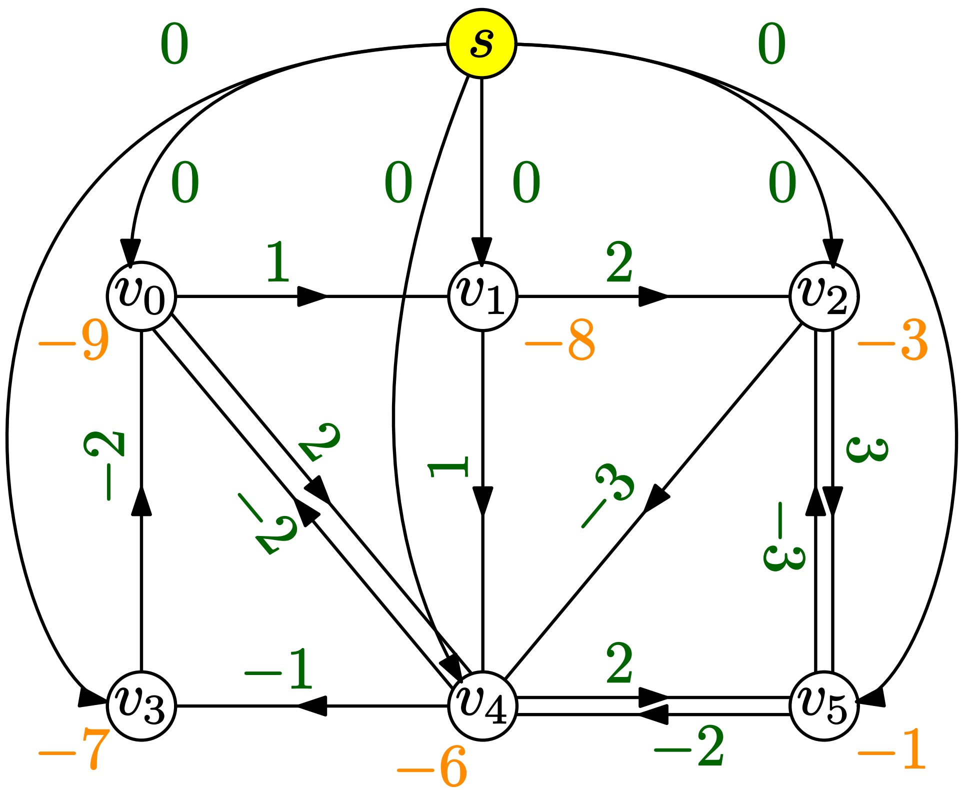
$$d_v \le d_u + \ell_{uv}$$



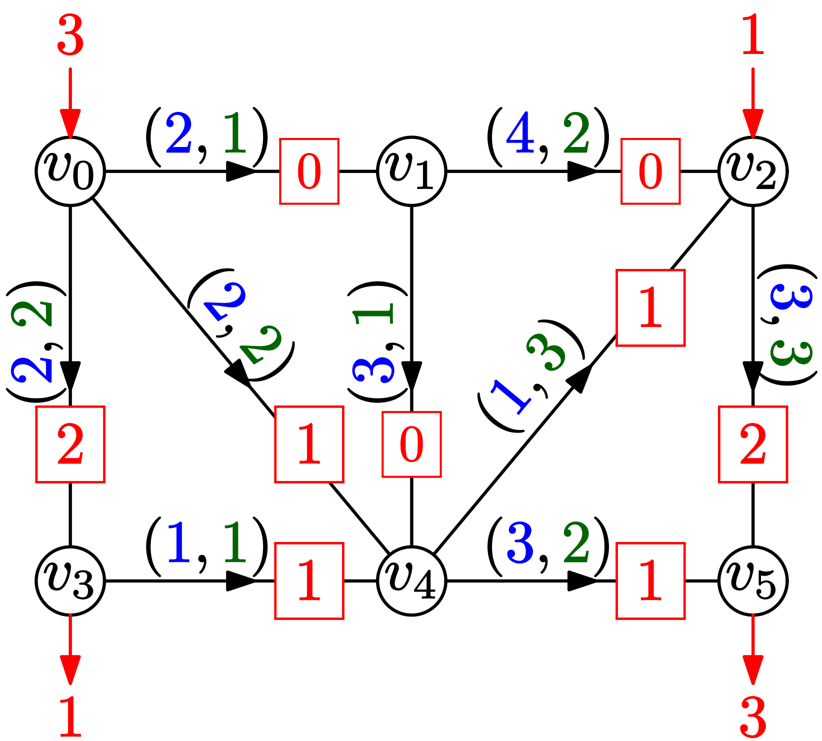
補題：負閉路と三角不等式 — 補足

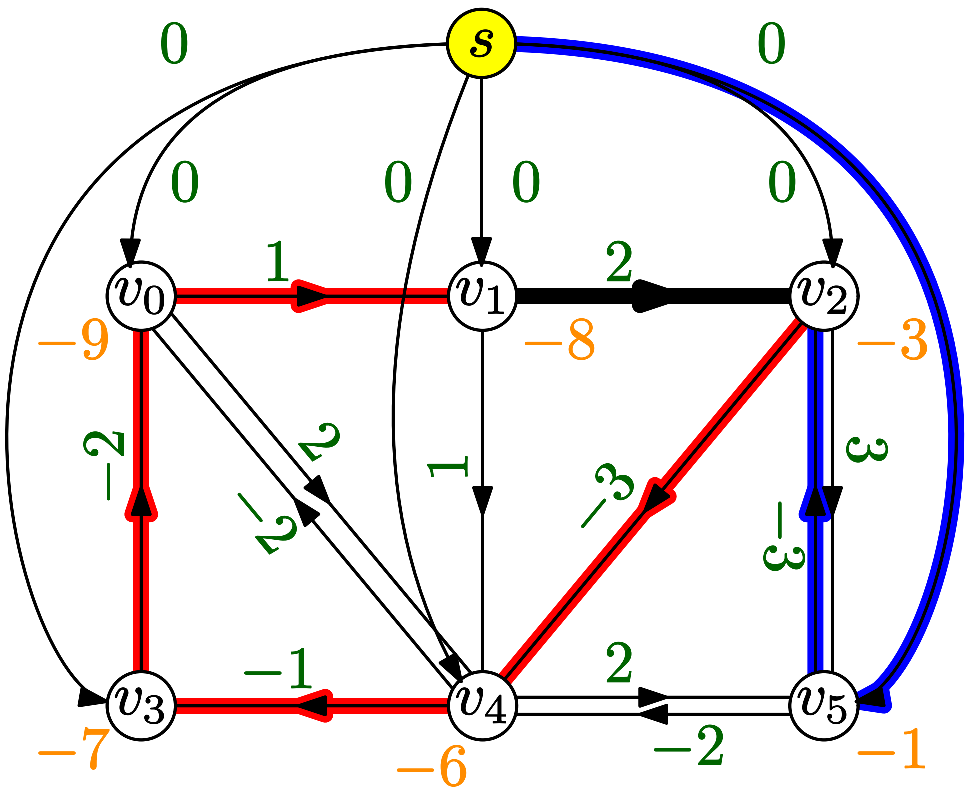
補助ネットワークに負閉路があると どうなるか？





補助ネットワークに負閉路があると どうなるか？





$$d(v_2) > d(v_1) + \ell(v_1 v_2)$$

補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$，

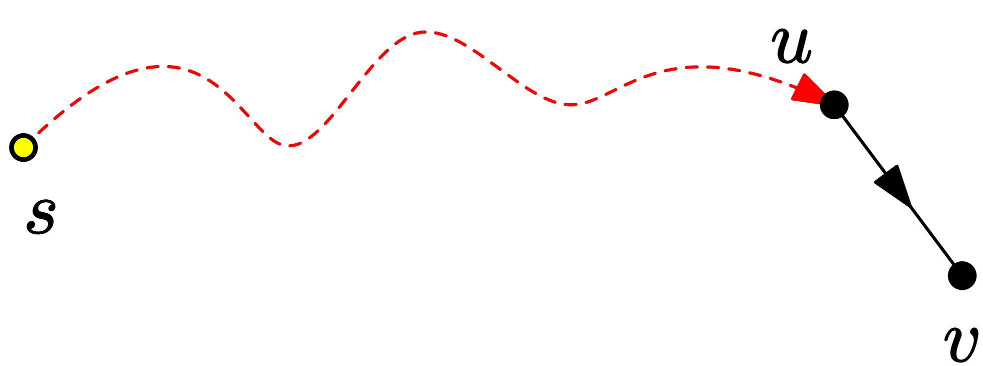
$uv \in A$

v を通らないとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，

$d_v \le d_u + \ell_{uv}$



補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$,

$uv \in A$

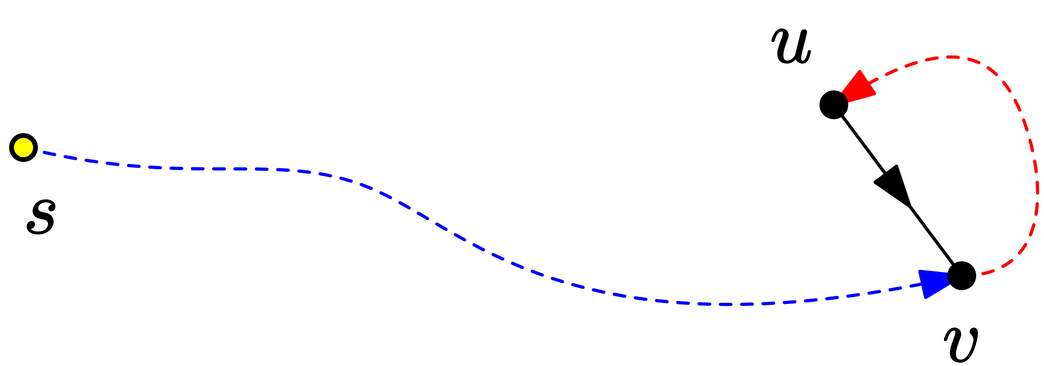
u を通らないとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」,
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると,

$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$



設定：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell \colon A \to \mathbb{R}$，

$uv \in A$

u を通らないとき

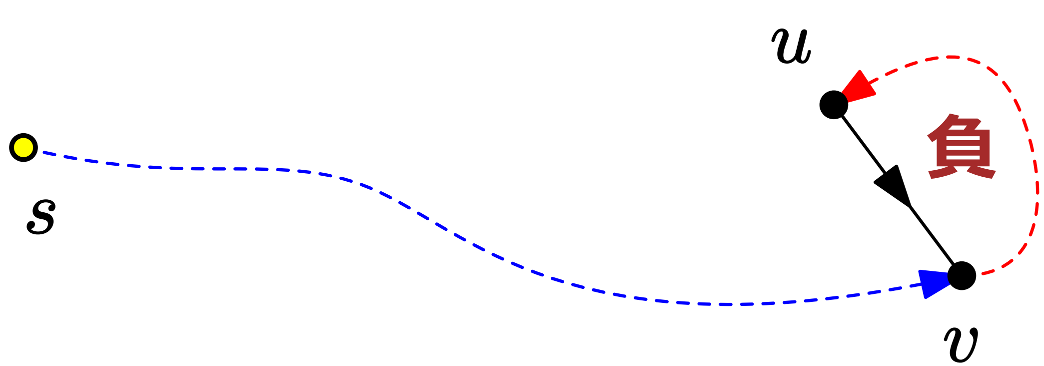
v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，

$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



設定：有向グラフ $G=(V,A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$,

$uv \in A$

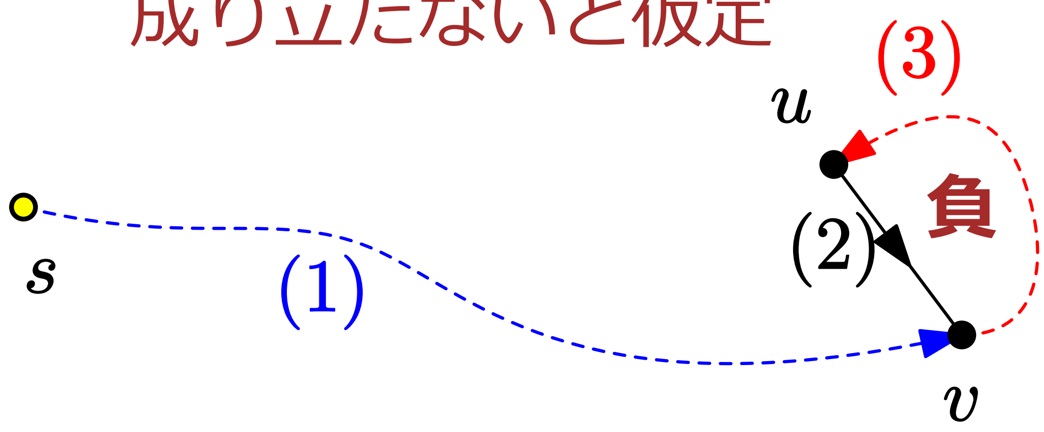
u を通らないとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」,
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると,
$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$，

$uv \in A$

u を通らないとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

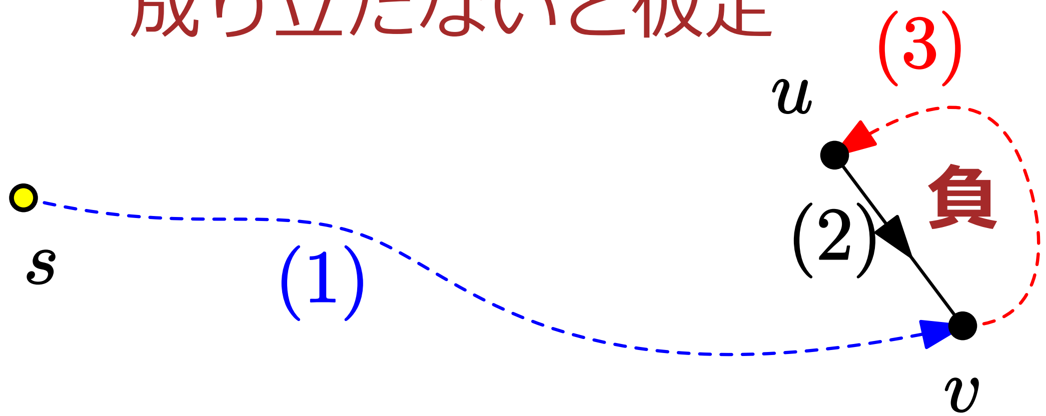
G が ℓ に関する負閉路を持たない ⇒

$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，

$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，

$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



$$(1) > (1) + (3) + (2)$$

$$\therefore\ 0 > (3) + (2)$$

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，頂点 $s\in V$，関数 $\ell\colon A\to\mathbb{R}$，

$uv\in A$

u を通るとき

v を通るとき

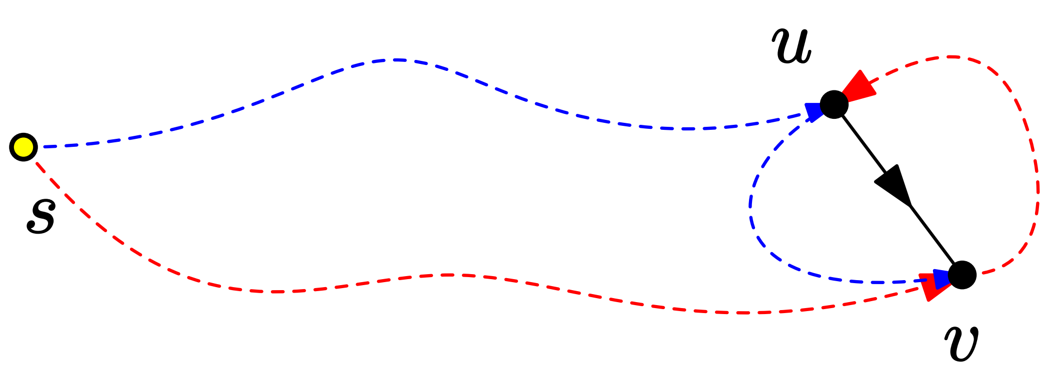
性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$

$d_v=$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，

$d_u=$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，

$d_v\le d_u+\ell_{uv}$



補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$，

$uv \in A$

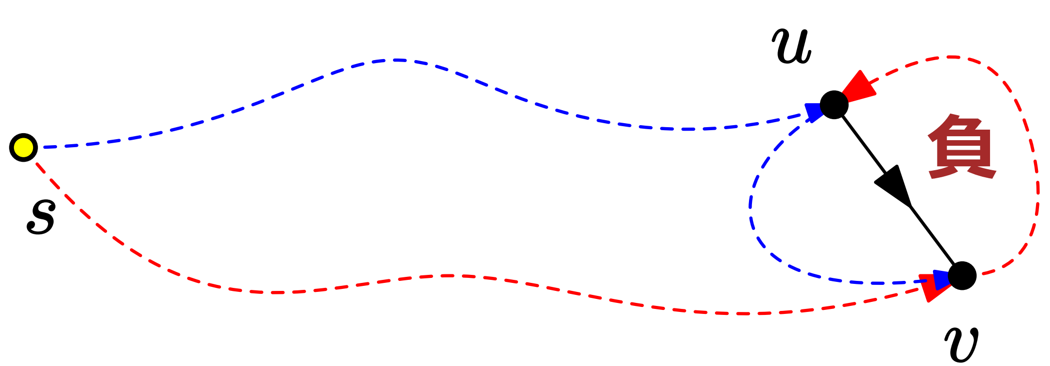
u を通るとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，
$d_v \le d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell\colon A \to \mathbb{R}$,

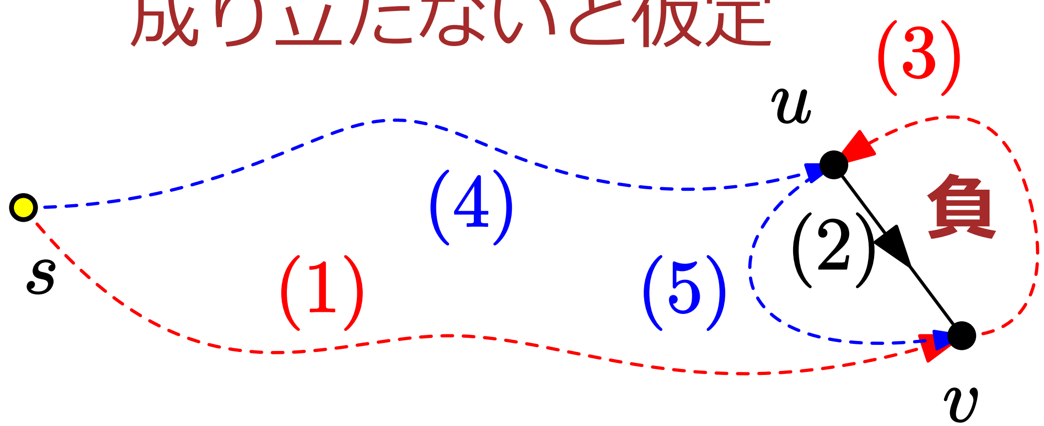
$uv \in A$ 　 u を通るとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」,
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，
$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



$$(1) \geq (4) + (5)$$
$$(2) \geq (5)$$
$$(4) + (5) > (1) + (3) + (2)$$

補題：負閉路と三角不等式 — 証明

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $s \in V$，関数 $\ell \colon A \to \mathbb{R}$，

$uv \in A$

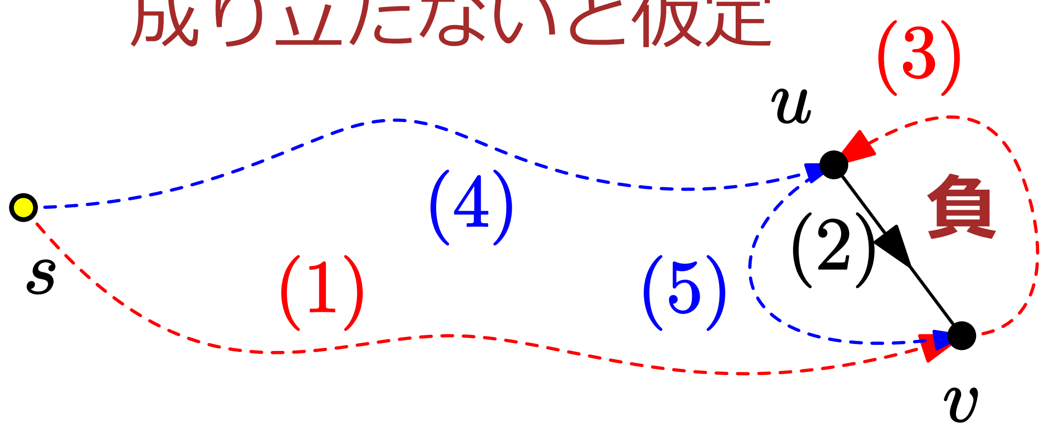
u を通るとき

v を通るとき

性質：負閉路と三角不等式

G が ℓ に関する負閉路を持たない $\Rightarrow$
$d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」，
$d_u =$「ℓ を弧長とする最短 s-u 道の長さ」とすると，
$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$

成り立たないと仮定



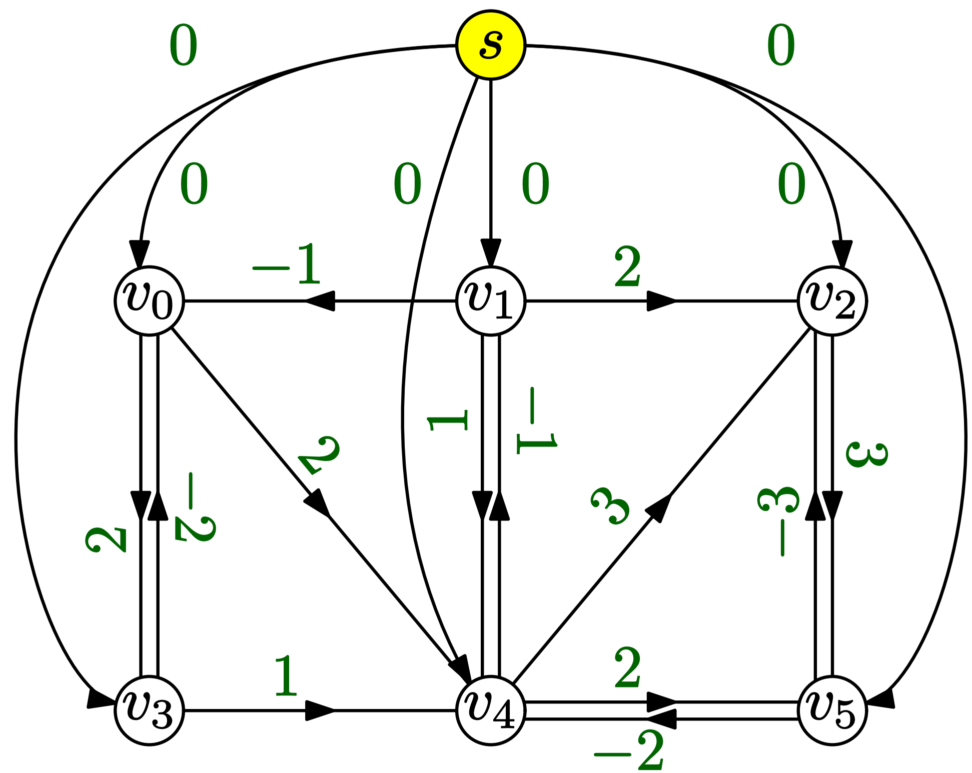
$$(1) \geq (4) + (5)$$
$$(2) \geq (5)$$
$$\frac{(4) + (5) > (1) + (3) + (2)}{0 > (3) + (5)}$$

(3) と (5) が共通内点を持つときに注意

負閉路最適性条件：証明 (2/4)

$\Leftarrow$ の証明：(G_f, u_f, c_f) が負閉路を持たないと仮定

- G_f に次を追加する
  - 新たな頂点 s
  - 新たな弧 (s, v) $(\forall\, v \in V)$
- 新たな G_f の弧集合上に次の関数 ℓ を考える
  - $\ell(a) = c_f(a)$ $(\forall\, a \in A_f)$
  - $\ell(s, v) = 0$ $(\forall\, v \in V)$

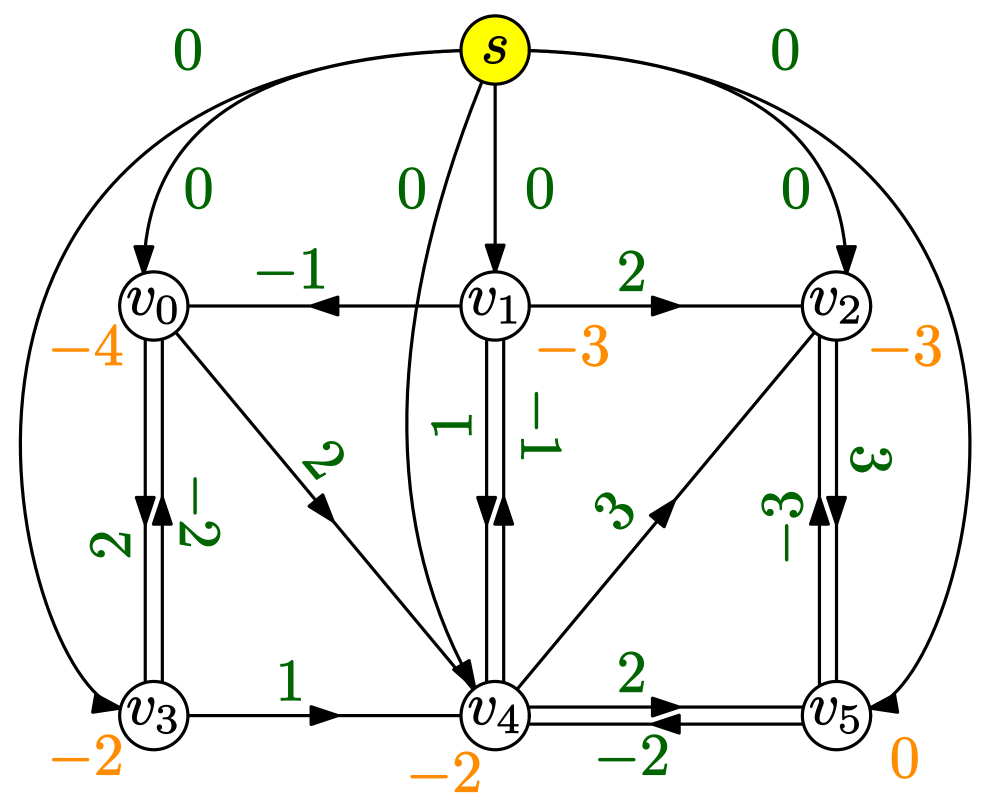


負閉路最適性条件：証明 (3/4)

$\Leftarrow$ の証明：(G_f, u_f, c_f) が負閉路を持たないと仮定

- $d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」とする
- $p_v = -d_v$ とする

確認事項：$\forall\, uv \in A_f$ ：$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0$



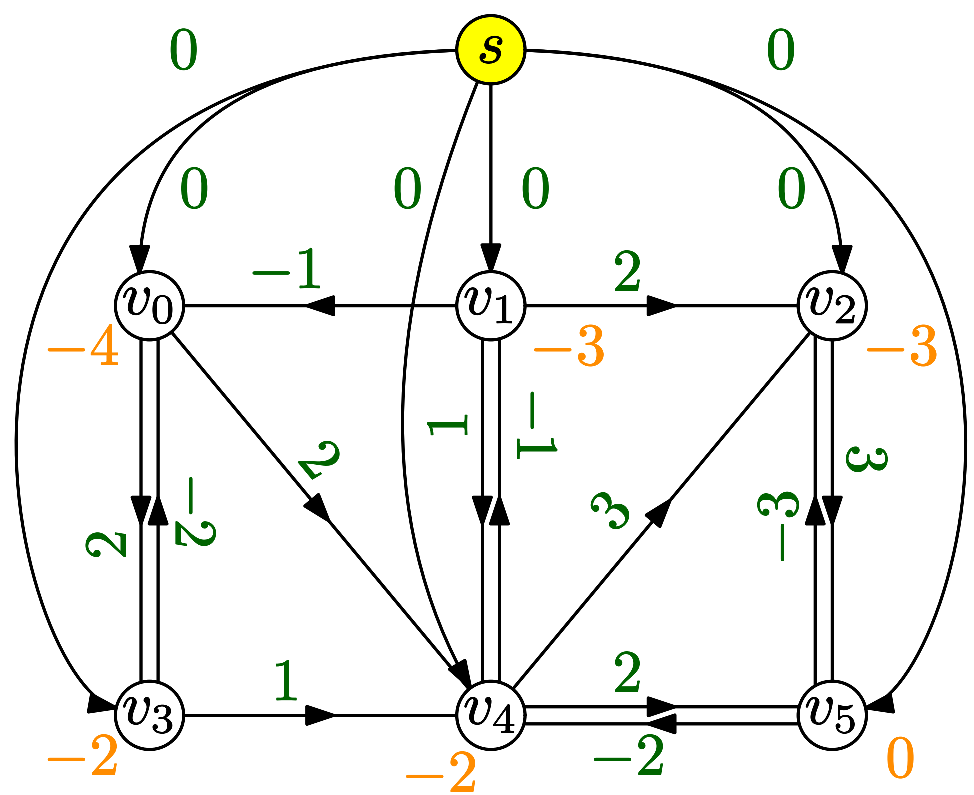
負閉路最適性条件：証明 (3/4)

$\Leftarrow$ の証明：(G_f, u_f, c_f) が負閉路を持たないと仮定

- $d_v =$「ℓ を弧長とする最短 s-v 道の長さ」とする
- $p_v = -d_v$ とする

確認事項：$\forall\, uv \in A_f$：$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0$

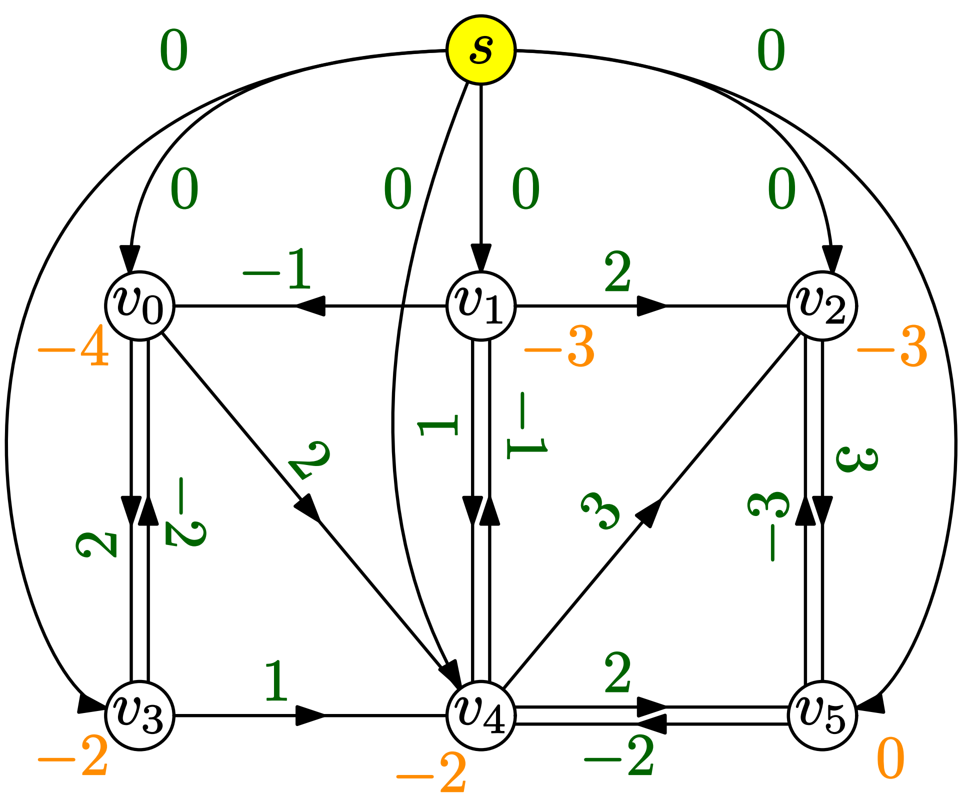
$$\Leftrightarrow \ell_{uv} + d_u - d_v \geq 0$$



負閉路最適性条件：証明 (4/4)

$\Leftarrow$ の証明 (続)：　(確認事項：$\forall\, uv \in A_f : \ell_{uv} + d_u - d_v \geq 0$)

- 任意の弧 $uv \in A_f$ を考える
- 補助ネットワークが負閉路を持たないので
  補題より，$d_v \leq d_u + \ell_{uv}$
- $\therefore \ell_{uv} + d_u - d_v \geq 0$ $\square$



[再掲] 負閉路最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

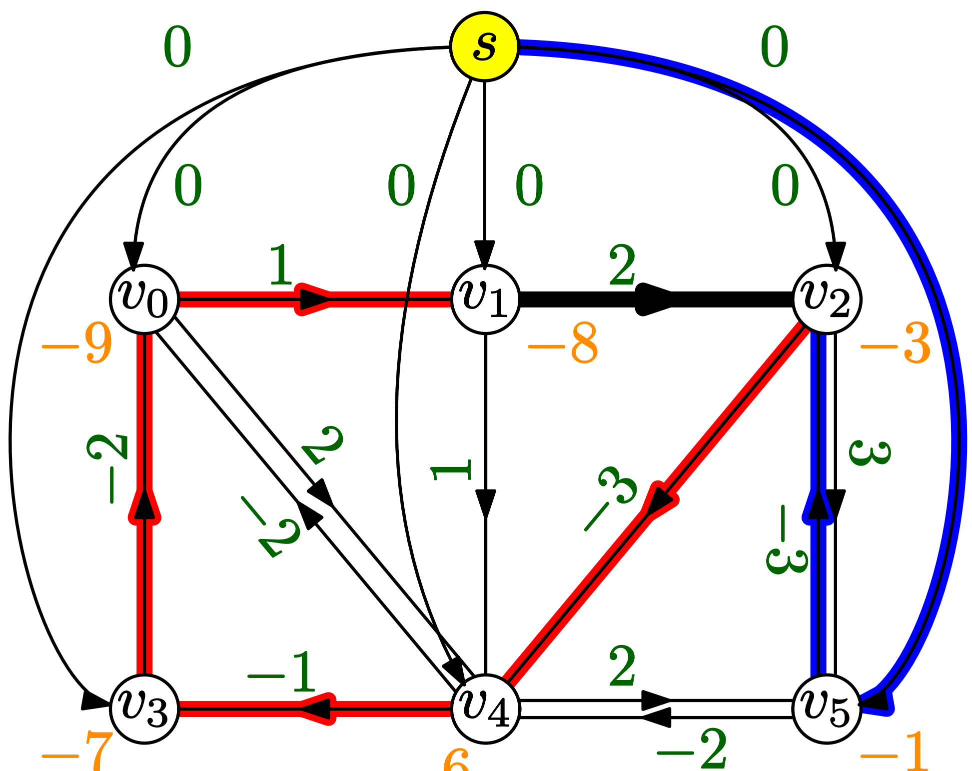
性質：負閉路最適性条件 (Busacker, Saaty ’65)

f は (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) は負閉路を持たない

アルゴリズムでの使用法：

	証拠
f が最小費用 b-流ではない	負閉路
f が最小費用 b-流である	ポテンシャル (で定まる非負簡約費用)

1. 負閉路最適性条件
2. **負閉路消去法**



負閉路最適性条件と負閉路消去法

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

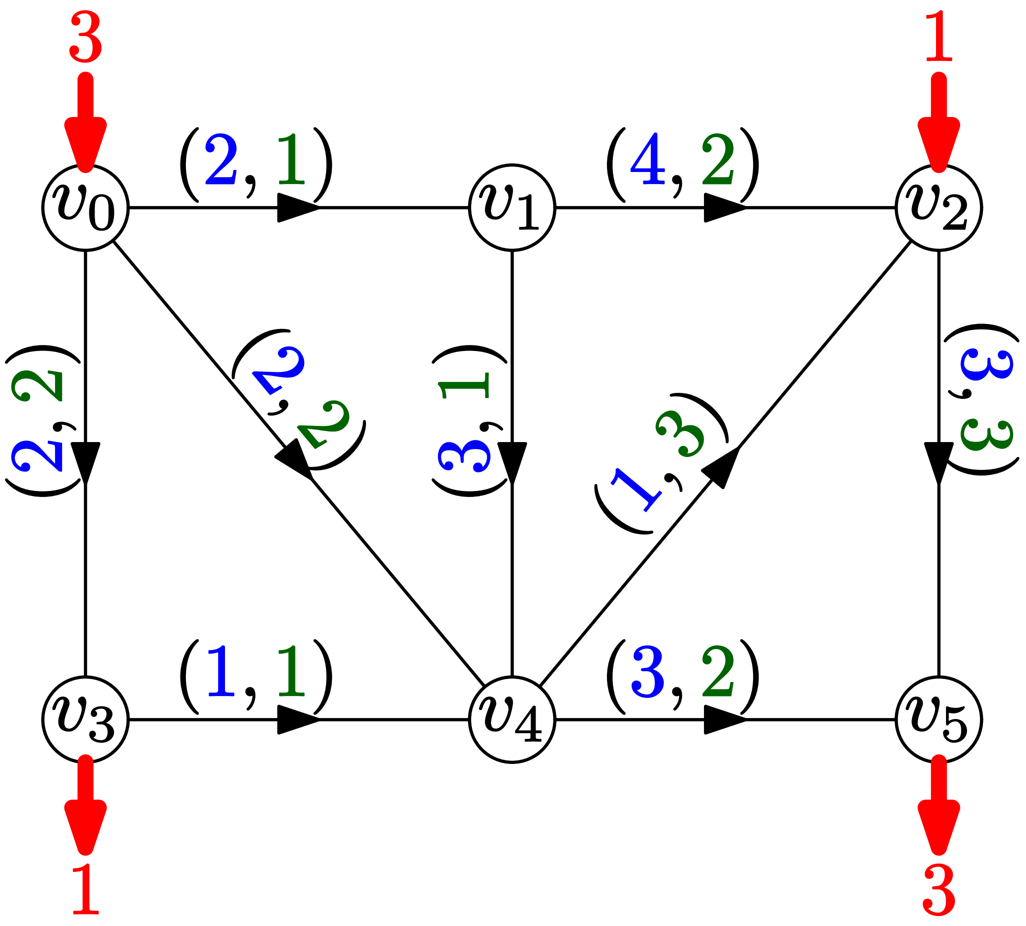
性質：負閉路最適性条件 (Busacker, Saaty ’65)

f は (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
補助ネットワーク (G_f, u_f, c_f) は負閉路を持たない

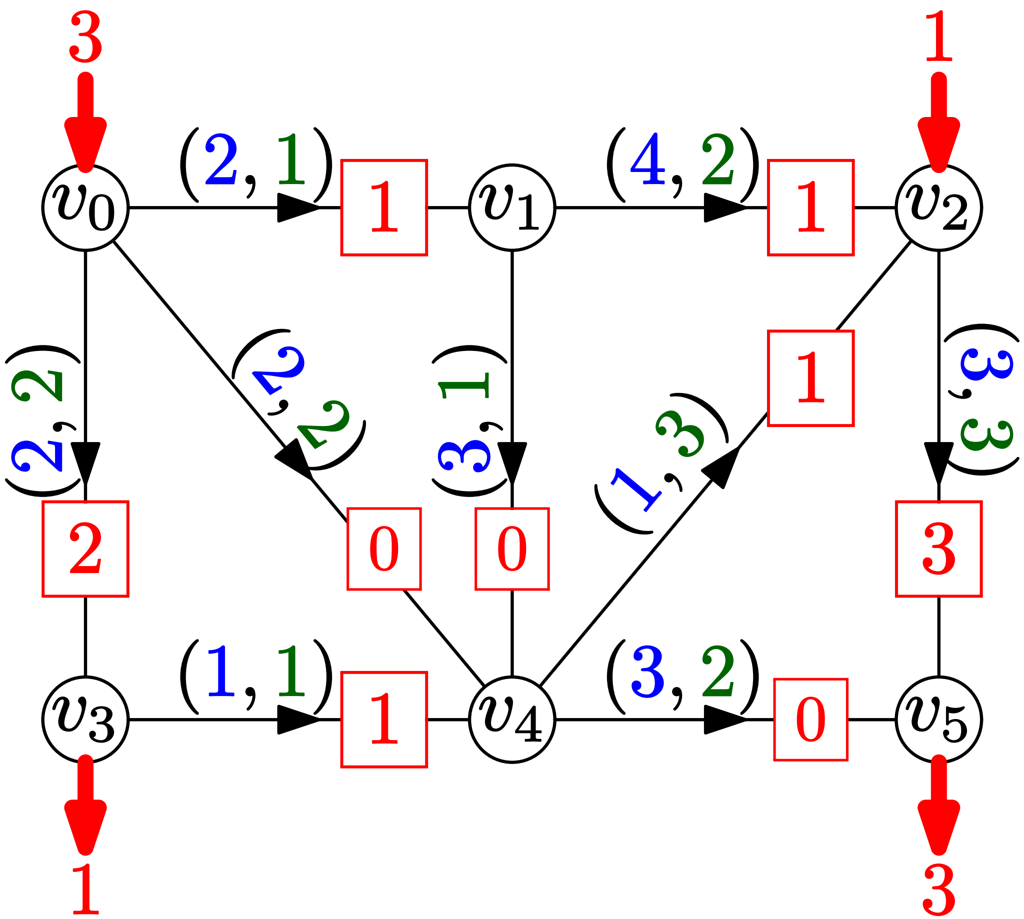
負閉路最適性条件 から「自然に」アルゴリズムが得られる

$\leadsto$ 負閉路消去法 (cycle canceling algorithm)

負閉路消去法：例 (1/6)



負閉路消去法：例 (1/6)

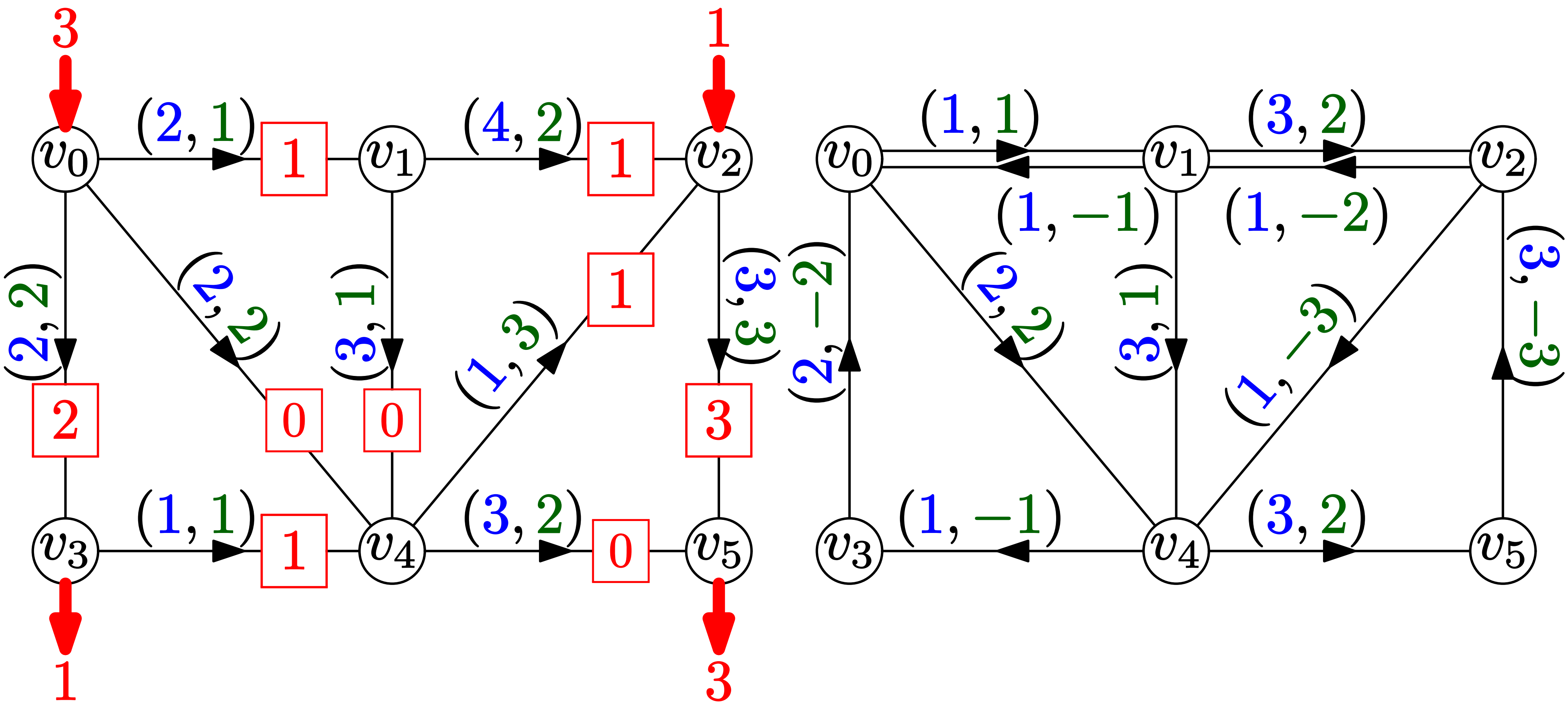


費用 $= 20$

b-流を 1 つ見つける

(最大流問題として解ける)

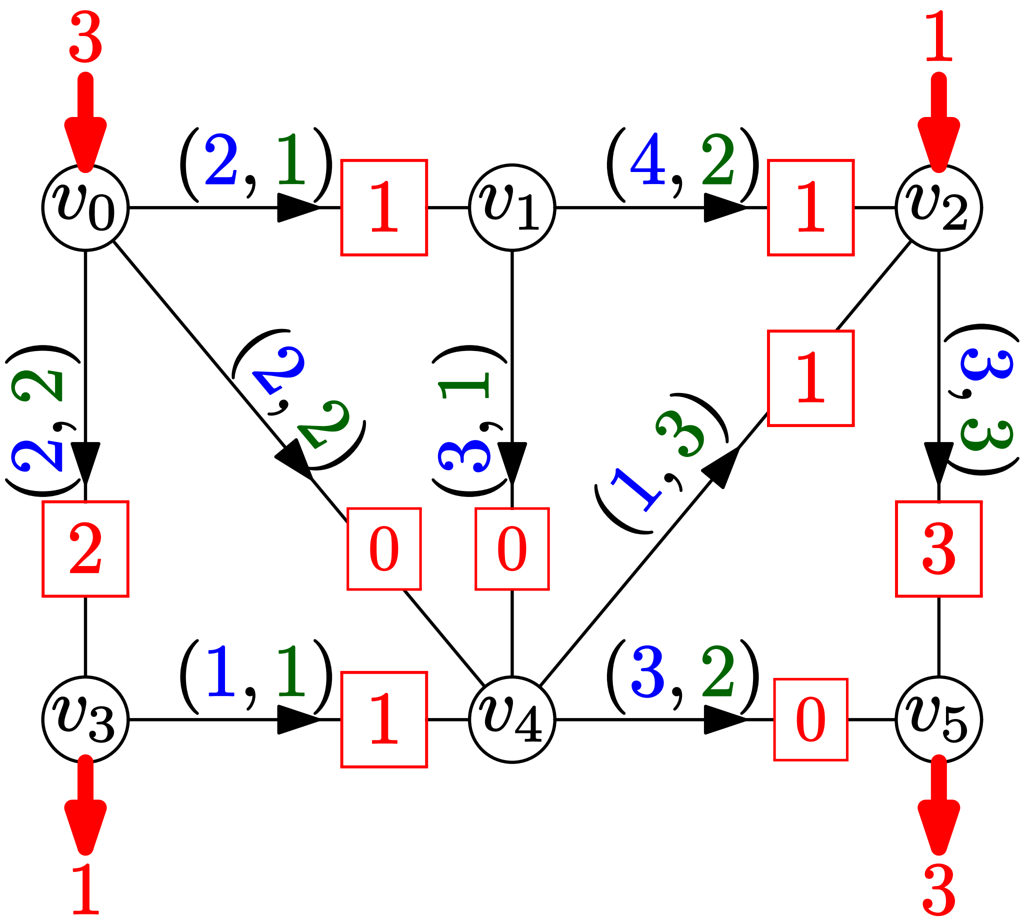
負閉路消去法：例 (2/6)



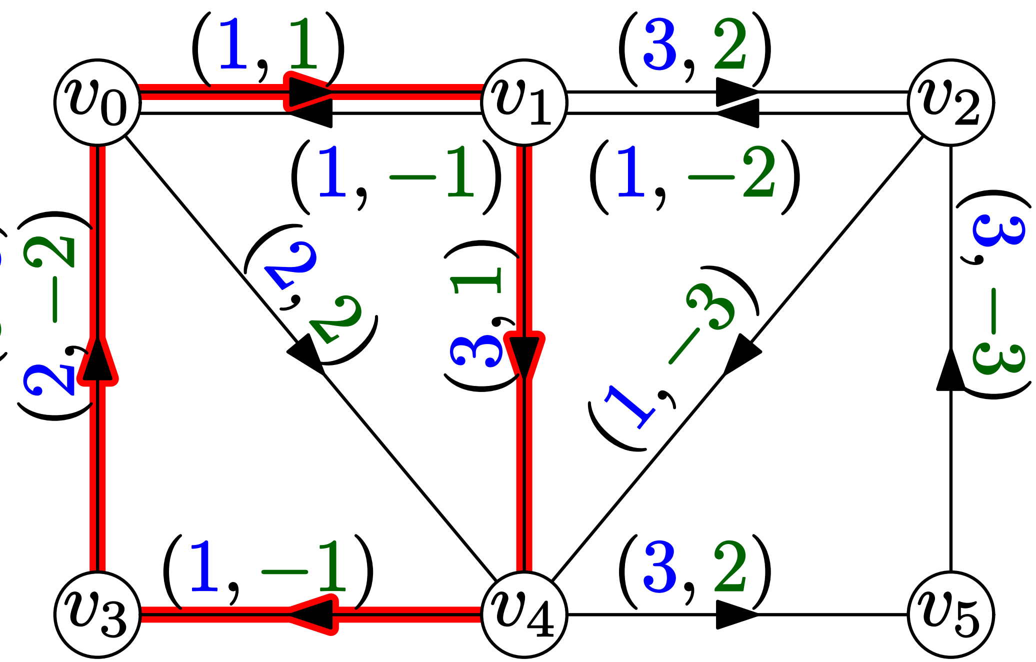
費用 $= 20$

補助ネットワークを作る

負閉路消去法：例 (2/6)



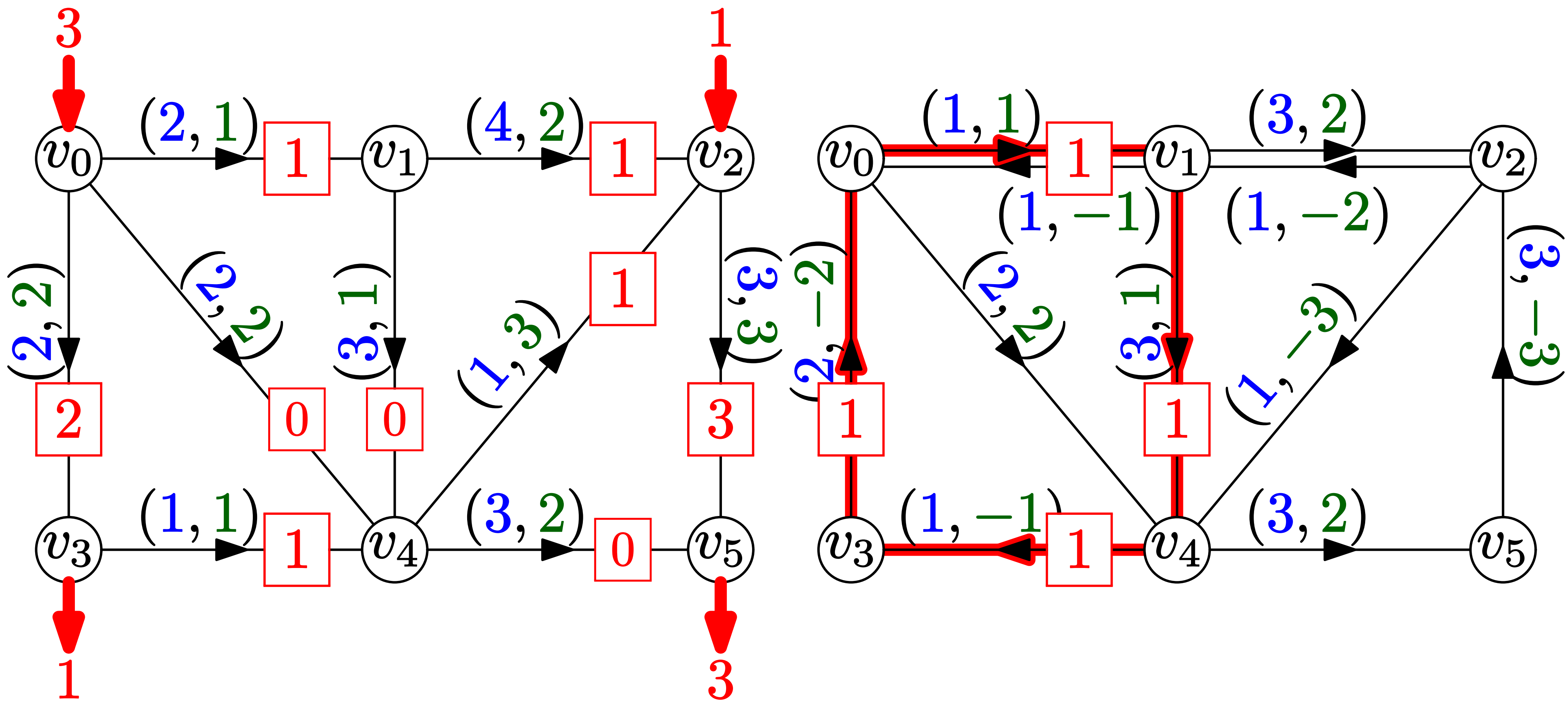
費用 $= 20$



補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

負閉路消去法：例 (2/6)



費用 $= 20$

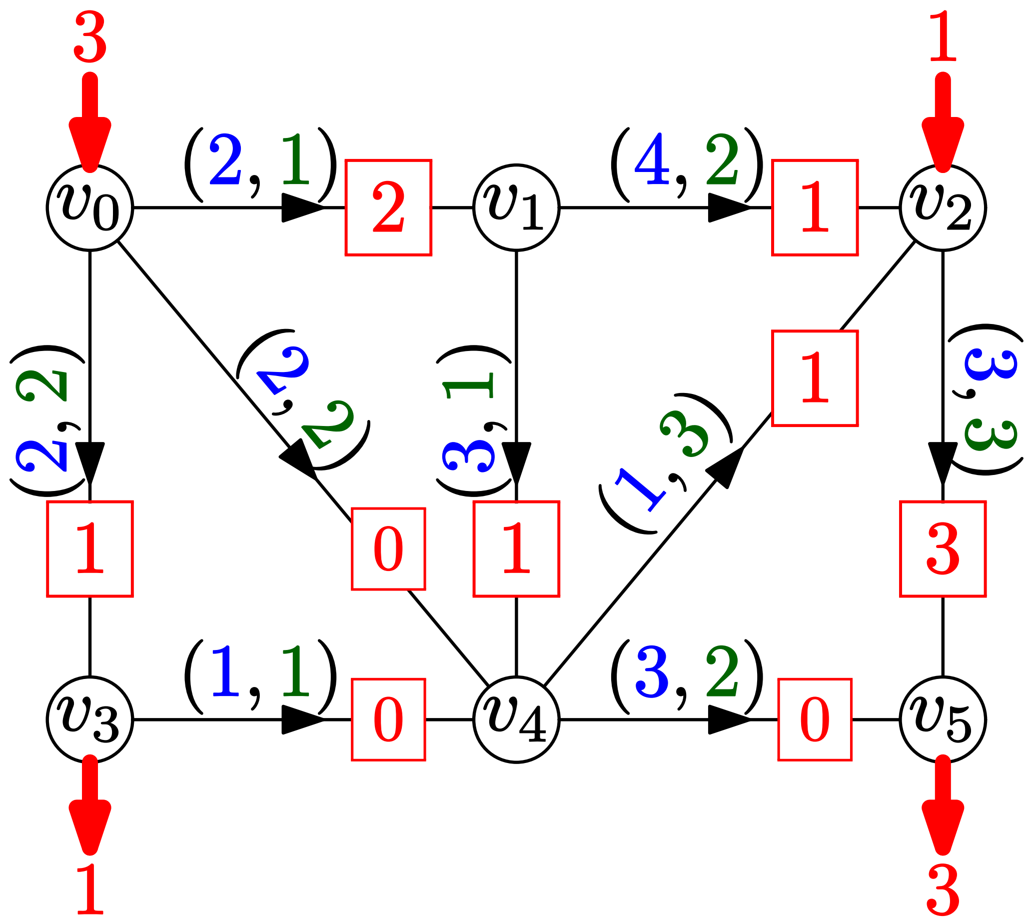
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

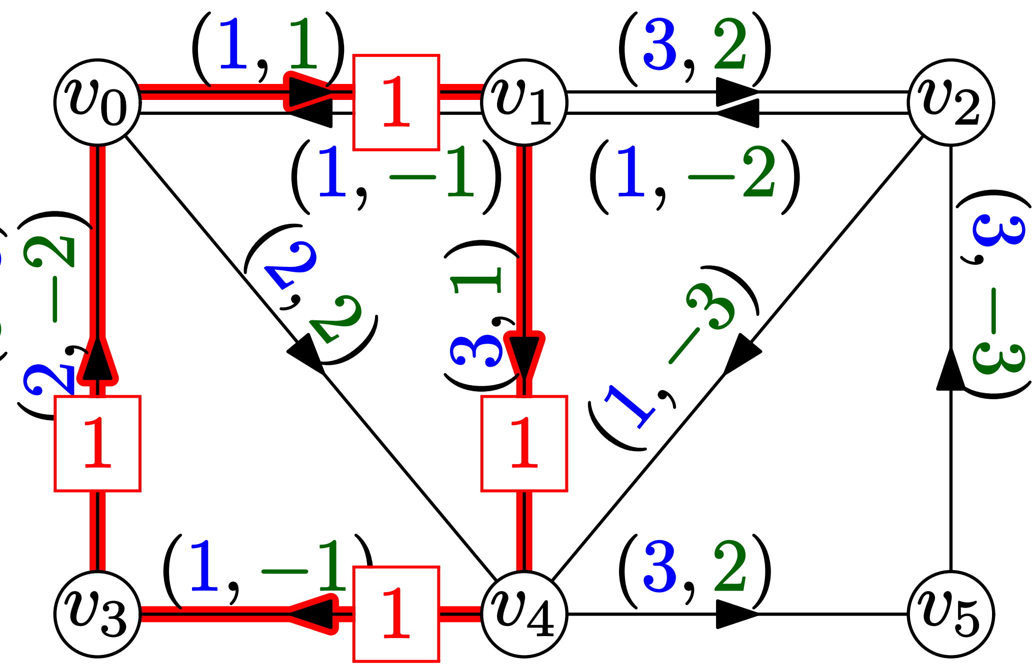
あったら，

それに沿って流せるだけ流す

負閉路消去法：例 (2/6)



費用 $= 19$



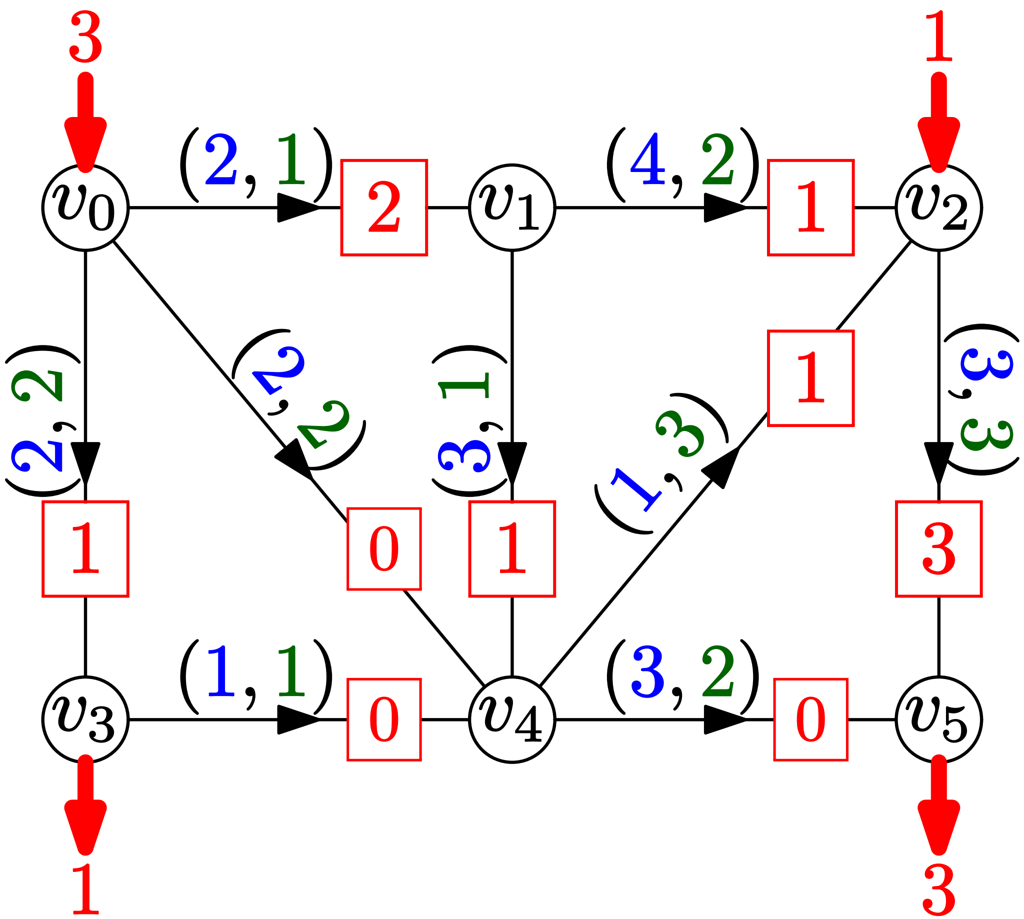
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

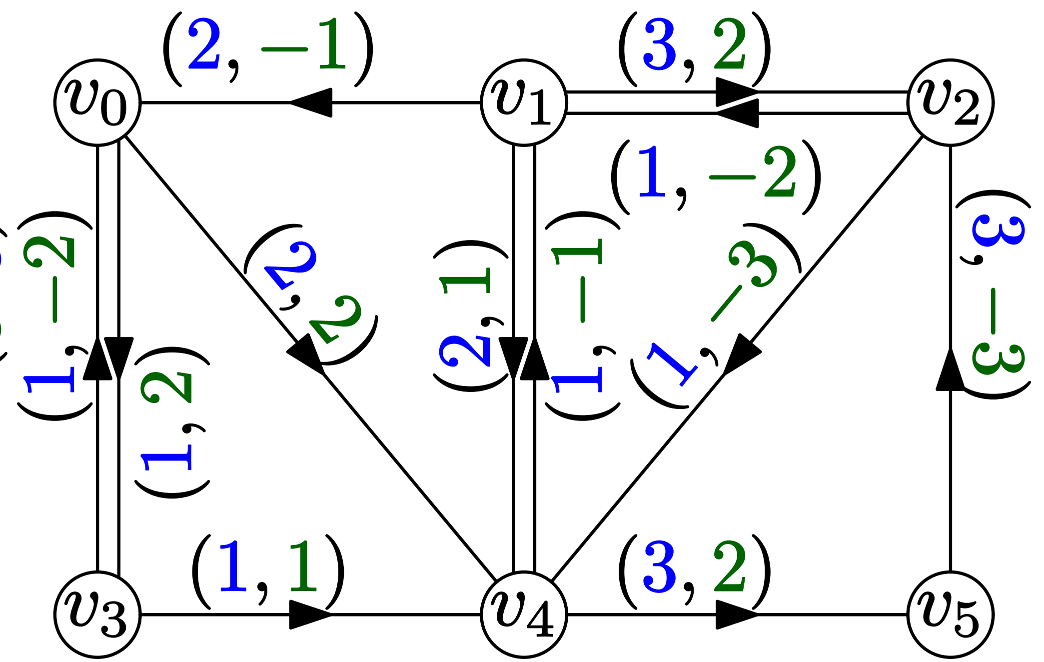
あったら，

それに沿って流せるだけ流す

負閉路消去法：例 (3/6)

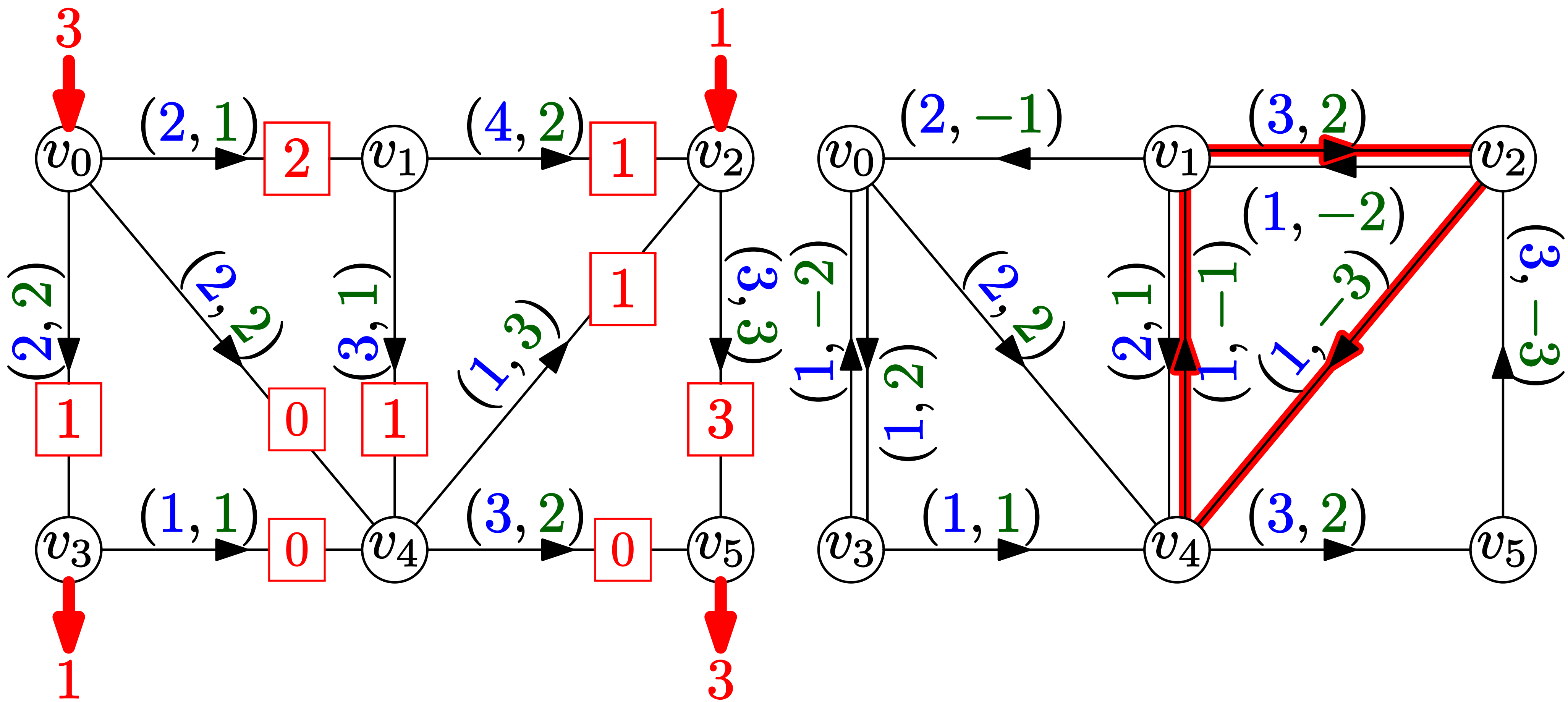


費用 $= 19$



補助ネットワークを作る

負閉路消去法：例 (3/6)

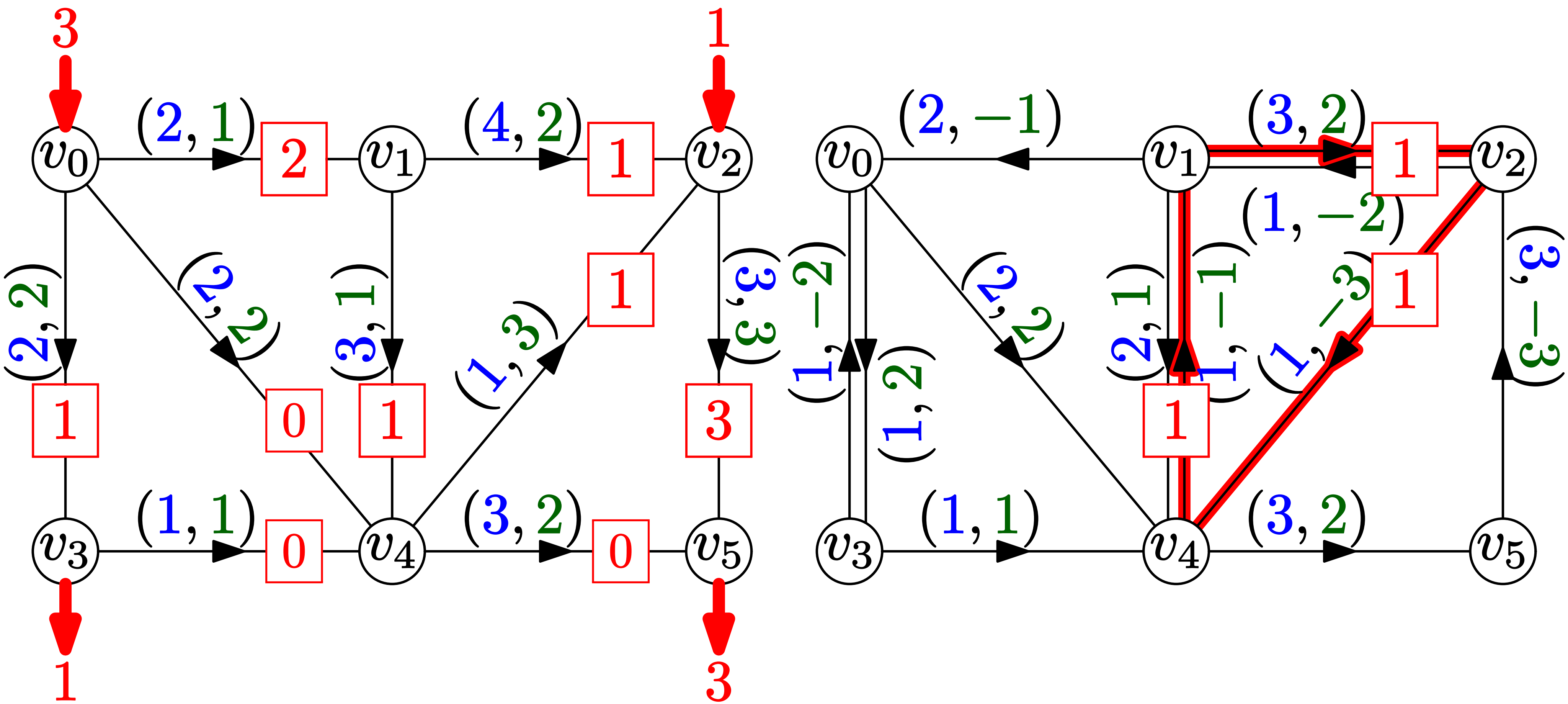


費用 $= 19$

補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

負閉路消去法：例 (3/6)



費用 $= 19$

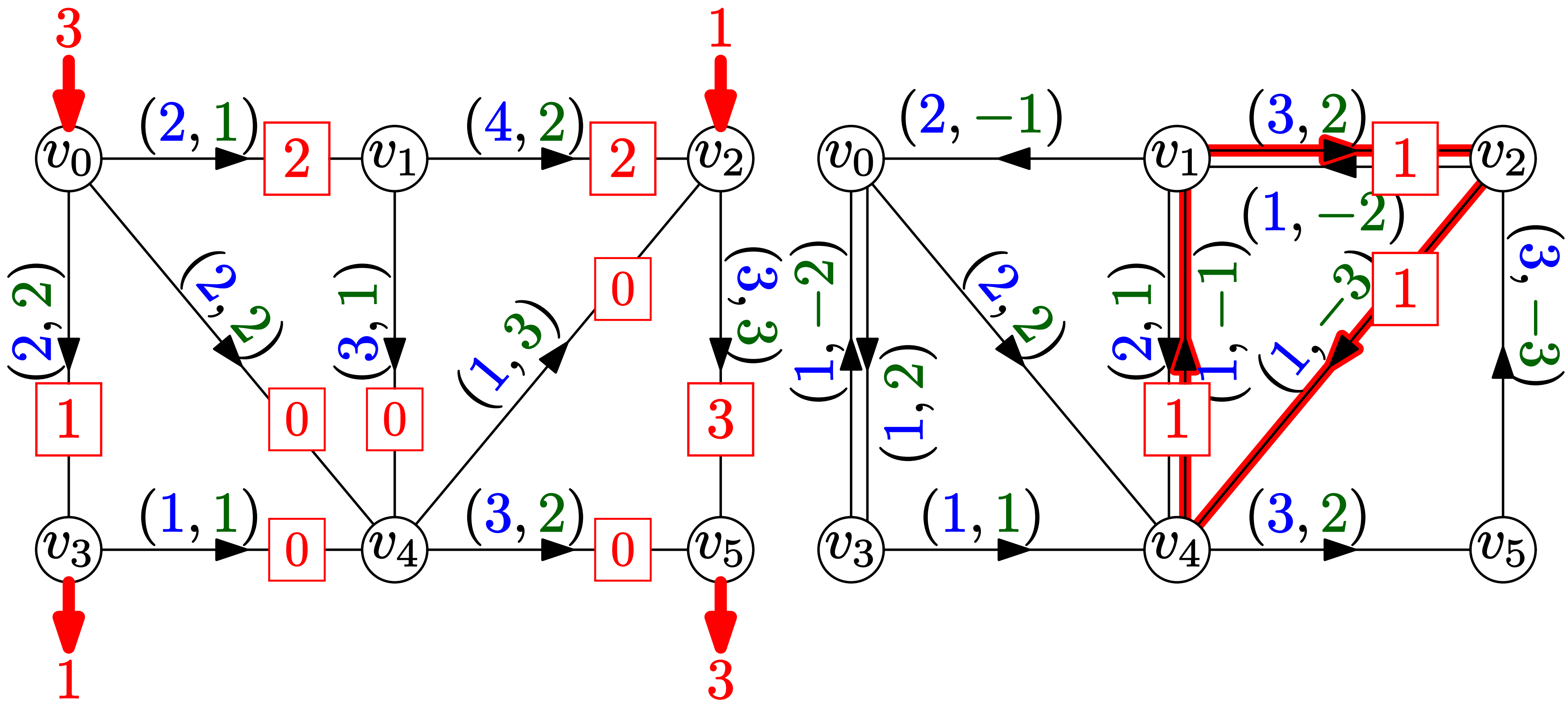
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

あったら，

それに沿って流せるだけ流す

負閉路消去法：例 (3/6)



費用 $= 17$

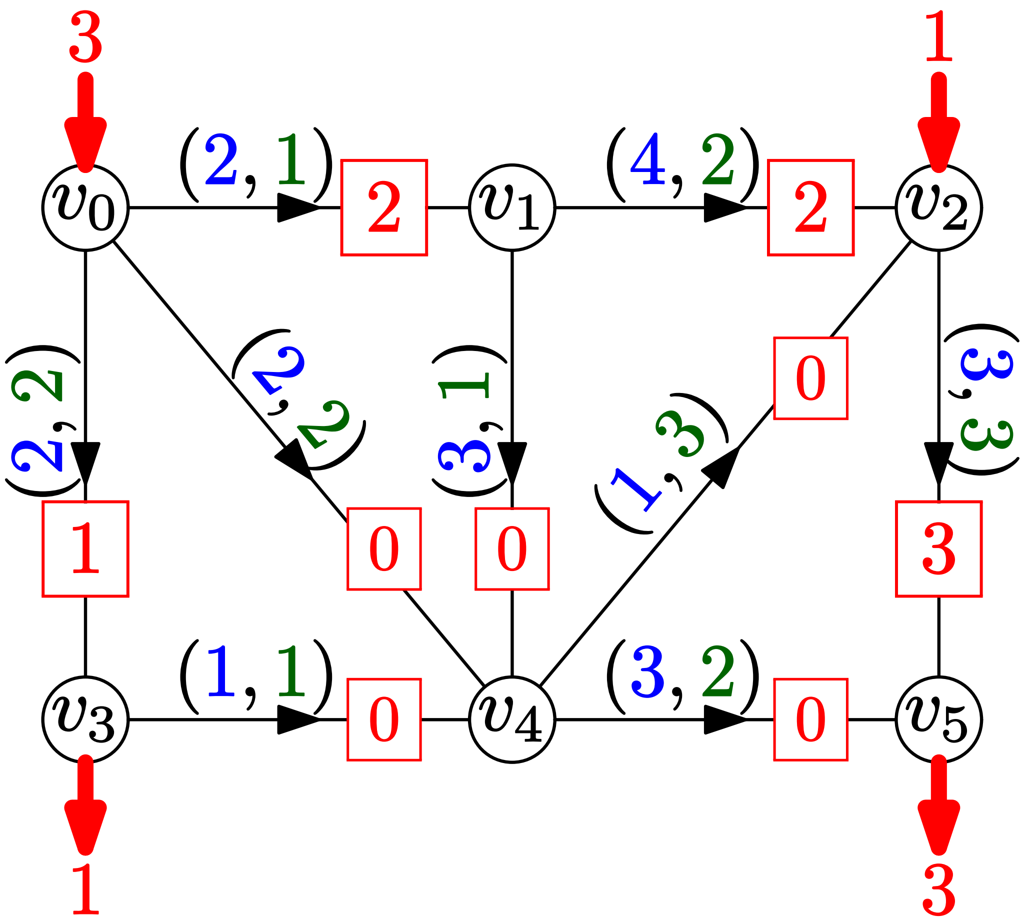
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

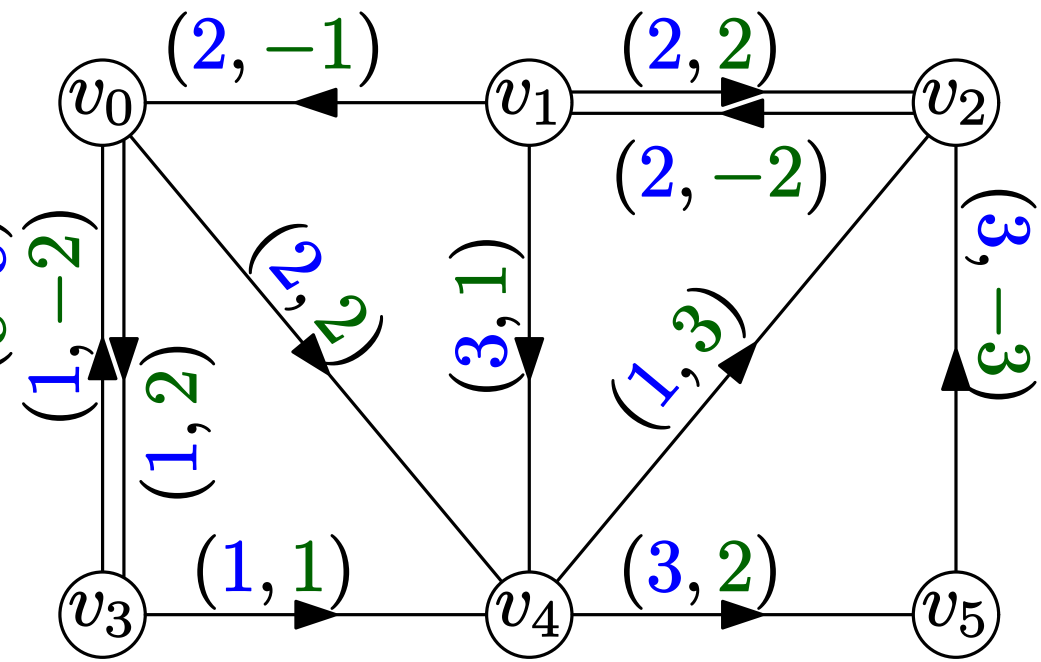
あったら，

それに沿って流せるだけ流す

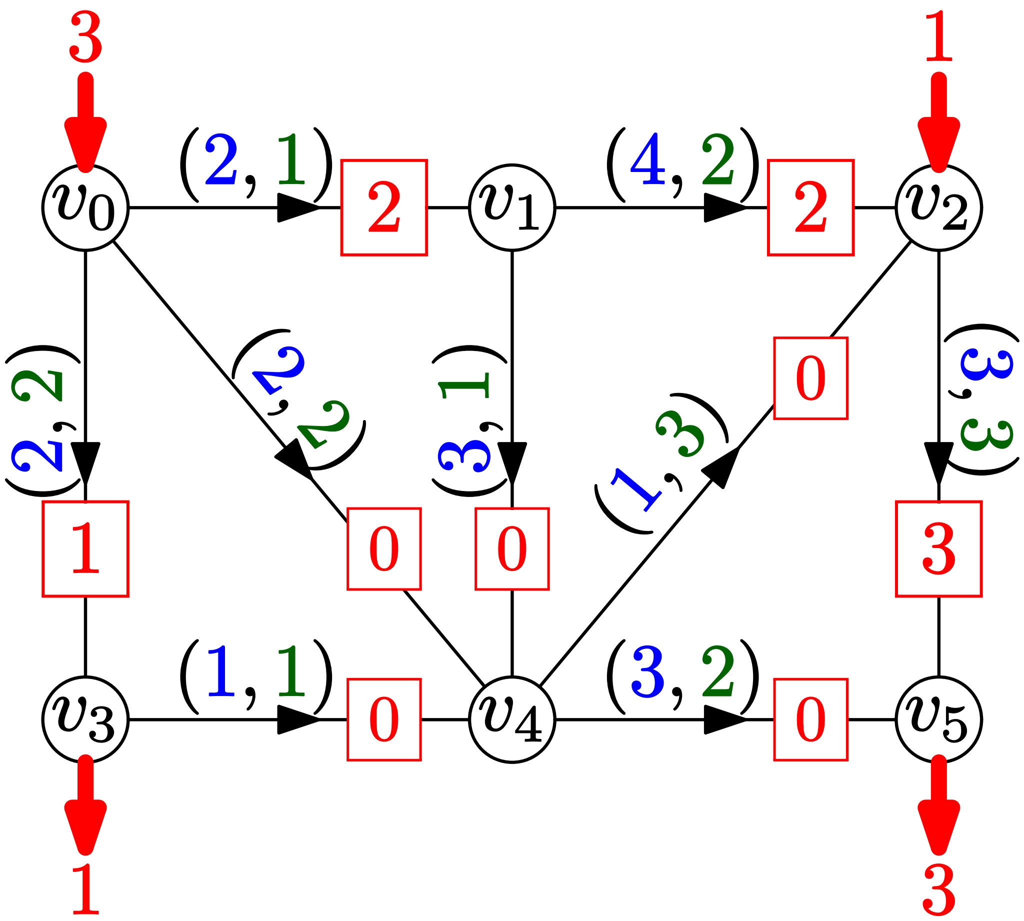
負閉路消去法：例 (4/6)



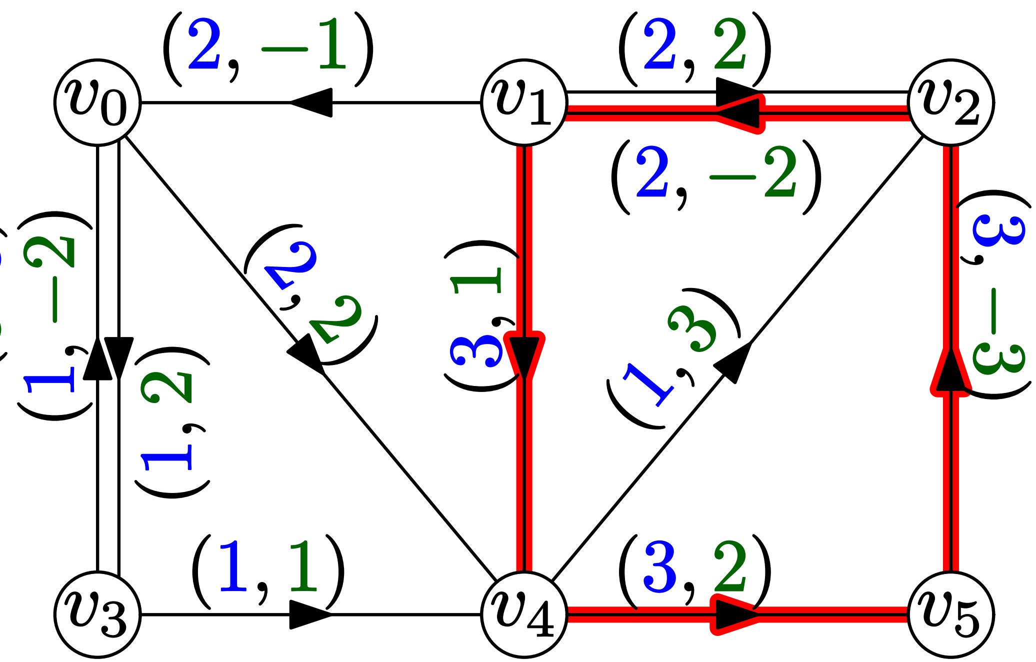
費用 $= 17$



補助ネットワークを作る



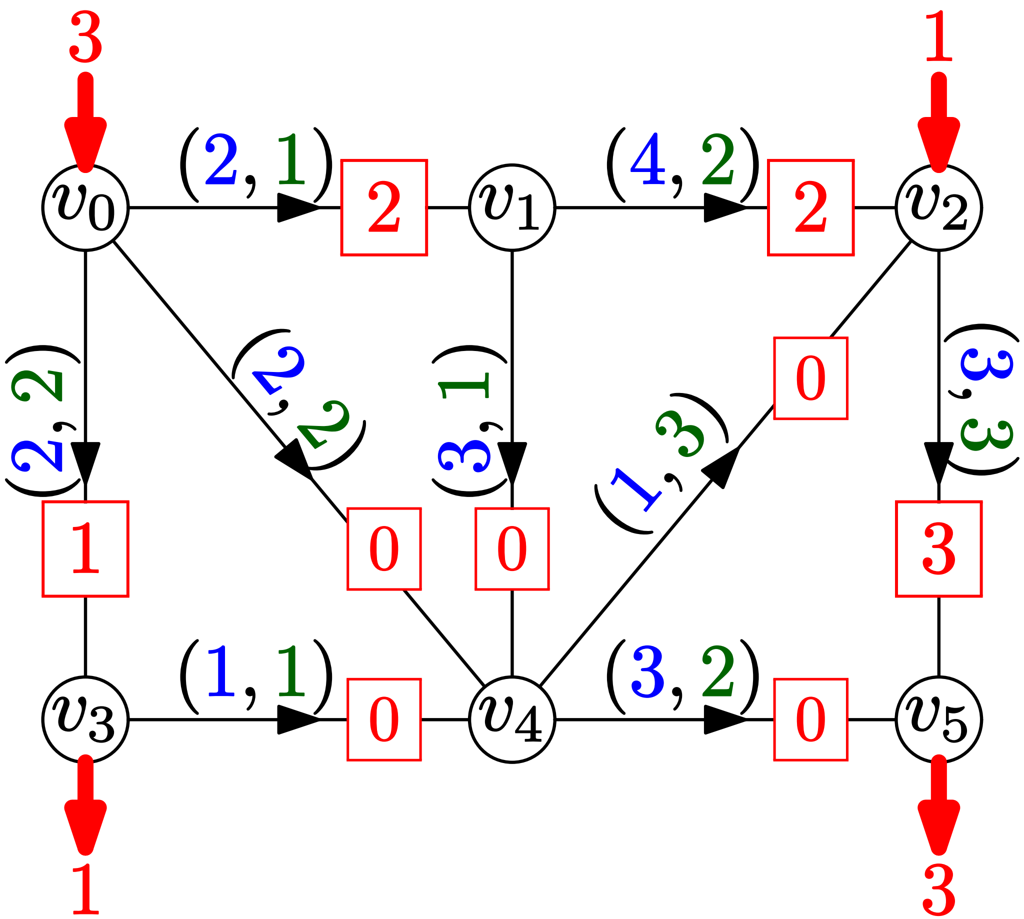
費用 $= 17$



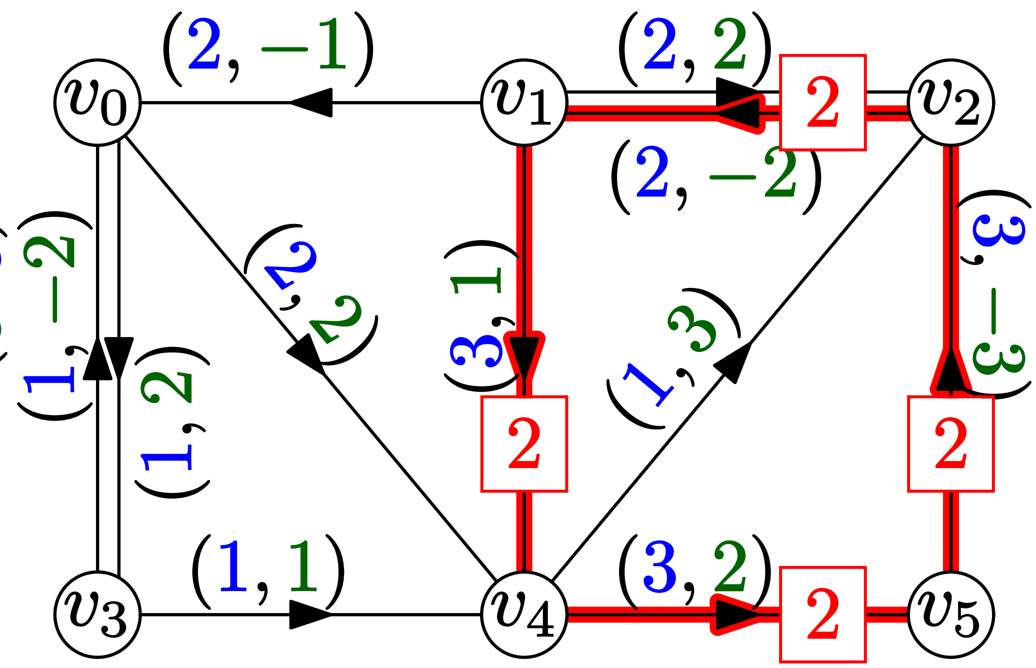
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

負閉路消去法：例 (4/6)



費用 $= 17$

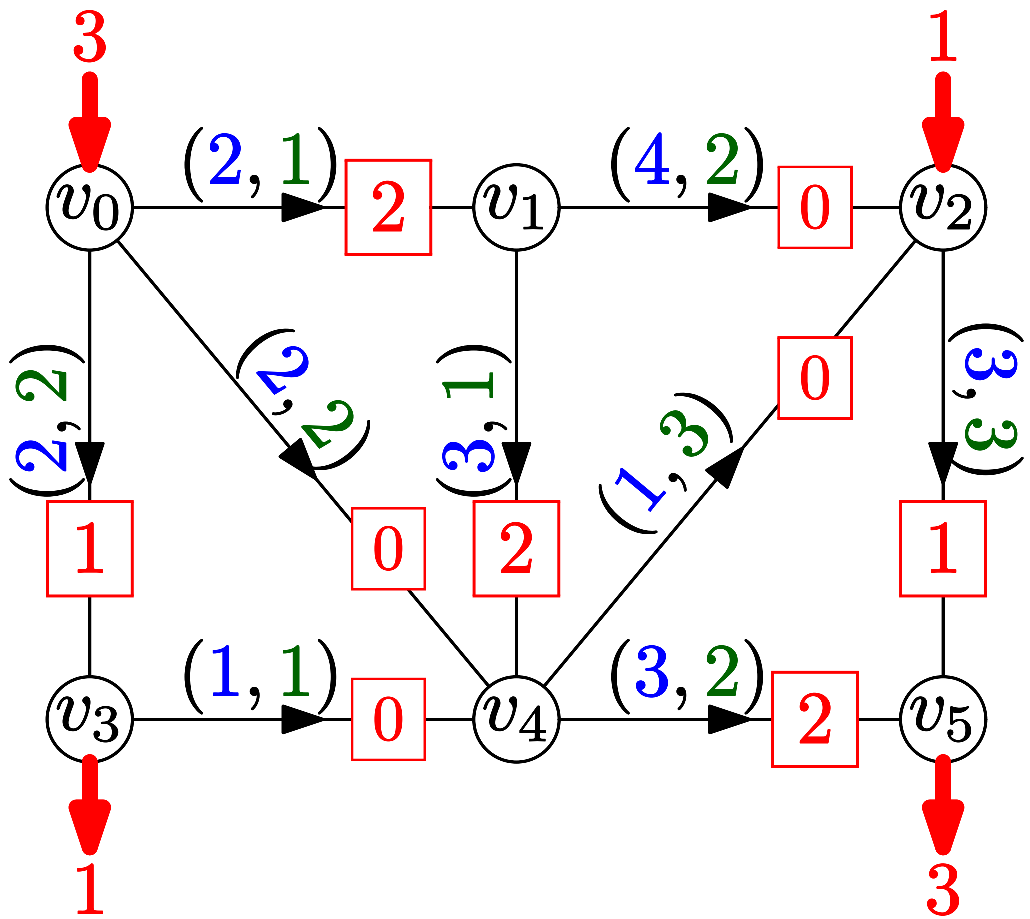


補助ネットワークを作る

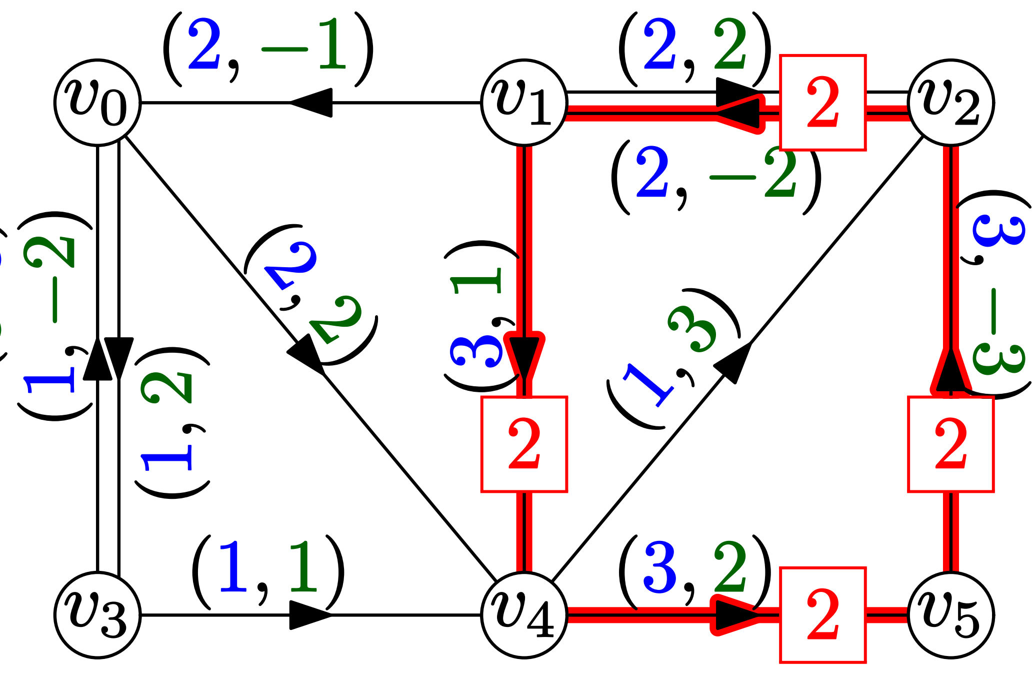
そして，負閉路を探す

あったら，

それに沿って流せるだけ流す



費用 $= 13$



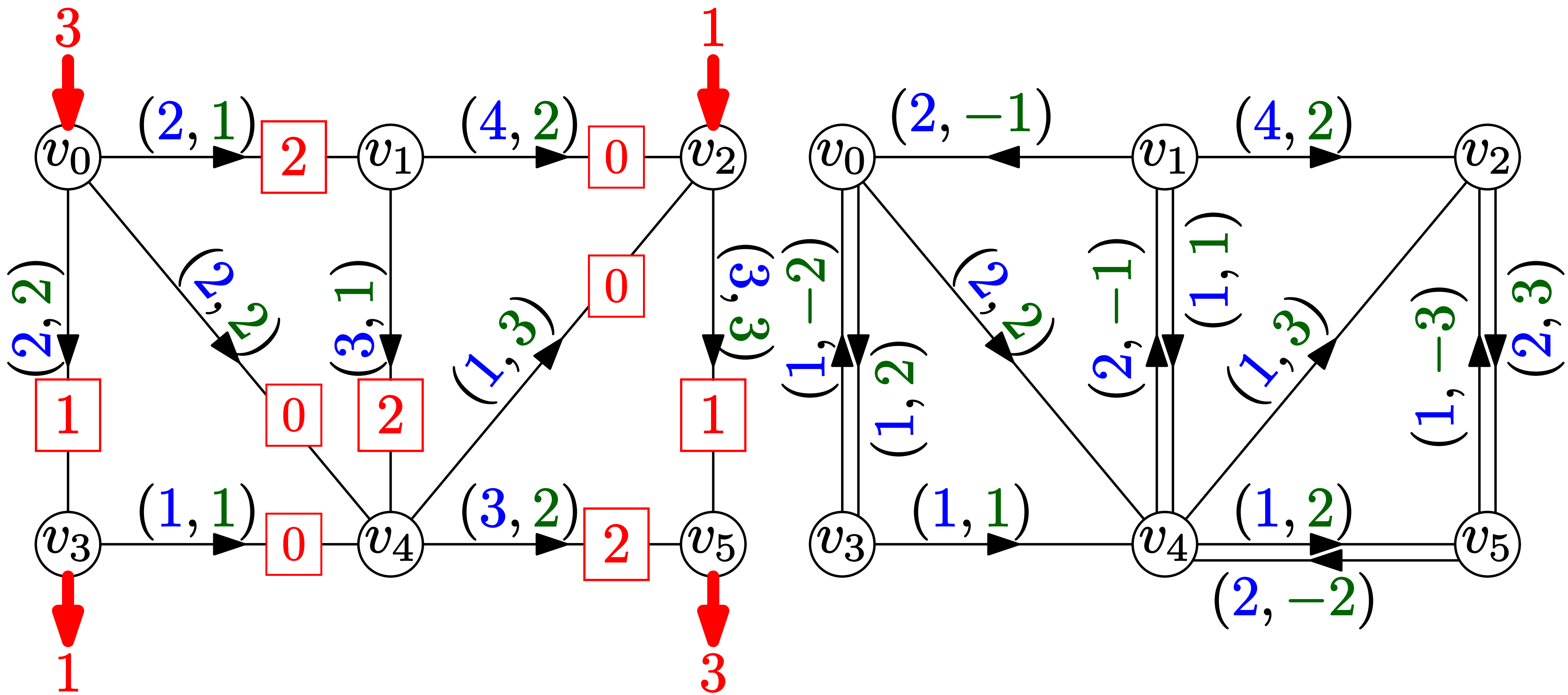
補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

あったら，

それに沿って流せるだけ流す

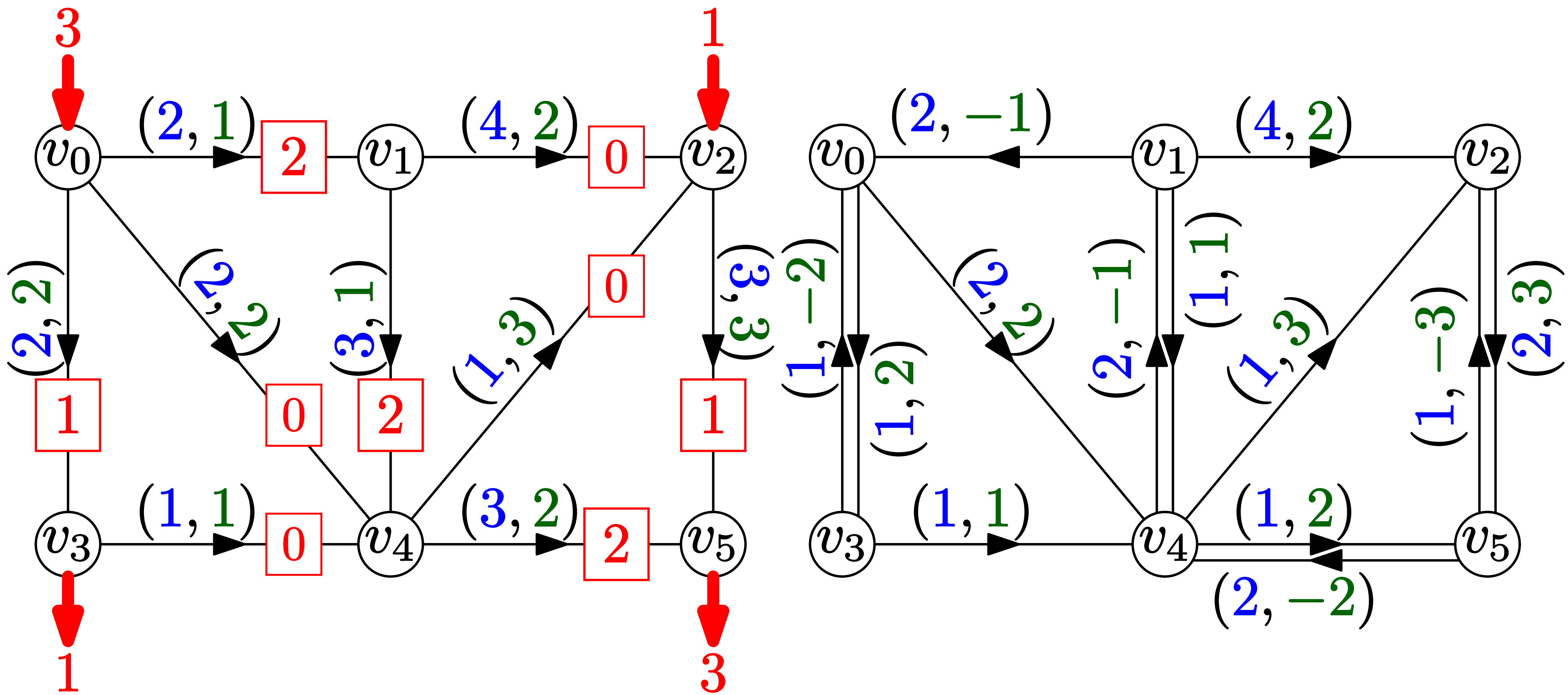
負閉路消去法：例 (5/6)



費用 $= 13$

補助ネットワークを作る

負閉路消去法：例 (5/6)

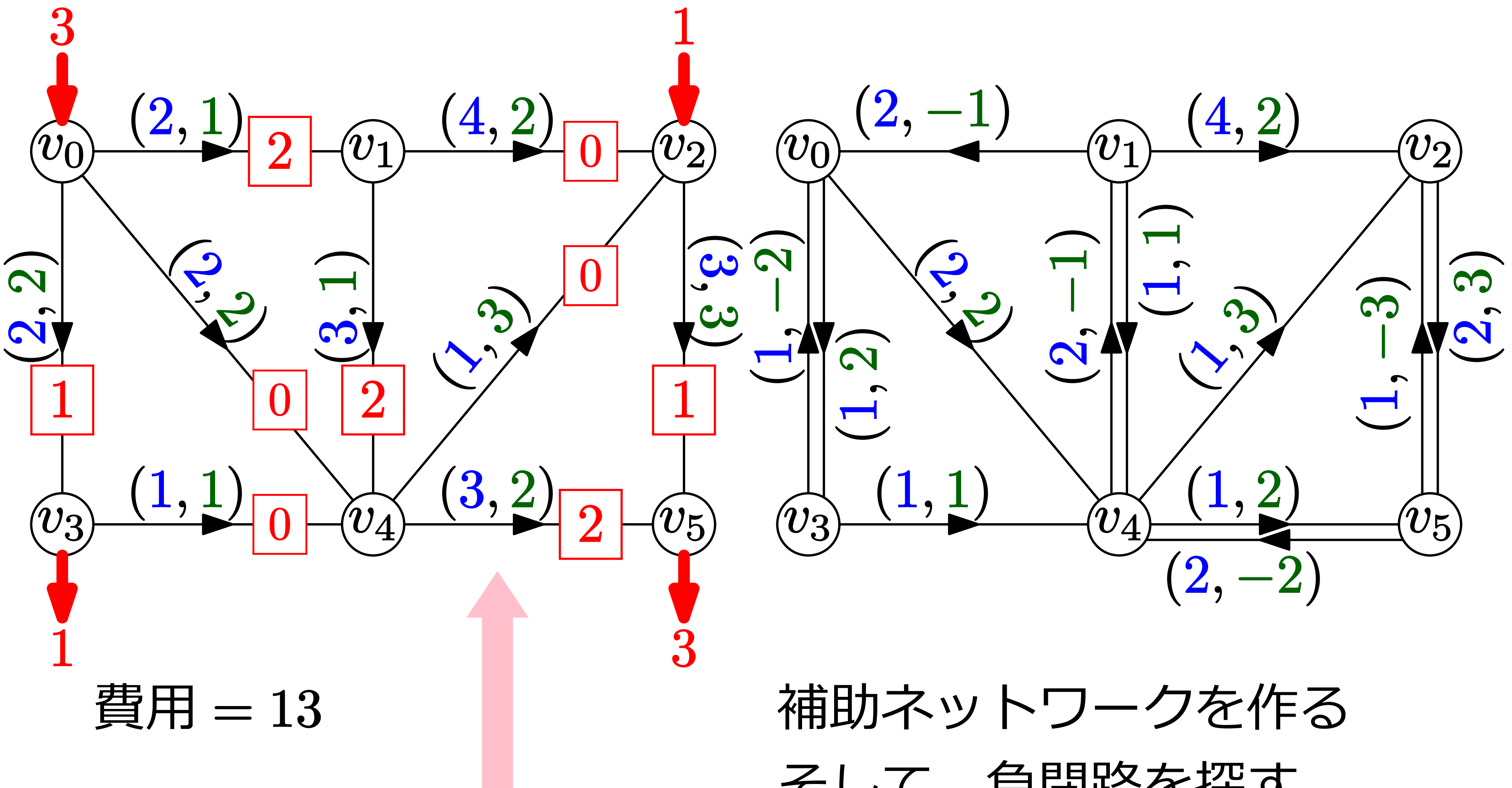


費用 $= 13$

補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

しかし，存在しない



費用 $= 13$

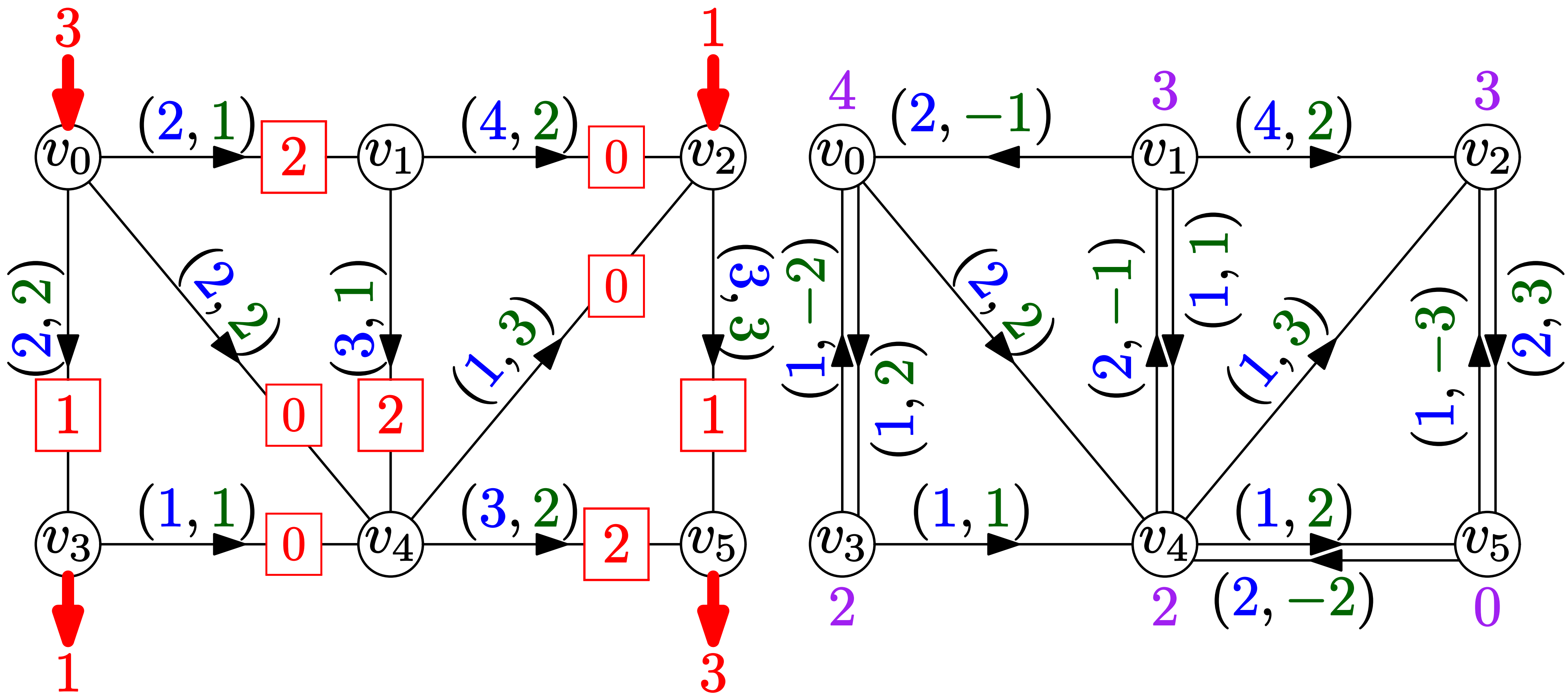
最小費用 b-流！

補助ネットワークを作る

そして，負閉路を探す

しかし，存在しない

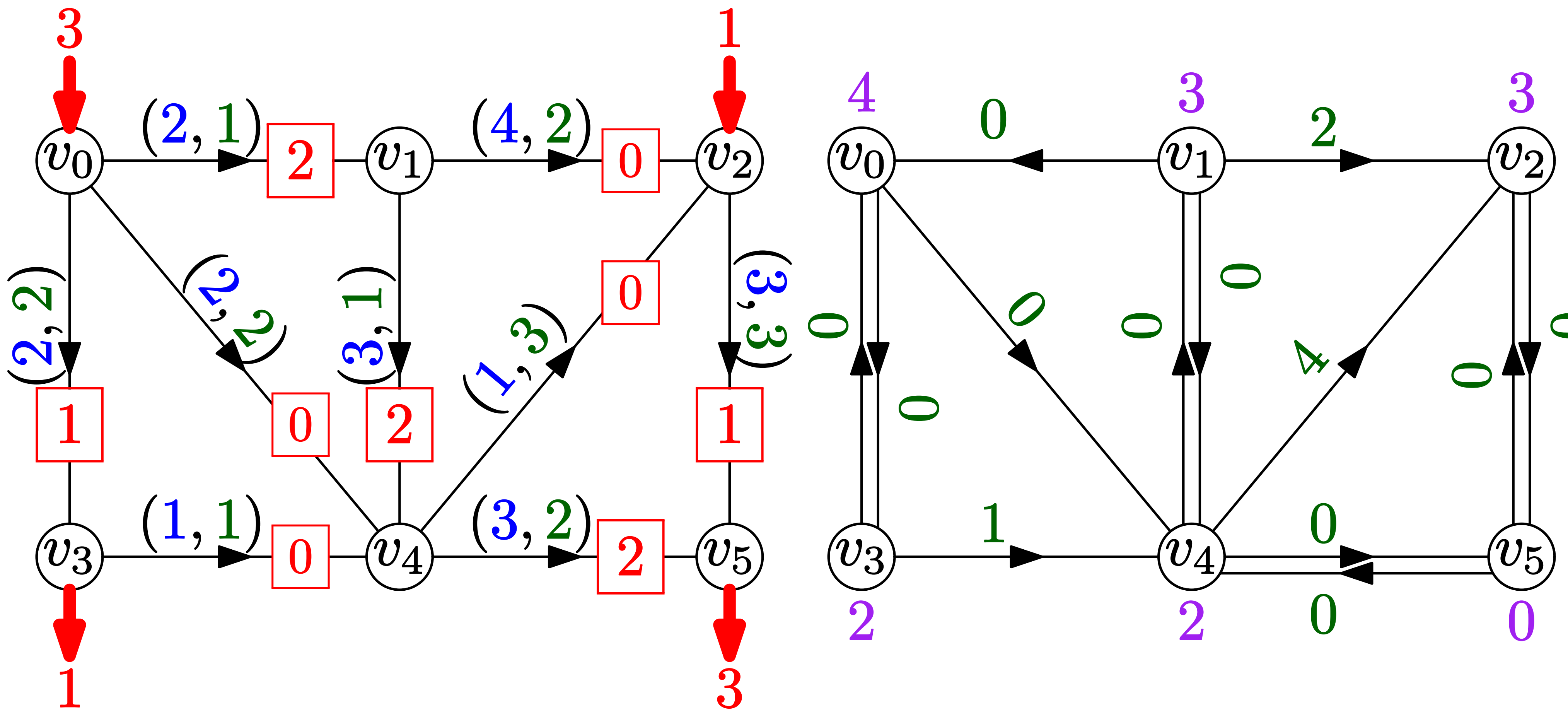
負閉路消去法：例 (6/6)



費用 $= 13$

距離からポテンシャルの導出

負閉路消去法：例 (6/6)



費用 $= 13$

距離からポテンシャルの導出

簡約費用の非負性を確認

負閉路消去法

最小費用流問題に対するアルゴリズム

アルゴリズム：負閉路消去法 (Klein 67)

- 初期化：b-流を 1 つ見つける (f とする)
- 反復：(G_f, u_f, c_f) に負閉路がある限り，次を実行
  - 負閉路 C に沿って流せるだけ流して，f を更新
- f を出力

負閉路消去法

最小費用流問題に対するアルゴリズム

アルゴリズム：負閉路消去法 (Klein 67)

- 初期化：b-流を 1 つ見つける (f とする)
- 反復：(G_f, u_f, c_f) に負閉路がある限り，次を実行
  - 負閉路 C に沿って流せるだけ流して，f を更新
- f を出力

性質：負閉路消去法の正当性

負閉路消去法が停止する $\Rightarrow$
出力 f は最小費用 b-流である

証明：負閉路最適性条件より □

負閉路消去法の計算量 (証明なし)

負閉路の選択に工夫なし

停止しない場合がある

負閉路の選択に工夫あり

最小平均閉路消去法 (minimum mean cycle canceling algo.)
(Goldberg, Tarjan ’89)

計算量：$O(n^2 m^3 \log n)$ (強多項式時間)

その後，改善あり

$$\text{閉路 } C \text{ の平均費用} = \frac{\sum_{a \in C} c_f(a)}{|C|}$$

負閉路消去法と相補性定理

相補性定理：f, y, z が最適解

$\Leftrightarrow$ 主許容性 + 双対許容性 + 相補性条件

負閉路消去法に対する視点

主許容性
相補性 を満たしたまま **双対許容性** を満たしに行く

$$\begin{tikzcd} \text{(主許容解)}\quad b\text{-流}\ f \arrow[r, "\text{更新}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{相補性}"'] & f\ \text{(主許容解)} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{相補性}"] \\ \text{(双対非許容解)}\ \text{ポテンシャル}\ p \arrow[r, "\text{更新}"] & p\ \text{(双対許容解)} \end{tikzcd}$$

まとめと予告

最小費用流問題

最適性条件 → アルゴリズム

- 簡約費用最適性条件
- **負閉路最適性条件**
- 正カット最適性条件

- 次々回
- **負閉路消去法**
- 次回

次回の内容

- 最適性条件：正カット最適性条件
- アルゴリズム：正カット消去法