離散最適化基礎論

第 9 回

最小費用流問題：線形計画問題として

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 12 月 12 日

最終更新：2023 年 12 月 13 日　10:35

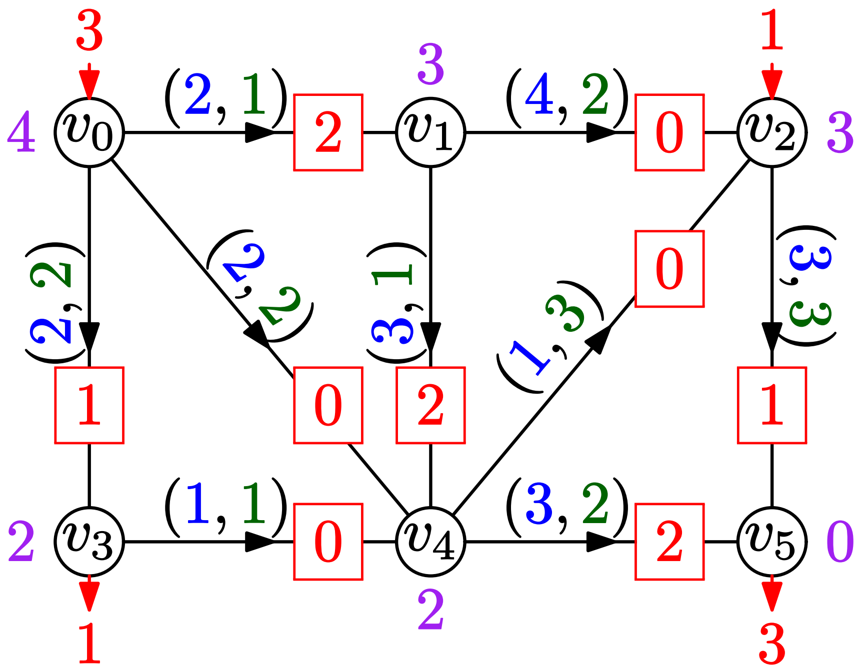
スケジュール (前半)

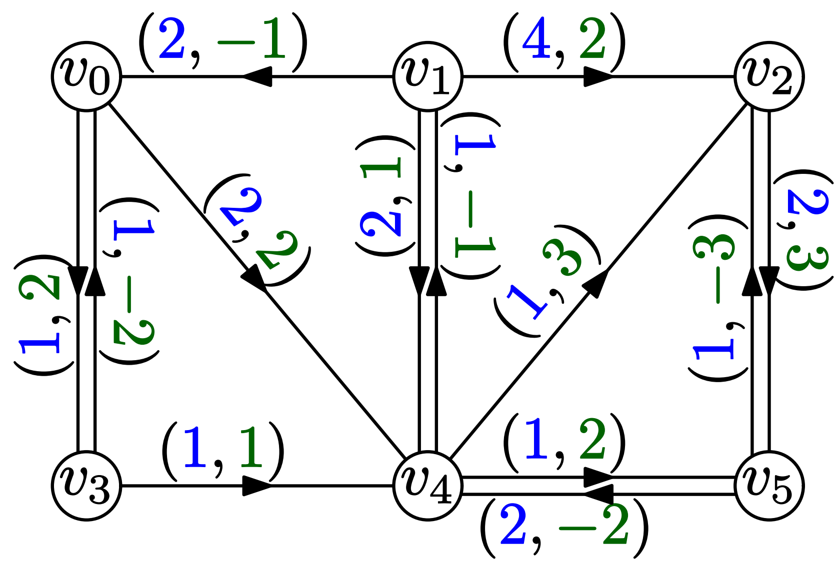
1.	最大流と最小費用流：定義	(10/3)
2.	最大流問題：増加道法	(10/10)
＊	休み	(10/17)
3.	線形計画法の復習	(10/24)
4.	最大流問題：線形計画問題として	(10/31)
5.	最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム	(11/7)
6.	最大流問題：容量スケーリング法	(11/14)
7.	最大流問題：Push-Relabel 法 (概要)	(11/21)
8.	最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価)	(11/28)

スケジュール (後半)

*	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
*	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
*	休み	(1/30)

1. **最小費用流問題：復習**
2. 最小費用流問題：線形計画問題として
3. 補助ネットワーク
4. 簡約費用最適性条件





b-流：定義

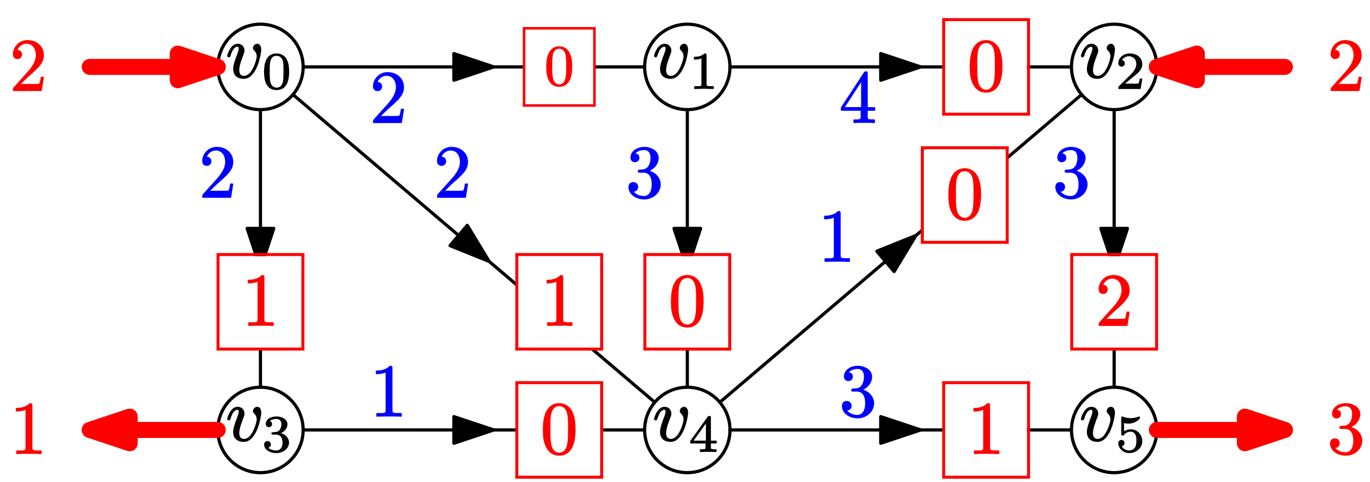
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$
$b\colon V \to \mathbb{R}$ (負の値をとってもよい)

定義：b-流 (b-flow)

b-流 とは 次を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して，$0 \leq f(a) \leq u(a)$
2. 任意の頂点 $v \in V$ に対して，

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$



$b(v_0) = 2,$
$b(v_1) = 0,$
$b(v_2) = 2,$
$b(v_3) = -1,$
$b(v_4) = 0,$
$b(v_5) = -3$

b-流の費用：定義

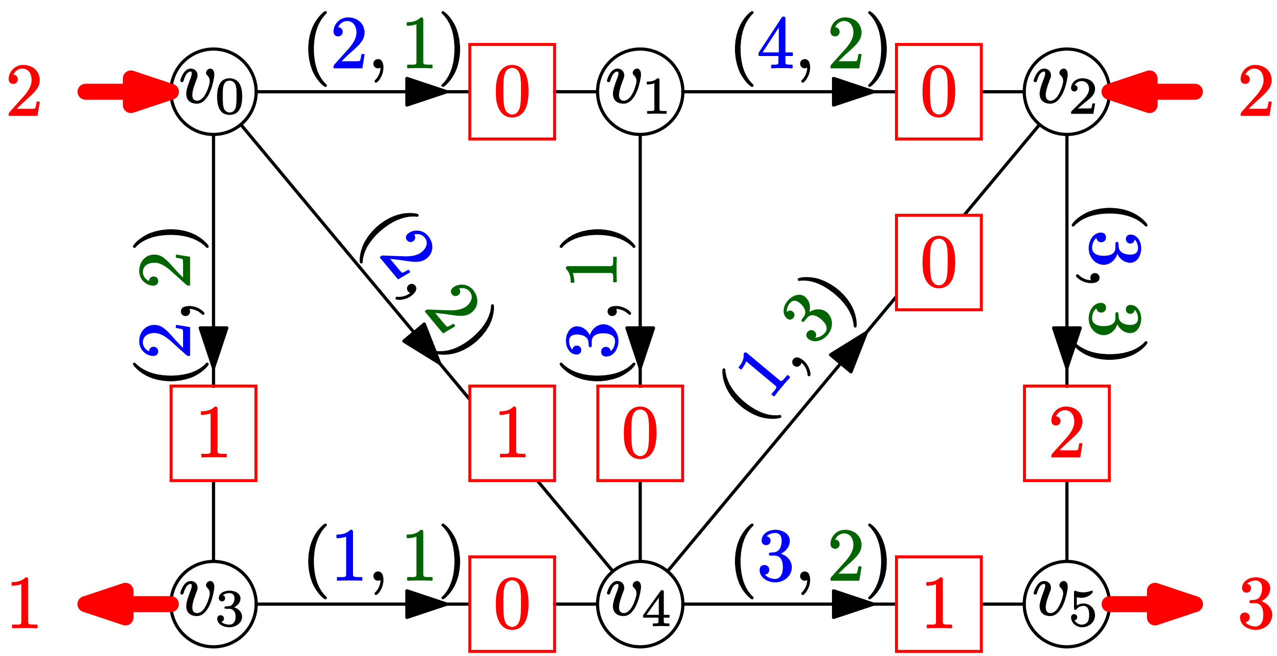
<u>設定</u>：有向グラフ $G=(V,A)$，弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$

弧費用関数 $c\colon A\to\mathbb{R}_+$，$b\colon V\to\mathbb{R}$，b-流 $f\colon V\to\mathbb{R}_+$

定義：b-流の費用

b-流 f の**費用** を次の式で定義する

$$\mathrm{cost}(f)=\sum_{a\in A}c(a)f(a)$$



$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(f)&\\ =0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2&\\ +0\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 3&\\ +0\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 2&\\ =12&\end{aligned}$$

最小費用流問題 (b-流バージョン)：定義

定義：最小費用流問題 (minimum-cost flow problem)

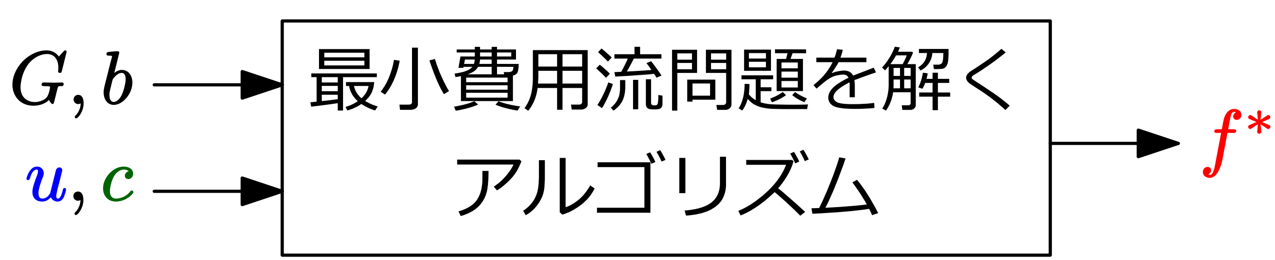
入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，関数 $b\colon V \to \mathbb{R}$
- 弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$

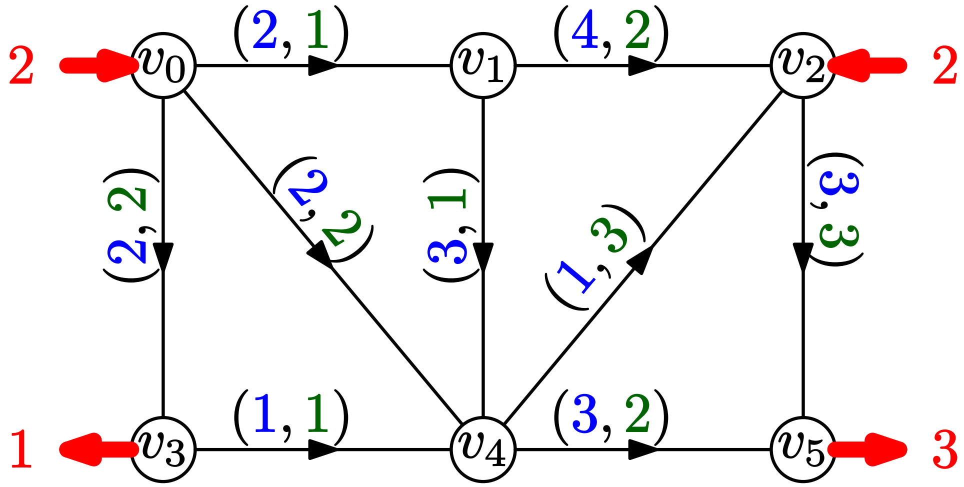
出力

- ネットワーク (G, u, c) に対する最小費用 b-流 f^*

任意の b-流 f に対して，$\mathrm{cost}(f^*) \leq \mathrm{cost}(f)$

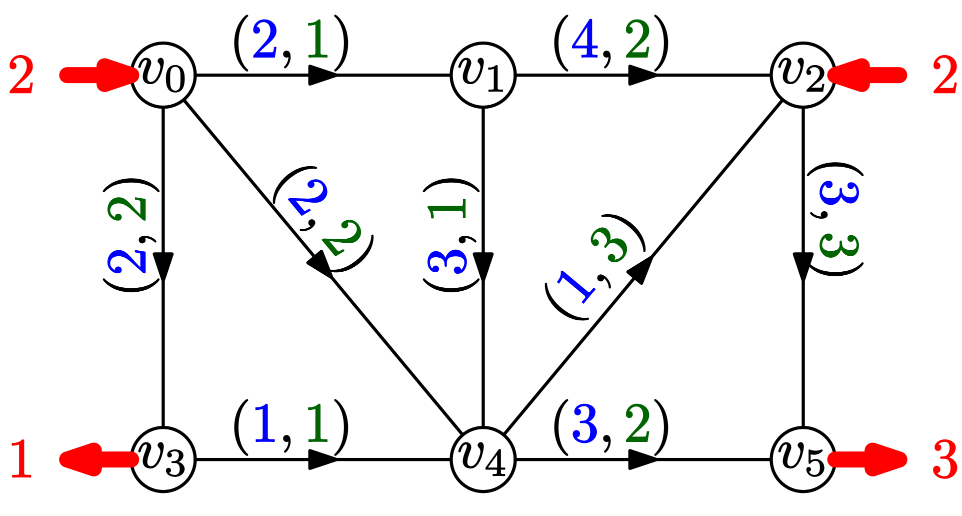


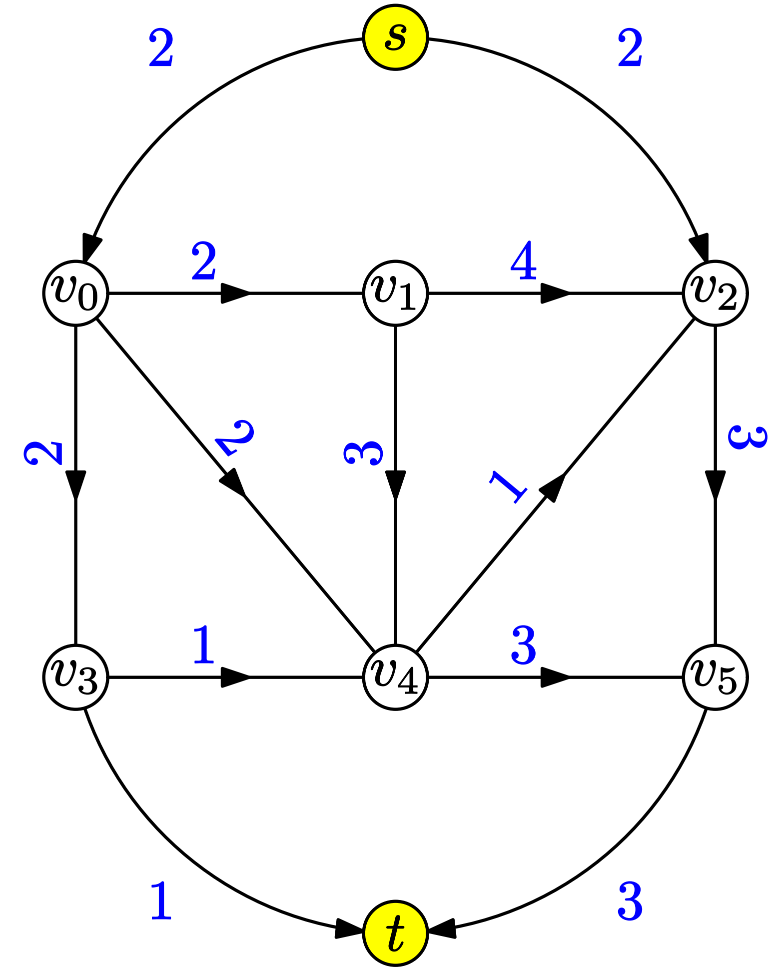
存在の必要条件：$\sum_{v \in V} b(v) = 0$



b-流が存在することの判定

<u>存在の必要条件</u>：$\displaystyle\sum_{v \in V} b(v) = 0$

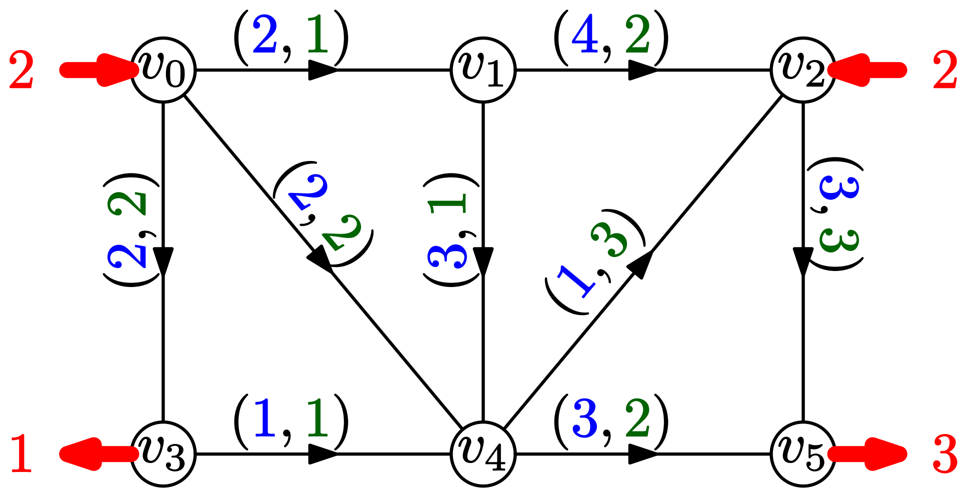


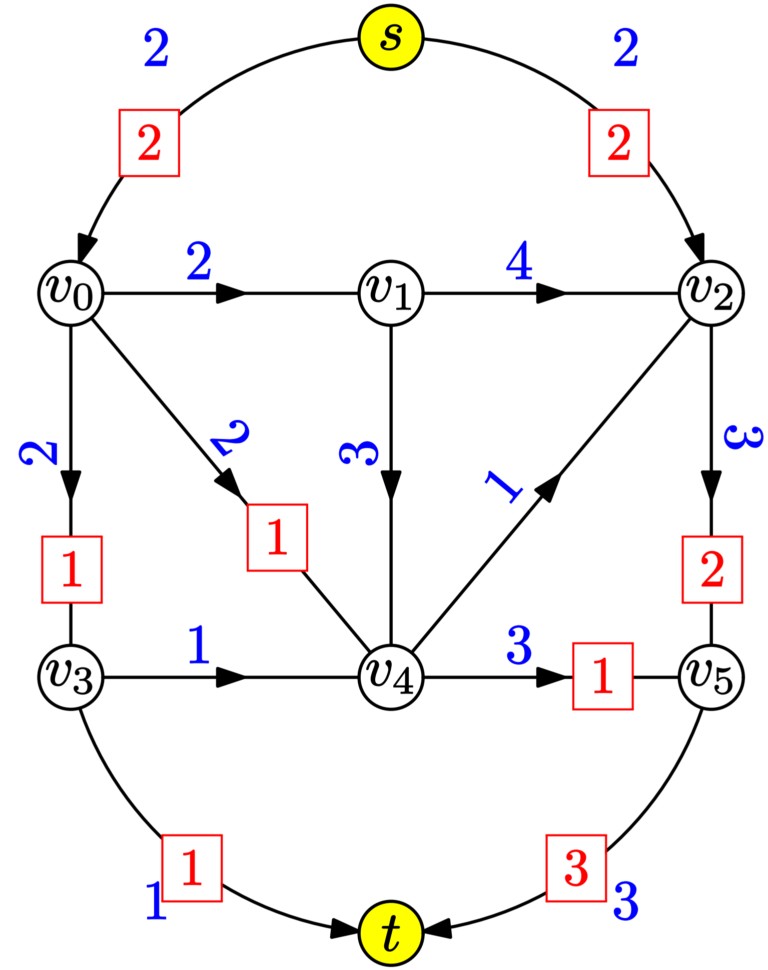


<u>存在の十分条件</u>：最大流の値 $\displaystyle = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |b(v)|$

b-流が存在することの判定

存在の必要条件：$\sum_{v \in V} b(v) = 0$

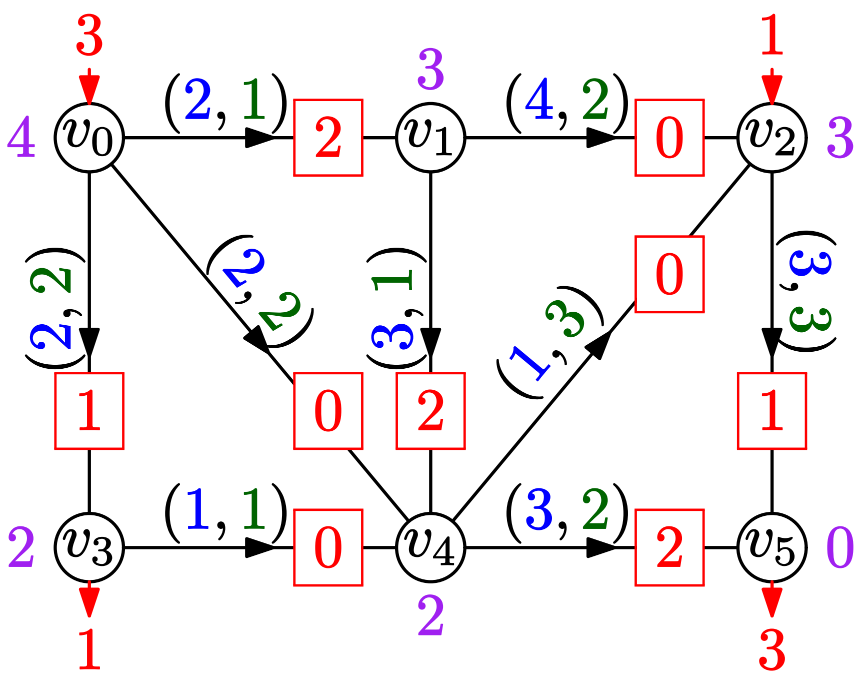


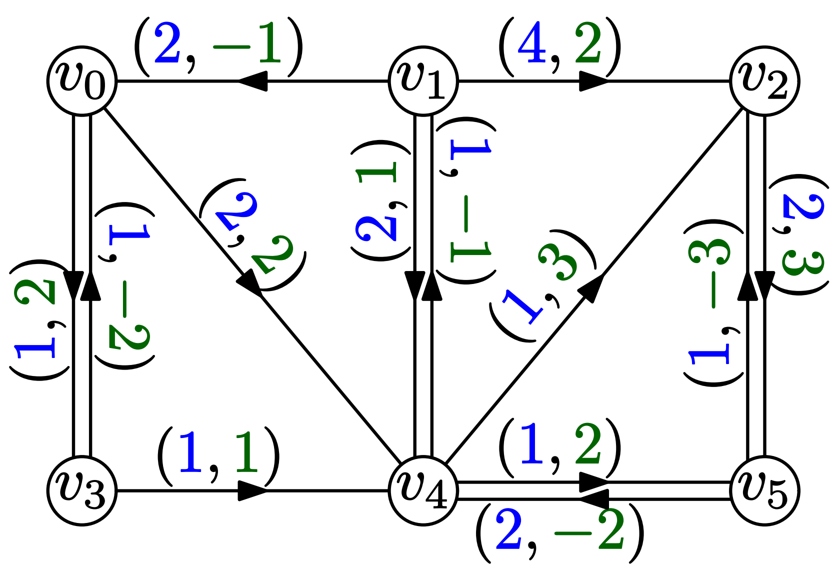


存在の十分条件：最大流の値 $= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |b(v)|$

本日の内容

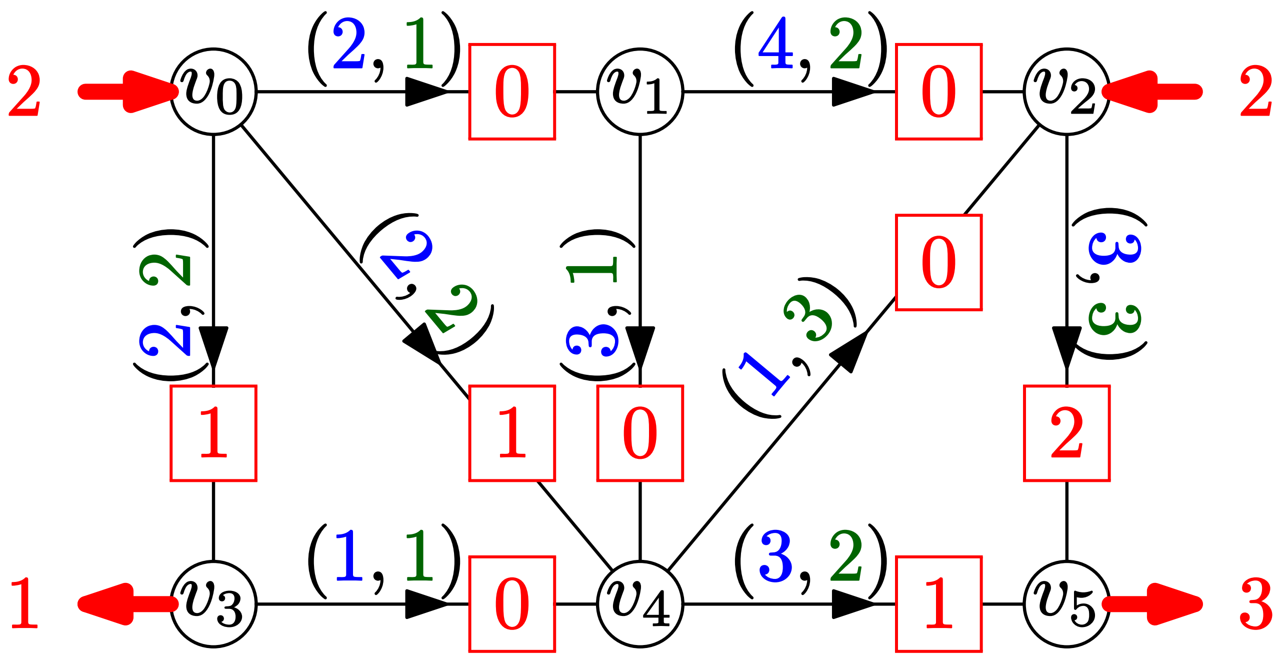
1. 最小費用流問題：復習
2. **最小費用流問題：線形計画問題として**
3. 補助ネットワーク
4. 簡約費用最適性条件





目標

最小費用流問題 を 線形計画問題として書く



最小費用流：線形計画問題として

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{a \in A} c_a f_a \\
\text{subject to} \quad & f_a \leq u_a & \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = b_v & \forall\, v \in V, \\
& f_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} c_a f_a \\
\text{s.t.} \quad & -f_a \geq -u_a & \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = b_v & \forall\, v \in V, \\
& f_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 \\
\text{s.t.} \quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

最小費用流：ベクトルと行列で

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} {\color{green}c_a} {\color{red}f_a} \\
\text{s.t.} \quad & -{\color{red}f_a} \geq -{\color{blue}u_a} & \forall a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^+(v)} {\color{red}f_a} - \sum_{a \in \delta^-(v)} {\color{red}f_a} = b_v & \\
& & \forall v \in V, \\
& {\color{red}f_a} \geq 0 & \forall a \in A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 \\
\text{s.t.} \quad & A_{11} \boldsymbol{x}_1 + A_{12} \boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21} \boldsymbol{x}_1 + A_{22} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x}_1 = {\color{red}\boldsymbol{f}}, n_2 = 0, \quad (c_1)_a = {\color{green}c_a}, \quad (b_1)_a = -{\color{blue}u_a}, \quad A_{11} = -I
$$

$$
(b_2)_v = b_v, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

双対問題：準備

主問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \\
\text{s.t.} & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.} & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1, \\
& A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2, \\
& \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0, \ \ (\boldsymbol{c}_1)_a = c_a, \ \ (\boldsymbol{b}_1)_a = -u_a, \ \ A_{11} = -I$$

$$(\boldsymbol{b}_2)_v = b_v, \quad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

主問題

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & c_1^{\mathrm{T}} x_1 + \cancel{c_2^{\mathrm{T}} x_2} \\ \text{s.t.} & A_{11} x_1 + \cancel{A_{12} x_2} \geq b_1, \\ & A_{21} x_1 + \cancel{A_{22} x_2} = b_2, \\ & x_1 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & b_1^{\mathrm{T}} y_1 + b_2^{\mathrm{T}} y_2 \\ \text{s.t.} & A_{11}^{\mathrm{T}} y_1 + A_{21}^{\mathrm{T}} y_2 \leq c_1, \\ & \cancel{A_{12}^{\mathrm{T}} y_1 + A_{22}^{\mathrm{T}} y_2 = c_2,} \\ & y_1 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$x_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0, \ (c_1)_a = c_a, \ (b_1)_a = -u_a, \ A_{11} = -I$$

$$(b_2)_v = b_v, \quad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

双対問題：準備

主問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2} \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{12}\boldsymbol{x}_2} \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{22}\boldsymbol{x}_2} = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1, \\
& \cancel{A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2,} \\
& \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

あとの都合上，$(\boldsymbol{y}_1)_a = z_a, (\boldsymbol{y}_2)_v = y_v$ と書くことにする

$$
\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0,\ \ (\boldsymbol{c}_1)_a = c_a,\ \ (\boldsymbol{b}_1)_a = -u_a,\ \ A_{11} = -I
$$

$$
(\boldsymbol{b}_2)_v = b_v, \quad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

双対問題：目的関数

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -\sum_{a\in A} u_a z_a + \sum_{v\in V} b_v y_v \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c}_1, \\
& z_a \ge 0 \qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c}_1, \\
& \boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0,\ \ (\boldsymbol{c}_1)_a = c_a,\ \ (\boldsymbol{b}_1)_a = -u_a,\ \ A_{11} = -I$$

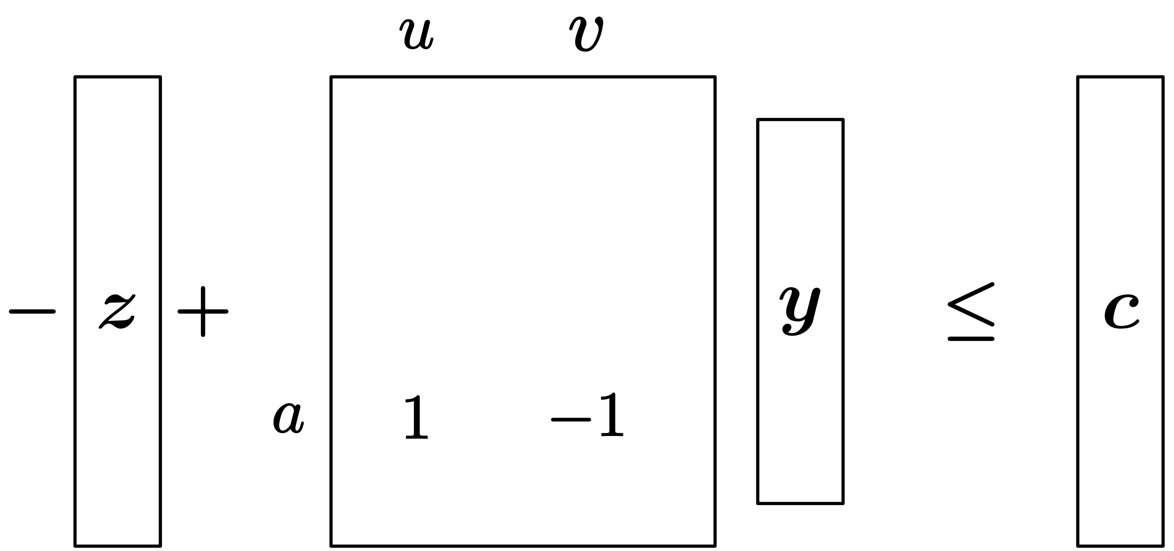
$$(\boldsymbol{b}_2)_v = b_v, \quad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

双対問題：不等式制約

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & -\sum_{a\in A} u_a z_a + \sum_{v\in V} b_v y_v \\
\text{s.t.} \quad & A_{11}^{\mathrm{T}} z + A_{21}^{\mathrm{T}} y \le c_1, \\
& z_a \ge 0 \qquad\qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} \quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c}_1, \\
& \boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$



$$u \xrightarrow{a} v$$

$$
A_{11} = -I, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases} \qquad (c_1)_a = c_a
$$

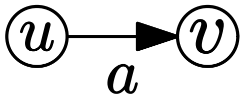
双対問題：不等式制約 (続)

$$
\begin{array}{lll}
\text{max.} & -\sum_{a\in A} u_a z_a + \sum_{v\in V} b_v y_v & \\
\text{s.t.} & -z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv} & \forall\, uv \in A, \\
 & z_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}_1, \\
 & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$
-\boxed{\boldsymbol{z}} + \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ a & \boxed{\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array}} \end{array} \boxed{\boldsymbol{y}} \leq \boxed{\boldsymbol{c}}
$$



$$
A_{11} = -I, \quad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(v)), \\ -1 & (a \in \delta^-(v)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases} \quad (c_1)_a = c_a
$$

最小費用流問題と双対問題

主問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} c_a f_a \\
\text{s.t.} \quad & 0 \le f_a \le u_a \qquad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = b_v \\
& \qquad \forall\, v \in V
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & -\sum_{a \in A} u_a z_a + \sum_{v \in V} b_v y_v \\
\text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \le c_{uv} \\
& \qquad \forall\, uv \in A, \\
& z_a \ge 0 \qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

相補性条件

主問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} c_a f_a \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq f_a \leq u_a \quad \forall\, a \in A, \\ & \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a = b_v \\ & \forall\, v \in V \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -\sum_{a \in A} u_a z_a + \sum_{v \in V} b_v y_v \\ \text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv} \\ & \forall\, uv \in A, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

相補性定理：f が主問題の最適解，y, z が双対問題の最適解

$\Leftrightarrow$

- f が主問題の許容解
- y, z が双対問題の許容解
- $(u_a - f_a) z_a = 0 \qquad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \qquad \forall\, uv \in A$

相補性条件

主問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a\in A} c_a f_a \\ \text{s.t.} \quad & 0 \le f_a \le u_a \qquad \forall\, a \in A, \\ & \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(v)} f_a = b_v \\ & \qquad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -\sum_{a\in A} u_a z_a + \sum_{v\in V} b_v y_v \\ \text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \le c_{uv} \\ & \qquad \forall\, uv \in A, \\ & z_a \ge 0 \qquad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

相補性定理：f が主問題の最適解，y, z が双対問題の最適解

$\Leftrightarrow$

- f が主問題の許容解
- y, z が双対問題の許容解
- $(u_a - f_a)z_a = 0 \qquad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \qquad \forall\, uv \in A$

最適性条件を
線形計画法のことばで
述べたもの

双対問題の許容性

双対問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -\sum_{a \in A} u_a z_a + \sum_{v \in V} b_v y_v \\ \text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \le c_{uv} \\ & \qquad\qquad \forall\, uv \in A, \\ & z_a \ge 0 \qquad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

次は，双対問題の許容解

$$y_v = 0 \qquad \forall\, v \in V$$

$$z_a = 0 \qquad \forall\, a \in A$$

注：$\boldsymbol{c} \ge \boldsymbol{0}$

次は，双対問題の許容解

$$y_v = 0 \qquad \forall\, v \in V$$

$$z_a = 0 \qquad \forall\, a \in A$$

注：$\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -\sum_{a\in A} u_a z_a + \sum_{v\in V} b_v y_v \\ \text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, uv \in A, \\ & z_a \geq 0 \qquad\qquad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

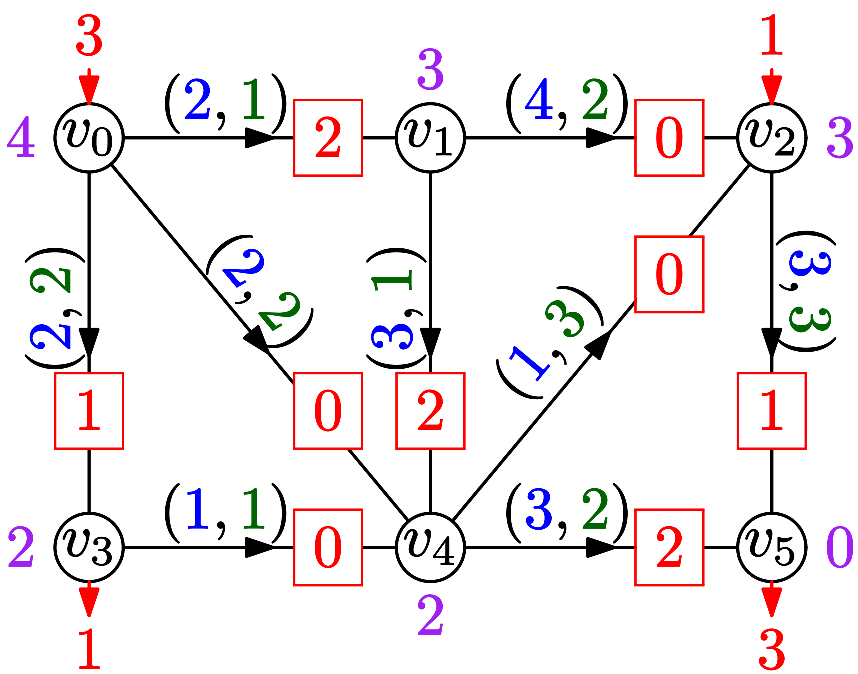
性質：最小費用流の存在

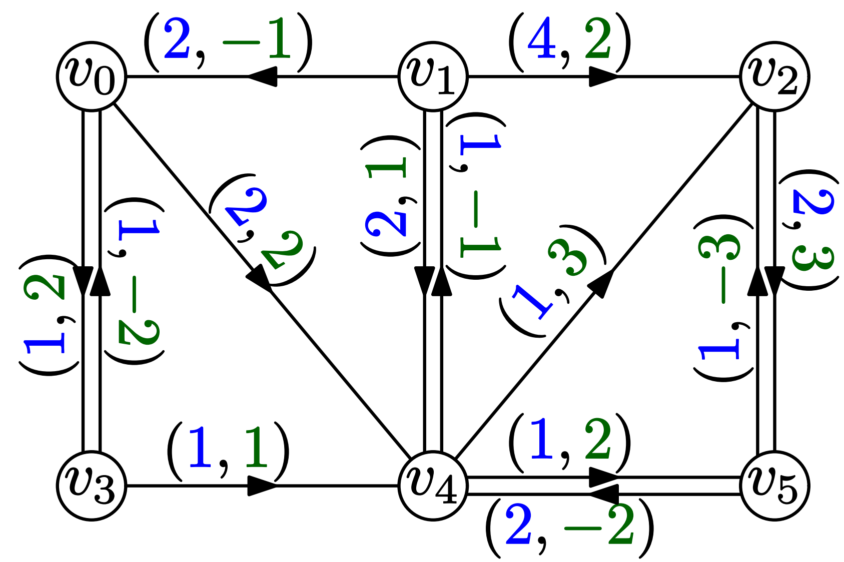
b-流が存在する $\Rightarrow$ 最小費用 b-流が存在する

証明：線形計画法の強双対定理より □

本日の内容

1. 最小費用流問題：復習
2. 最小費用流問題：線形計画問題として
3. **補助ネットワーク**
4. 簡約費用最適性条件





ここからの目標

目標

最適性条件を ネットワークのことばで 述べたい

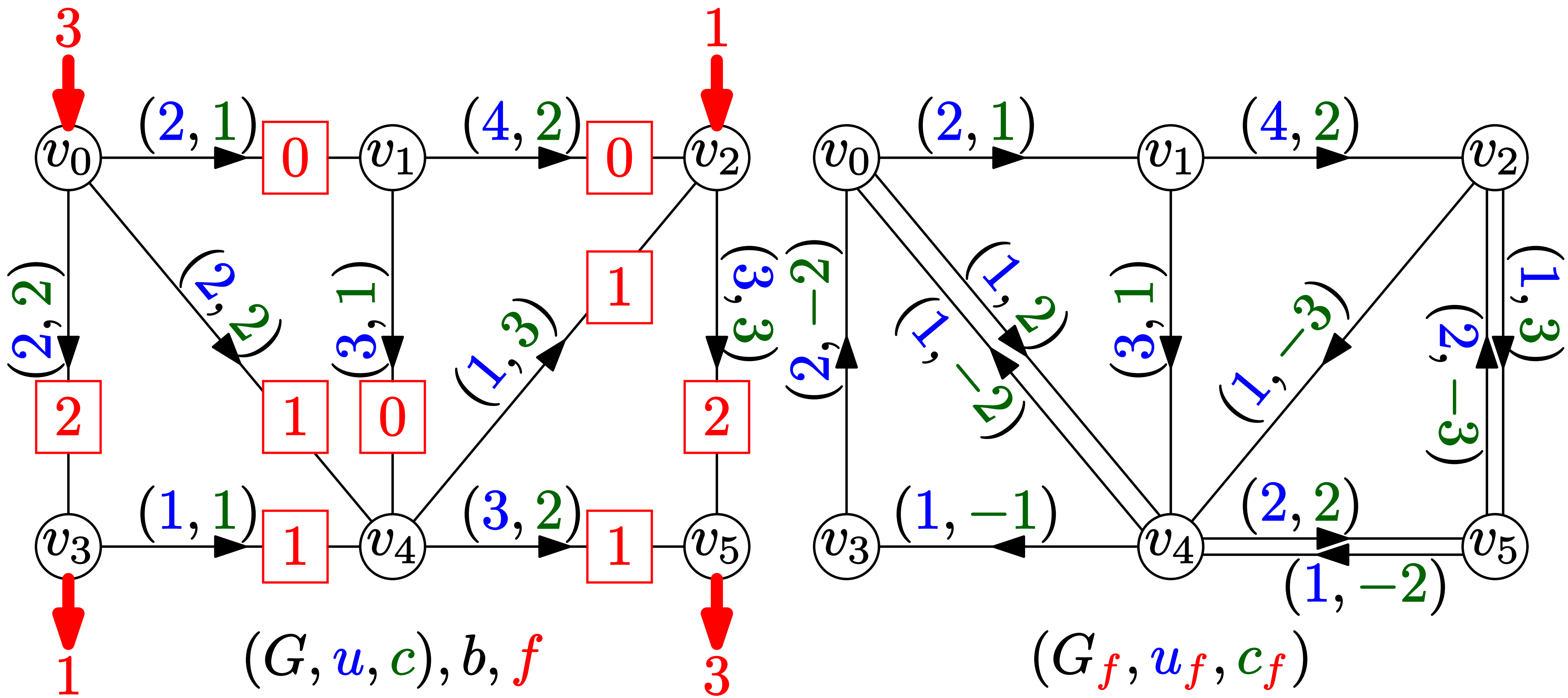
<u>相補性定理</u>：f が主問題の最適解，y, z が双対問題の最適解

$\Leftrightarrow$

- f が主問題の許容解
- y, z が双対問題の許容解
- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall uv \in A$

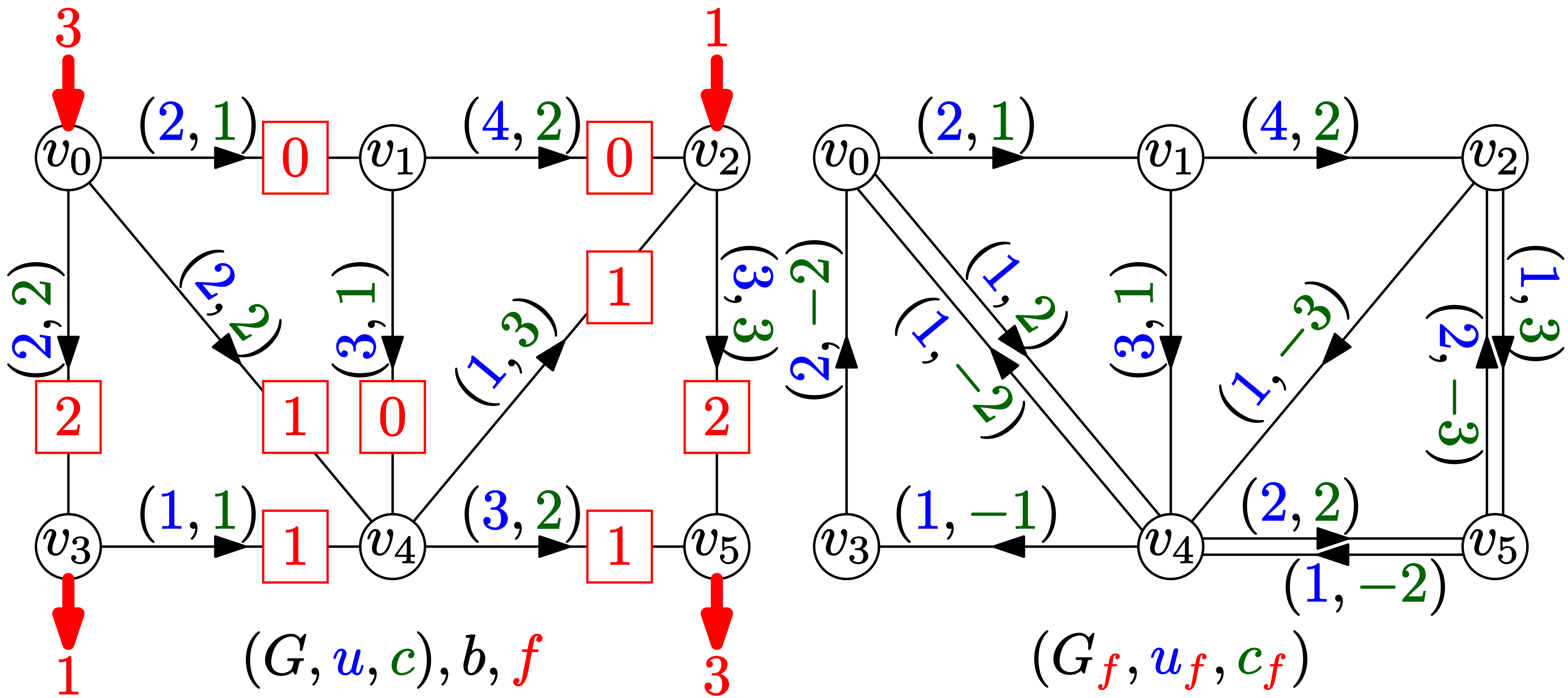
最適性条件を
線形計画法のことばで
述べたもの

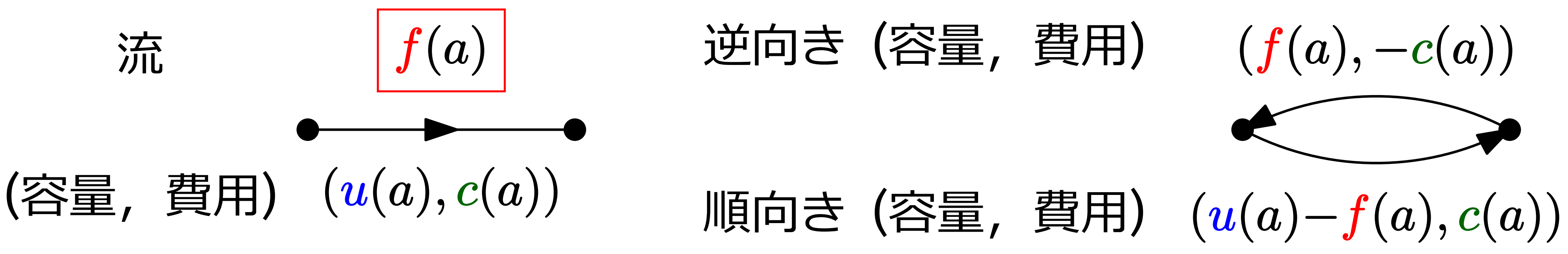
補助ネットワーク：例



3
1
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
$(2, 1)$
$(4, 2)$
$(2, 2)$
$(3, 1)$
$(1, 3)$
$(3, 3)$
$(1, 1)$
$(3, 2)$
0
0
1
2
1
0
2
1
1
1
3
$(G, u, c), b, f$
$(2, -2)$
$(1, 2)$
$(1, -2)$
$(1, -3)$
$(2, -3)$
$(1, 3)$
$(1, -1)$
$(2, 2)$
$(1, -2)$
(G_f, u_f, c_f)

補助ネットワーク：例


3
1
$(2,1)$
$(4,2)$
v_0
v_1
v_2
0
0
$(2,2)$
$(2,2)$
$(3,1)$
$(1,3)$
$(3,3)$
1
2
1
0
2
$(1,1)$
$(3,2)$
v_3
v_4
v_5
1
1
1
3
$(G, u, c), b, f$
$(2,1)$
$(4,2)$
$(2,-2)$
$(1,2)$
$(3,1)$
$(1,-2)$
$(1,-3)$
$(1,3)$
$(2,-3)$
$(1,-1)$
$(2,2)$
$(1,-2)$
(G_f, u_f, c_f)


流
$f(a)$
（容量，費用）
$(u(a), c(a))$
逆向き（容量，費用）
$(f(a), -c(a))$
順向き（容量，費用）
$(u(a) - f(a), c(a))$

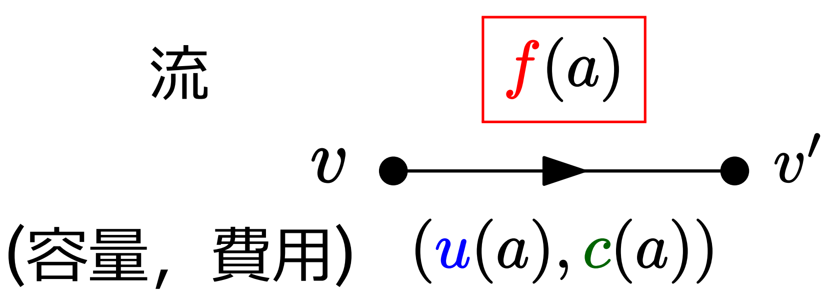
補助ネットワーク：定義 (1/3)

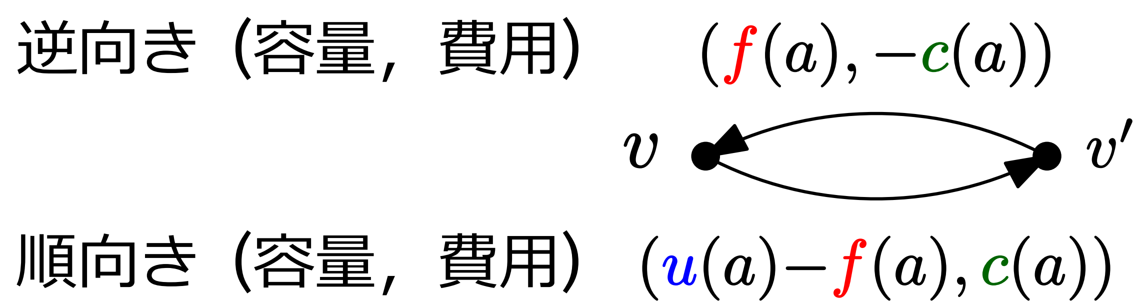
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$，$b \colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：補助ネットワーク (auxiliary network)

f に対する **補助ネットワーク** (G_f, u_f, c_f) を次で定義

- G_f の頂点集合 $= V$
- G_f の弧集合 $= A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}}$
  - $A_f^{\mathrm{F}} = \{(v, v') \mid (v, v') \in A, f(v, v') < u(v, v')\}$
  - $A_f^{\mathrm{B}} = \{(v', v) \mid (v, v') \in A, f(v, v') > 0\}$



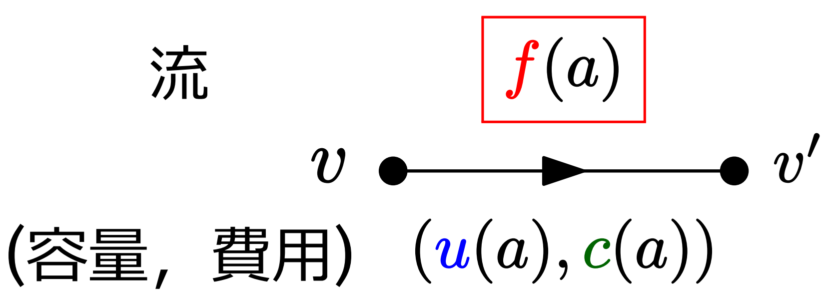


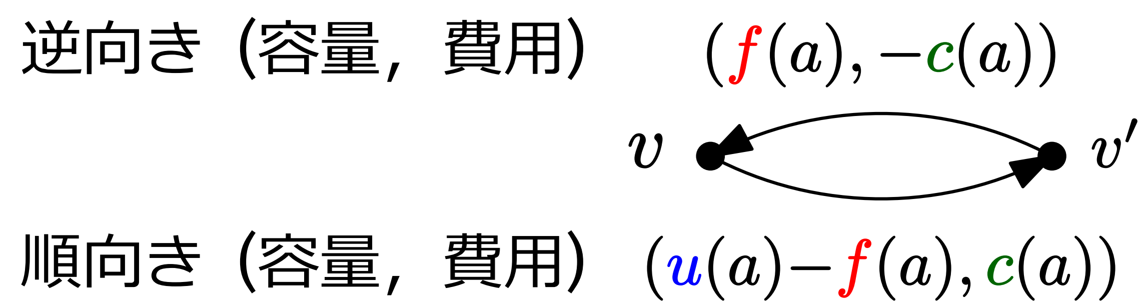
<u>設定</u>：有向グラフ $G=(V,A)$，弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A\to\mathbb{R}_+$，$b\colon V\to\mathbb{R}$，b-流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

定義：補助ネットワーク (auxiliary network)

f に対する **補助ネットワーク** (G_f,u_f,c_f) を次で定義

- 弧容量関数 $u_f\colon A_f^{\mathrm{F}}\cup A_f^{\mathrm{B}}\to\mathbb{R}_+$ は次で定義
  - $(v,v')\in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$u_f(v,v')=u(v,v')-f(v,v')$
  - $(v',v)\in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$u_f(v',v)=f(v,v')$





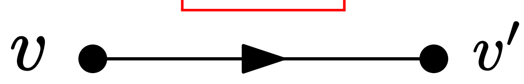
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，$b\colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：補助ネットワーク (auxiliary network)

f に対する **補助ネットワーク** (G_f, u_f, c_f) を次で定義

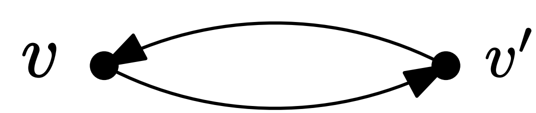
- 弧費用関数 $c_f\colon A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}} \to \mathbb{R}_+$ は次で定義
  - $(v, v') \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$c_f(v, v') = c(v, v')$
  - $(v', v) \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$c_f(v', v) = -c(v, v')$

流　$\boxed{f(a)}$



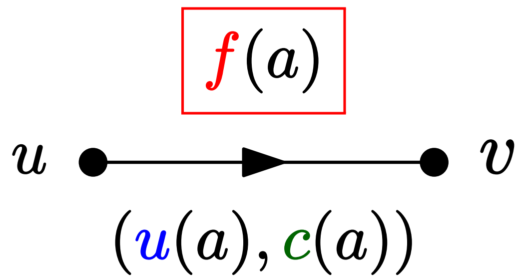
(容量，費用)　$(u(a), c(a))$

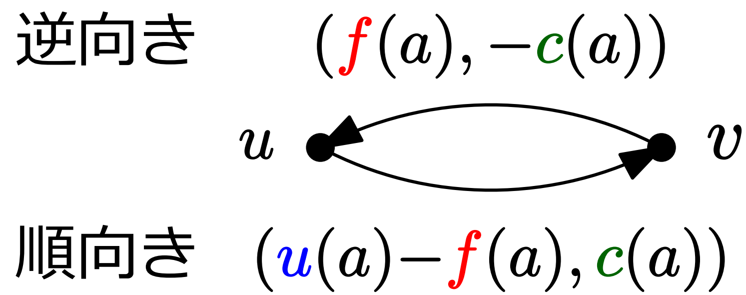
逆向き（容量，費用）　$(f(a), -c(a))$



順向き（容量，費用）　$(u(a)-f(a), c(a))$

補助ネットワークと相補性条件

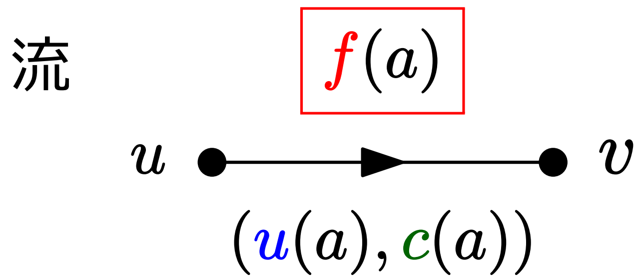


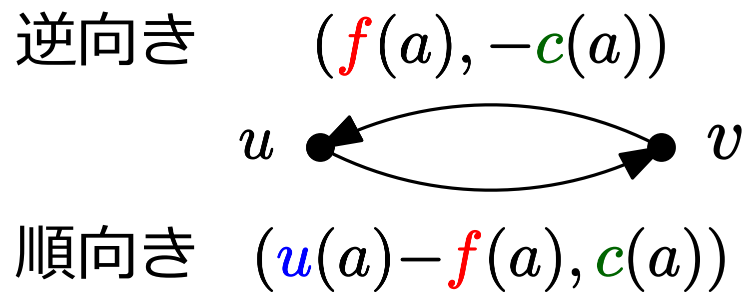


相補性条件：

- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

補助ネットワークと相補性条件





順向きの弧 uv がある $\Leftrightarrow u_{uv} - f_{uv} > 0$

$\Rightarrow z_{uv} = 0$

逆向きの弧 vu がある $\Leftrightarrow f_{uv} > 0$

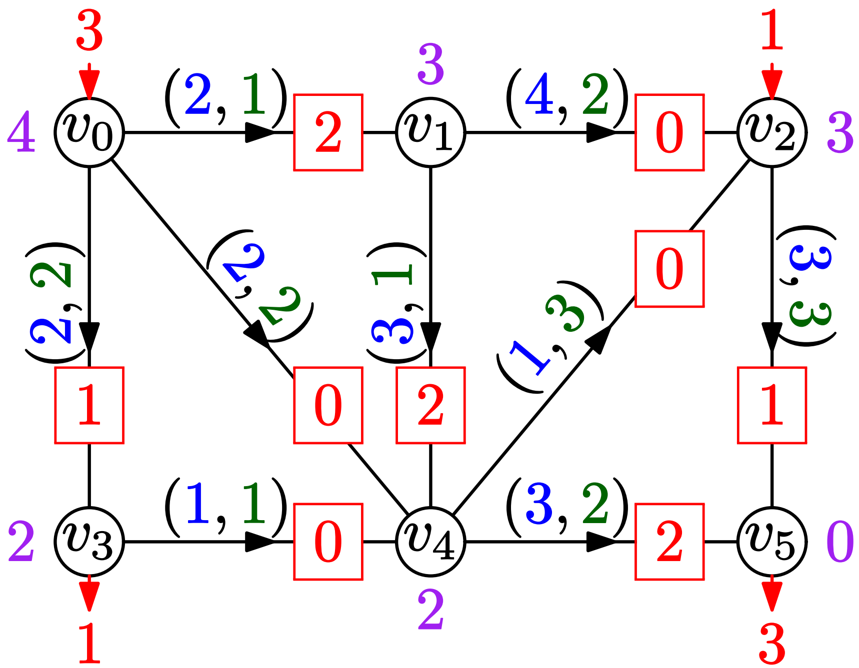
$\Rightarrow c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v = 0$

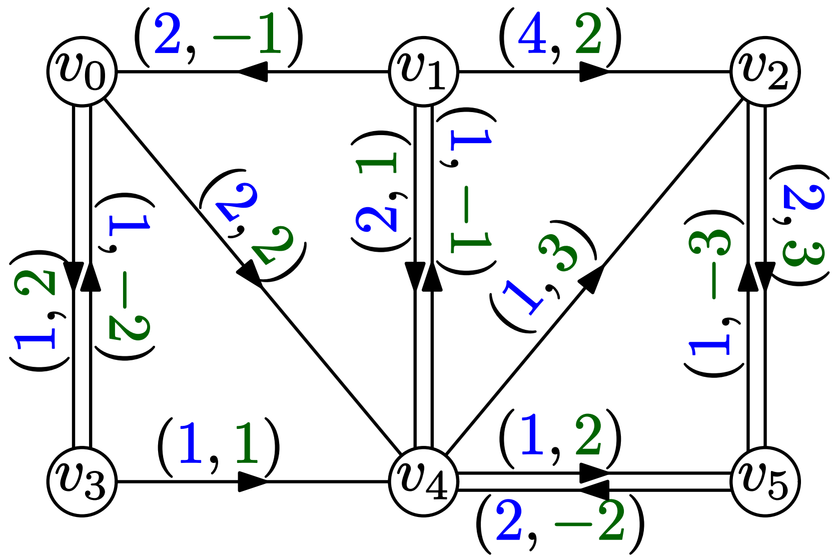
相補性条件：

- $(u_a - f_a)z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

本日の内容

1. 最小費用流問題：復習
2. 最小費用流問題：線形計画問題として
3. 補助ネットワーク
4. **簡約費用最適性条件**





ここからの目標：再掲

目標

最適性条件を ネットワークのことばで 述べたい

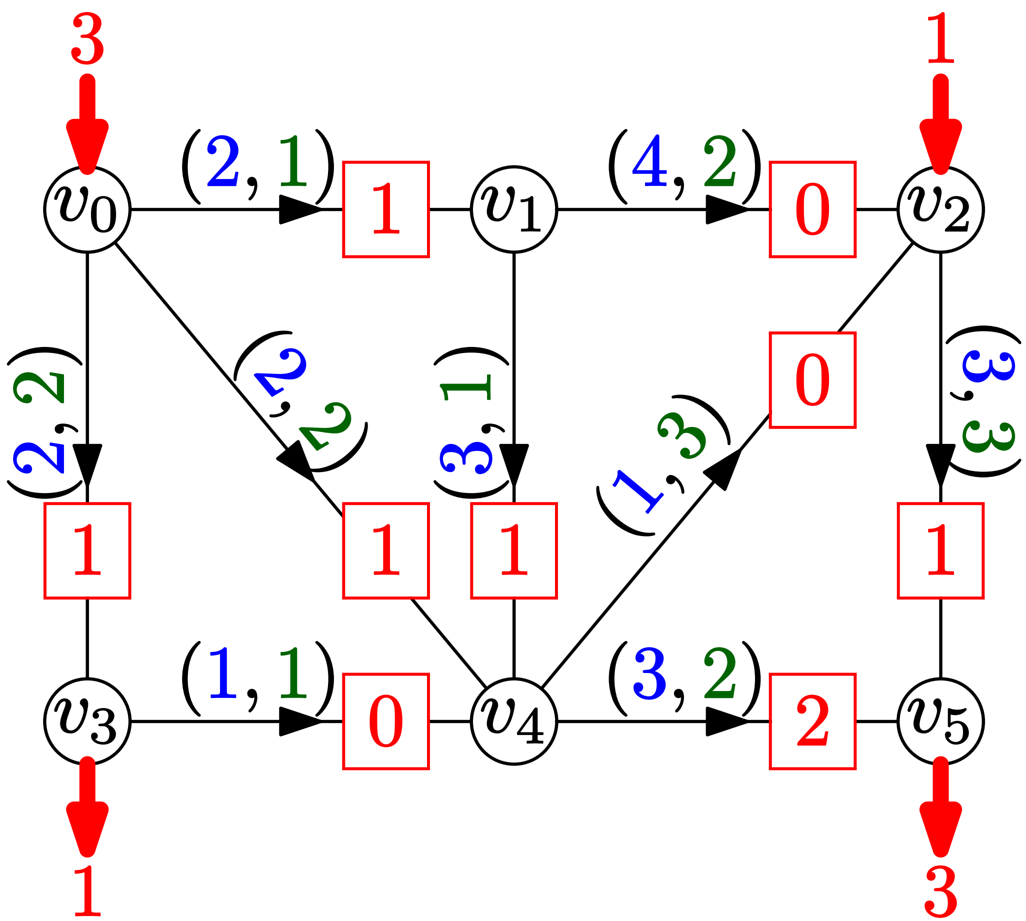
<u>相補性定理</u>：f が主問題の最適解，y, z が双対問題の最適解

$\Leftrightarrow$

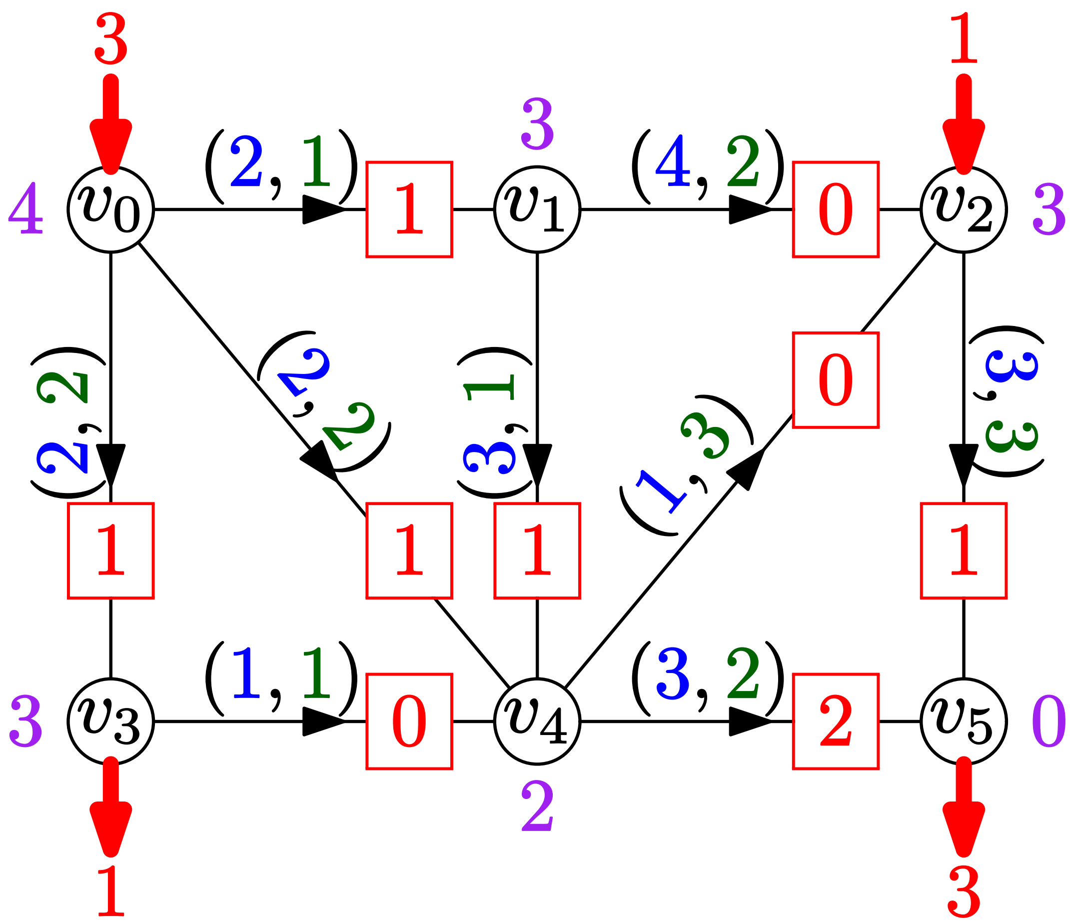
- f が主問題の許容解
- y, z が双対問題の許容解
- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall uv \in A$

最適性条件を
線形計画法のことばで
述べたもの

ポテンシャル：例



ポテンシャル：例

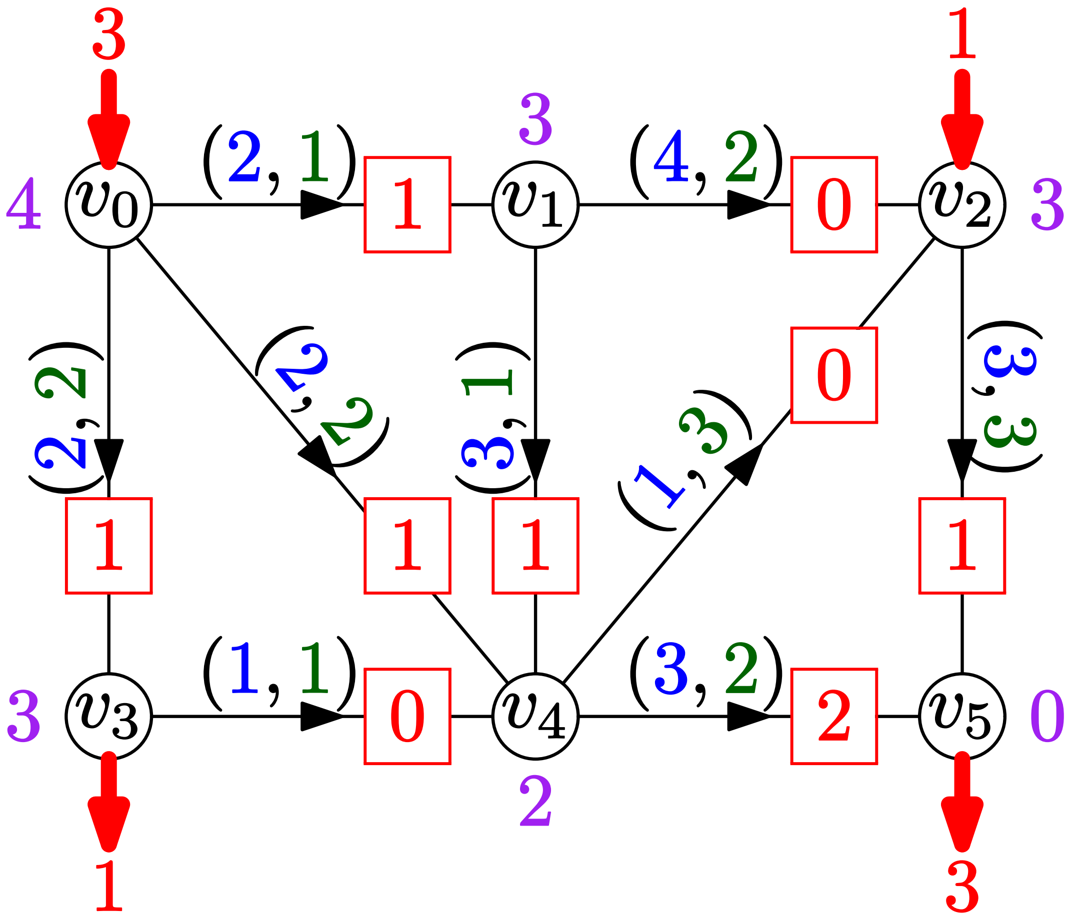


類推：	流	電流	主問題の変数
	費用	抵抗	
	ポテンシャル	電位	双対問題の変数

設定：有向グラフ $G = (V, A)$

定義：ポテンシャル (potential，頂点ポテンシャル)

G における **ポテンシャル** とは，関数 $p\colon V \to \mathbb{R}$ のこと



直感：

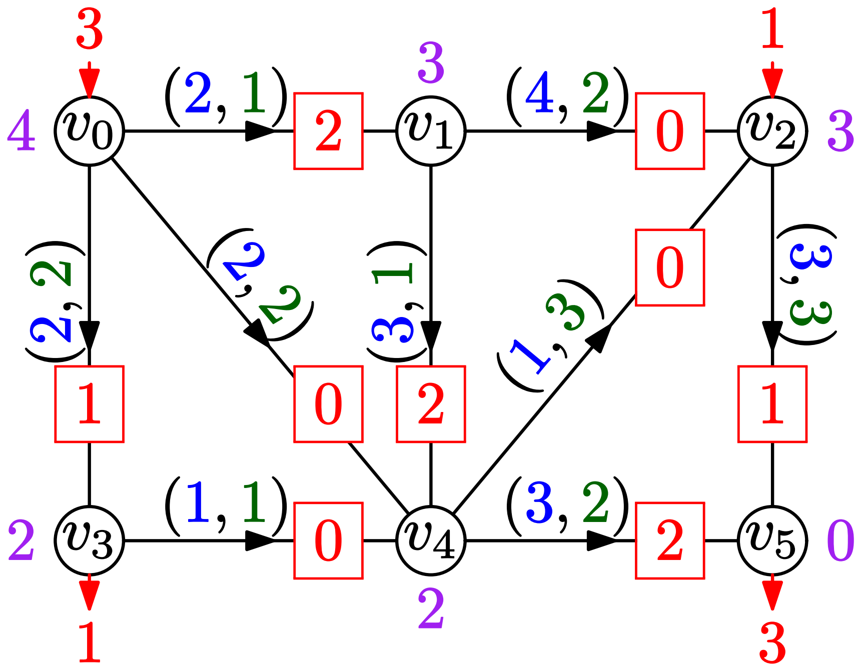
最小費用 b-流では

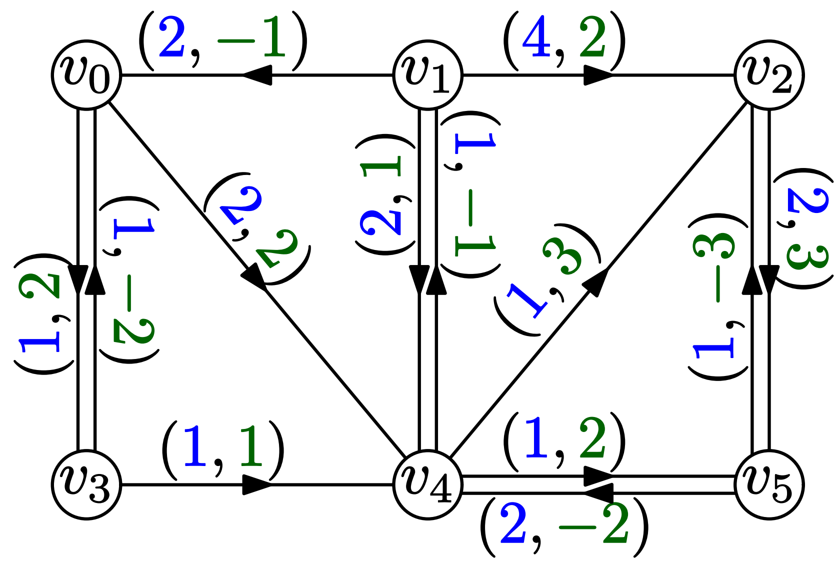
高ポテンシャルの頂点から

低ポテンシャルの頂点に

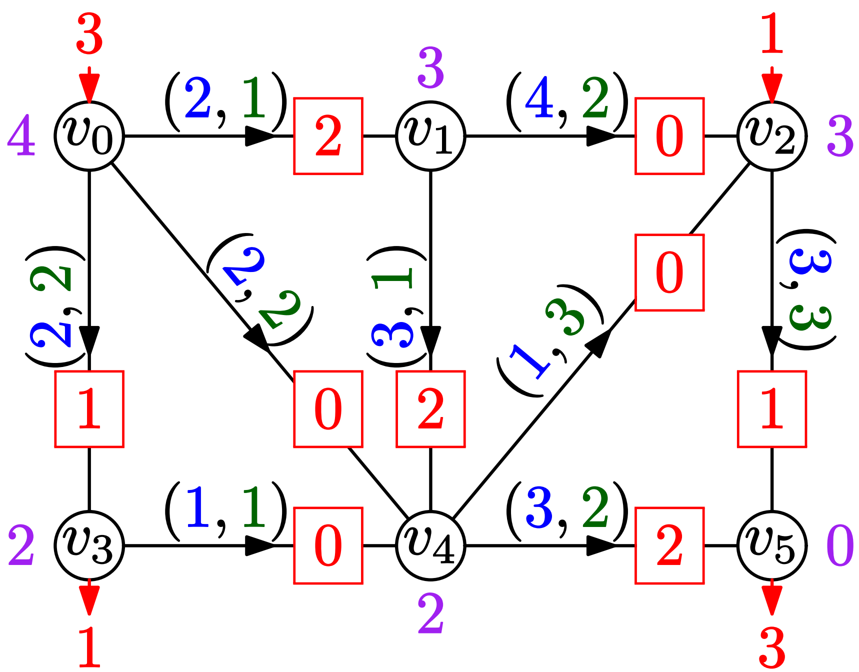
流れていてほしい

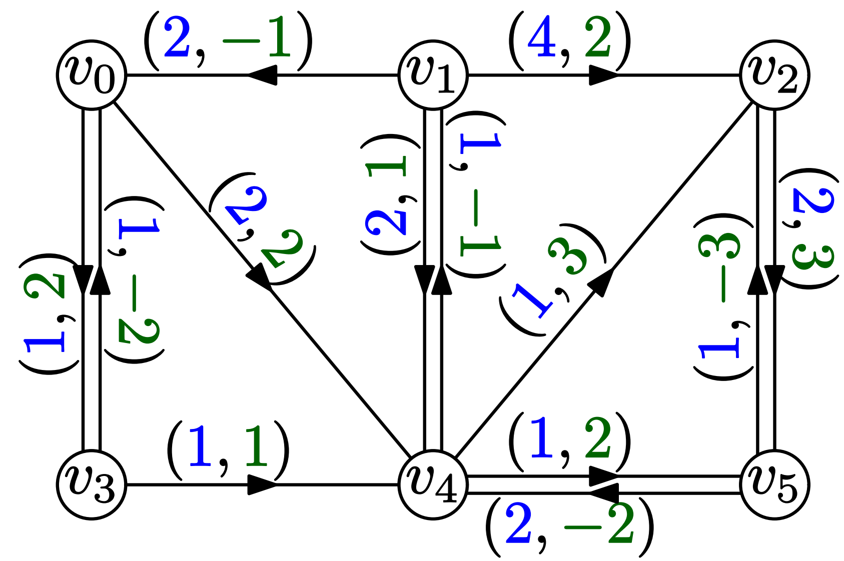
ポテンシャルと補助ネットワーク

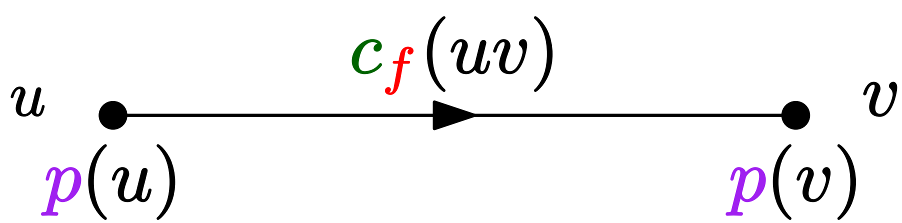


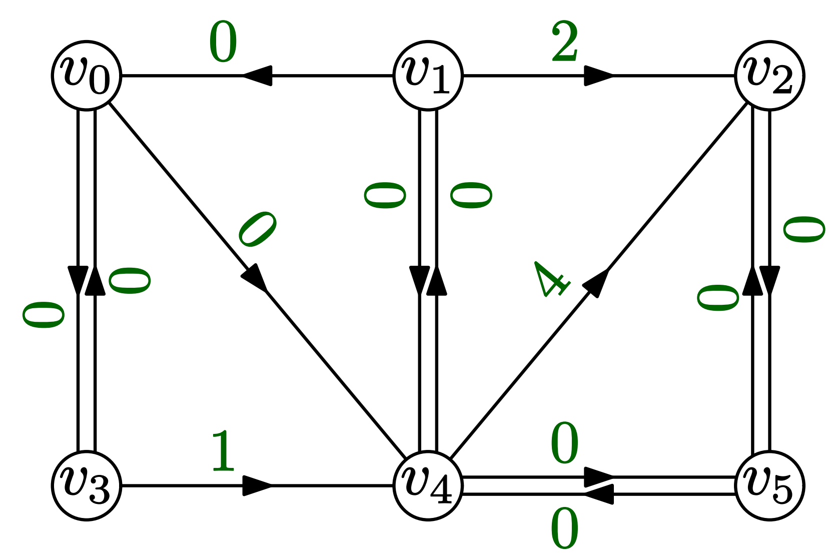


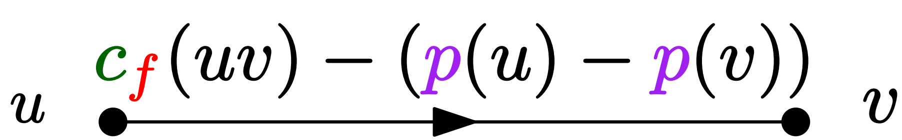
ポテンシャルと補助ネットワーク



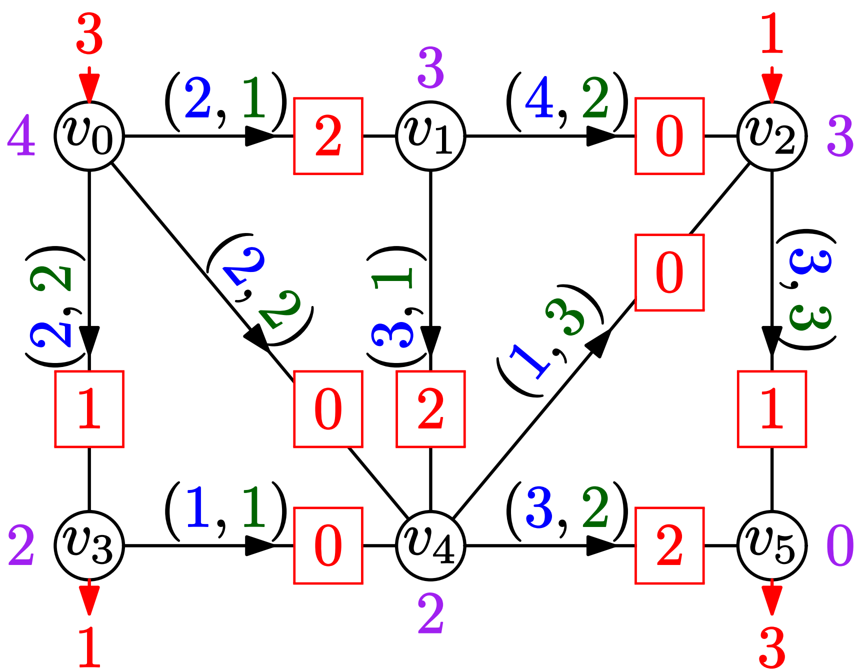


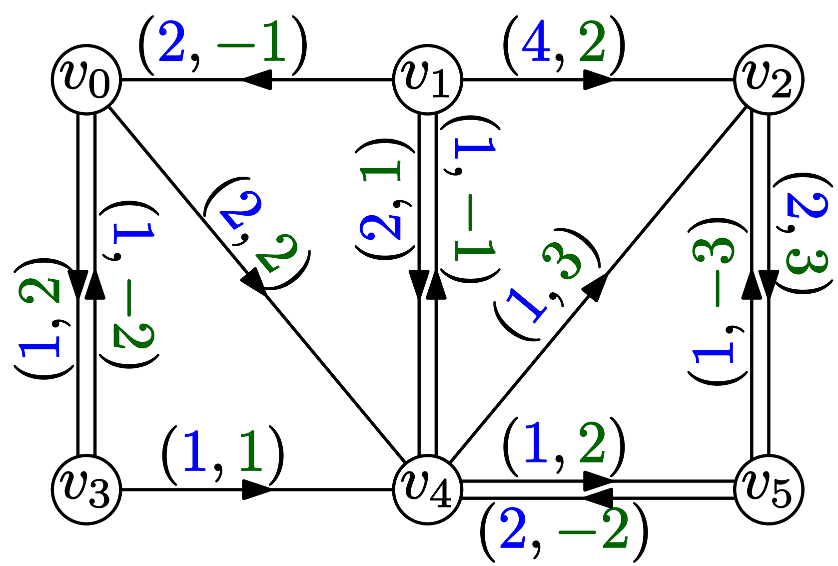


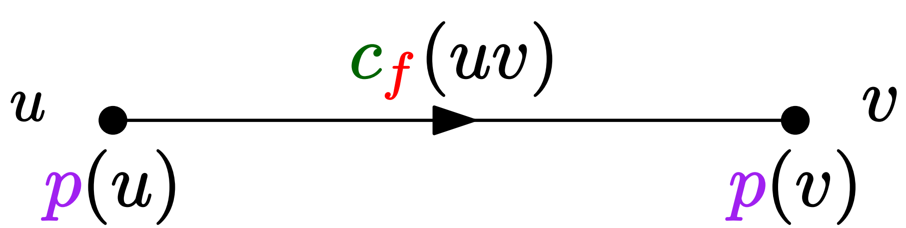


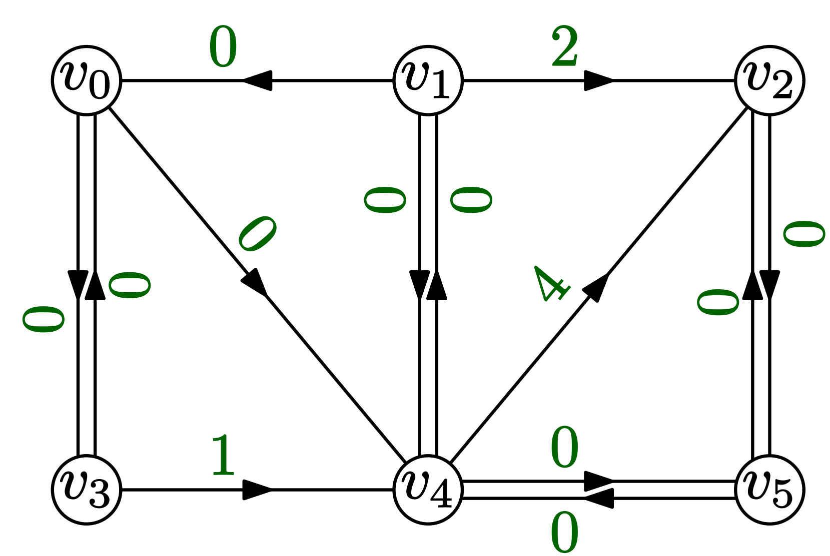


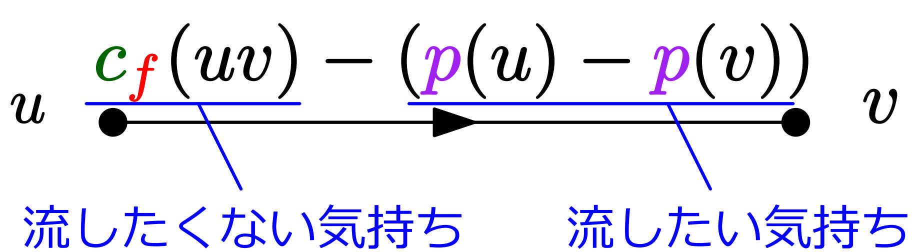
ポテンシャルと補助ネットワーク











簡約費用最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$，$b \colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：簡約費用最適性条件 (Ford, Fulkerson ’62)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p \colon V \to \mathbb{R}$ が存在
- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して，$c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

証明：相補性定理を用いる

簡約費用最適性条件：証明 (1/5)

$\Rightarrow$ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

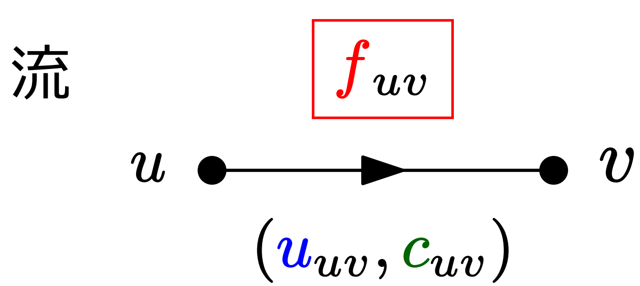
- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする

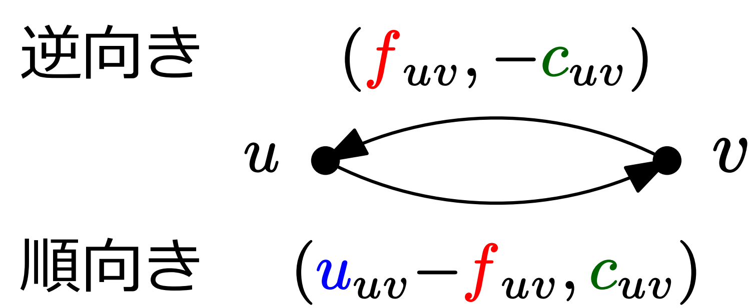
確認事項：$\forall\, uv \in A_f : (c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0$

簡約費用最適性条件：証明 (1/5)

⇒ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする
- $uv \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$u_{uv} - f_{uv} > 0$
- 相補性定理より，$z_{uv} = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = c_{uv} - y_u + y_v \geq -z_{uv} = 0$





簡約費用最適性条件：証明 (1/5)

$\Rightarrow$ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする
- $uv \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$u_{uv} - f_{uv} > 0$
- 相補性定理より，$z_{uv} = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = c_{uv} - y_u + y_v \geq -z_{uv} = 0$

相補性条件：

- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (1/5)

⇒ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする
- $uv \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$u_{uv} - f_{uv} > 0$
- 相補性定理より，$z_{uv} = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = c_{uv} - y_u + y_v \geq -z_{uv} = 0$

s.t. $-z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv}$ $\forall\, uv \in A,$

$z_a \geq 0$ $\forall\, a \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (2/5)

⇒ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする

- $uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$vu \in A$ で $f_{vu} > 0$
- 相補性定理より，$c_{vu} + z_{vu} - y_v + y_u = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = -c_{vu} - y_u + y_v = z_{vu} \geq 0$

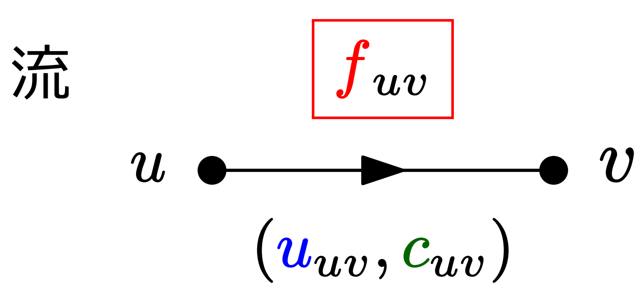
確認事項：$\forall\, uv \in A_f : (c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0$

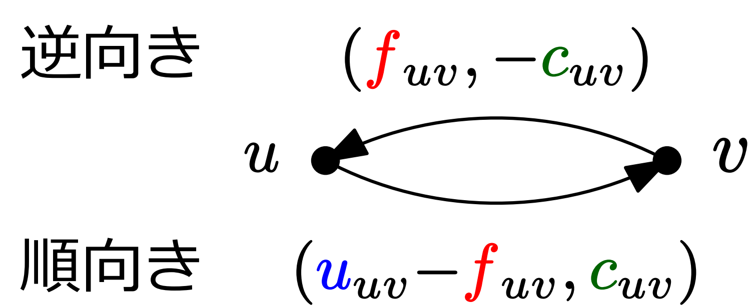
簡約費用最適性条件：証明 (2/5)

<u>$\Rightarrow$ の証明</u>：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする

- $uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$vu \in A$ で $f_{vu} > 0$
- 相補性定理より，$c_{vu} + z_{vu} - y_v + y_u = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = -c_{vu} - y_u + y_v = z_{vu} \geq 0$





簡約費用最適性条件：証明 (2/5)

⇒ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする

- $uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$vu \in A$ で $f_{vu} > 0$
- 相補性定理より，$c_{vu} + z_{vu} - y_v + y_u = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = -c_{vu} - y_u + y_v = z_{vu} \geq 0$

相補性条件：

- $(u_a - f_a)z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (2/5)

⇒ の証明：f が最小費用 b-流であると仮定

- 強双対定理より，双対問題の最適解 y, z が存在
- $\boxed{p = y \text{ とする}}$
- $uv \in A_f$ とする

- $uv \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$vu \in A$ で $f_{vu} > 0$
- 相補性定理より，$c_{vu} + z_{vu} - y_v + y_u = 0$
- $\therefore (c_f)_{uv} - p_u + p_v = -c_{vu} - y_u + y_v = z_{vu} \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & -z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv} \quad && \forall\, uv \in A, \\
& z_a \geq 0 && \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

簡約費用最適性条件：証明 (3/5)

$\Leftarrow$ の証明：

$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \ (\forall\, uv \in A_f)$ を満たす p の存在を仮定

- 次のように y, z を定義
  - $y_v = p_v \ (\forall\, v \in V)$
  - $z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\} \ (\forall\, uv \in A)$
- この y, z は双対問題の許容解 (要確認)
- 相補性定理より，f と y, z が相補性条件を満たせば，f は最小費用 b-流である

s.t. $-z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv}$ $\forall\, uv \in A,$

$z_a \geq 0$ $\forall\, a \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (3/5)

$\Leftarrow$ の証明：

$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0$ ($\forall\, uv \in A_f$) を満たす p の存在を仮定

- 次のように y, z を定義
  - $y_v = p_v$ ($\forall\, v \in V$)
  - $z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\}$ ($\forall\, uv \in A$)
- この y, z は双対問題の許容解 (要確認)
- 相補性定理より， f と y, z が相補性条件を満たせば，f は最小費用 b-流である

$z_{uv} \geq -c_{uv} + y_u - y_v$

s.t.	$-z_{uv} + y_u - y_v \leq c_{uv}$	
		$\forall\, uv \in A,$
	$z_a \geq 0$	$\forall\, a \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (4/5)

$\Leftarrow$ の証明：

$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0\ (\forall\, uv \in A_f)$ を満たす p の存在を仮定

- 次のように y, z を定義
  - $y_v = p_v\ (\forall\, v \in V)$
  - $z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\}\ (\forall\, uv \in A)$

- $u_{uv} - f_{uv} > 0$ のとき，$uv \in A_f^{\mathrm{F}}$
  - $-c_{uv} + p_u - p_v = -((c_f)_{uv} - p_u + p_v) \leq 0$ なので
    $z_{uv} = 0$

確認事項 (相補性条件)：

- $(u_a - f_a)z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (4/5)

$\Leftarrow$ の証明：

$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \ (\forall\, uv \in A_f)$ を満たす p の存在を仮定

- 次のように y, z を定義
  - $y_v = p_v \ (\forall\, v \in V)$
  - $z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\} \ (\forall\, uv \in A)$

- $u_{uv} - f_{uv} > 0$ のとき，$uv \in A_f^{\mathrm{F}}$
  - $-c_{uv} + p_u - p_v = -((c_f)_{uv} - p_u + p_v) \leq 0$ なので $z_{uv} = 0$

確認事項 (相補性条件)：

- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

簡約費用最適性条件：証明 (5/5)

$\Leftarrow$ の証明：

$(c_f)_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \ (\forall\, uv \in A_f)$ を満たす p の存在を仮定

- 次のように y, z を定義
  - $y_v = p_v \ (\forall\, v \in V)$
  - $z_{uv} = \max\{0, -c_{uv} + p_u - p_v\} \ (\forall\, uv \in A)$

- $f_{uv} > 0$ のとき，$vu \in A_f^{\mathrm{B}}$
  - $0 \leq (c_f)_{vu} - p_v + p_u = -c_{uv} - p_v + p_u$ なので，
    $z_{uv} = -c_{uv} + p_u - p_v = -c_{uv} + y_u - y_v$
    $\therefore c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v = 0$ □

確認事項 (相補性条件)：

- $(u_a - f_a) z_a = 0 \quad \forall\, a \in A$
- $f_{uv}(c_{uv} + z_{uv} - y_u + y_v) = 0 \quad \forall\, uv \in A$

注意：簡約費用最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，
弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$，$b \colon V \to \mathbb{R}$，$b$-流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：簡約費用最適性条件 (Ford, Fulkerson '62)

f が (G, u, c) における最小費用 b-流 $\Leftrightarrow$
次を満たすポテンシャル $p \colon V \to \mathbb{R}$ が存在

- 任意の弧 $uv \in A_f$ に対して，$c_f(uv) - p(u) + p(v) \geq 0$

注意：

- $c_f(uv) - p(u) + p(v)$ を uv の 簡約費用 (reduced cost) と呼ぶことがある
- $c_f(uv) + p(u) - p(v)$ を考える場合もある (本質は変わらない)

まとめと予告

最小費用流問題

最適性条件 → アルゴリズム

- **簡約費用最適性条件**
- 負閉路最適性条件
- 正カット最適性条件

- 次々々回
- 次回
- 次々回

次回の内容

- 最適性条件：負閉路最適性条件
- アルゴリズム：負閉路消去法