離散最適化基礎論

第 5 回

最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 11 月 7 日

最終更新：2023 年 11 月 8 日　14:02

スケジュール (前半)

1.	最大流と最小費用流：定義	(10/3)
2.	最大流問題：増加道法	(10/10)
*	休み	(10/17)
3.	線形計画法の復習	(10/24)
4.	最大流問題：線形計画問題として	(10/31)
5.	最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム	(11/7)
6.	最大流問題：容量スケーリング法	(11/14)
7.	最大流問題：Push-Relabel 法 (概要)	(11/21)
8.	最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価)	(11/28)

スケジュール (後半)

∗	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
∗	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
∗	休み	(1/30)

本日の目標

最大流問題　増加道法　停止しないことがある

$\downarrow$ 工夫

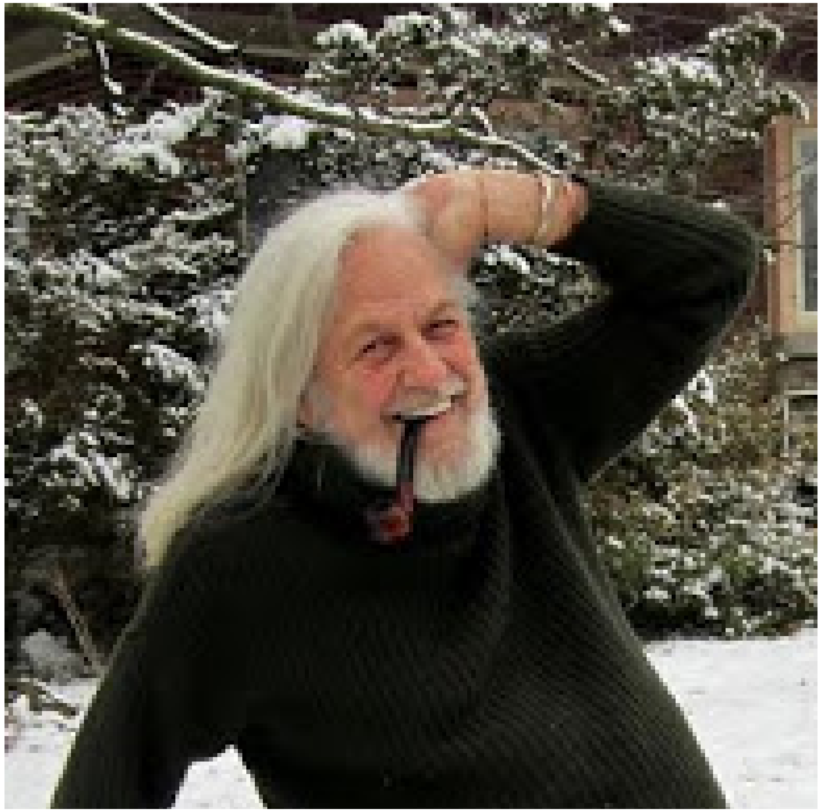
Edmonds-Karp のアルゴリズム

本日の目標

増加道法に工夫をして，必ず止まるようにする

- 増加道法を使って，最大流最小カット定理を証明する
- 工夫をしたアルゴリズムの計算量解析を行う

Edmonds と Karp



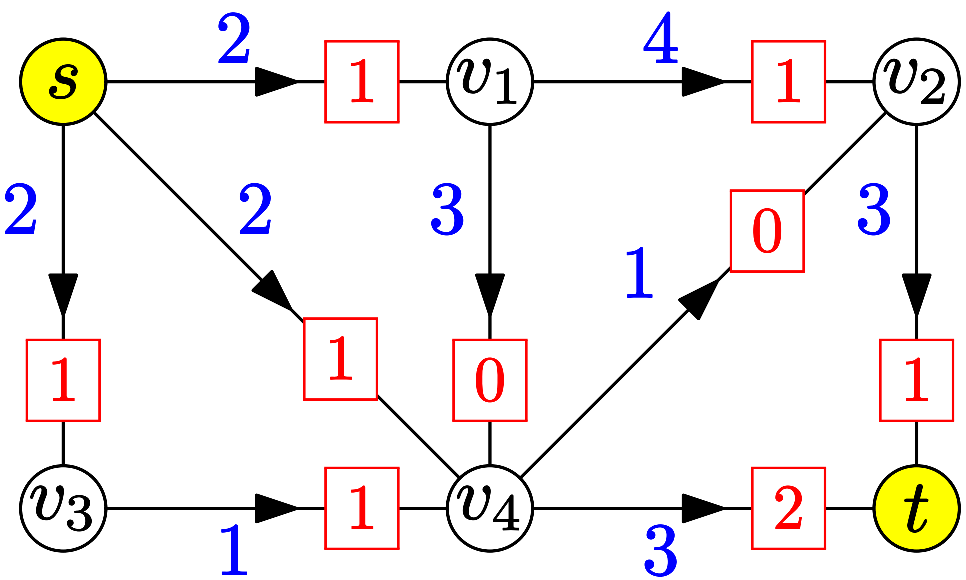
ジャック・エドモンズ
(1934–)

リチャード・カープ
(1935–)

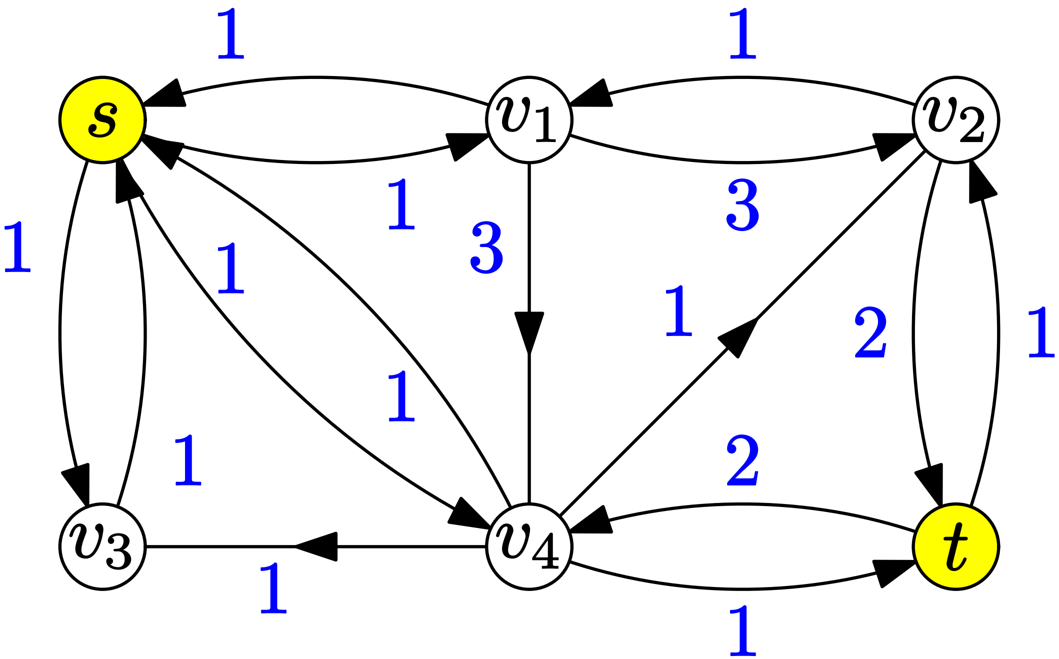
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jack.Edmonds.jpg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karp_mg_7725-b.cr2.jpg

[復習] 補助ネットワーク

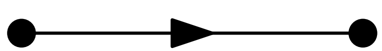


$(G, u), f$



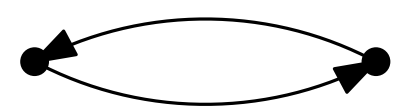
(G_f, u_f)

流 $\boxed{f(a)}$



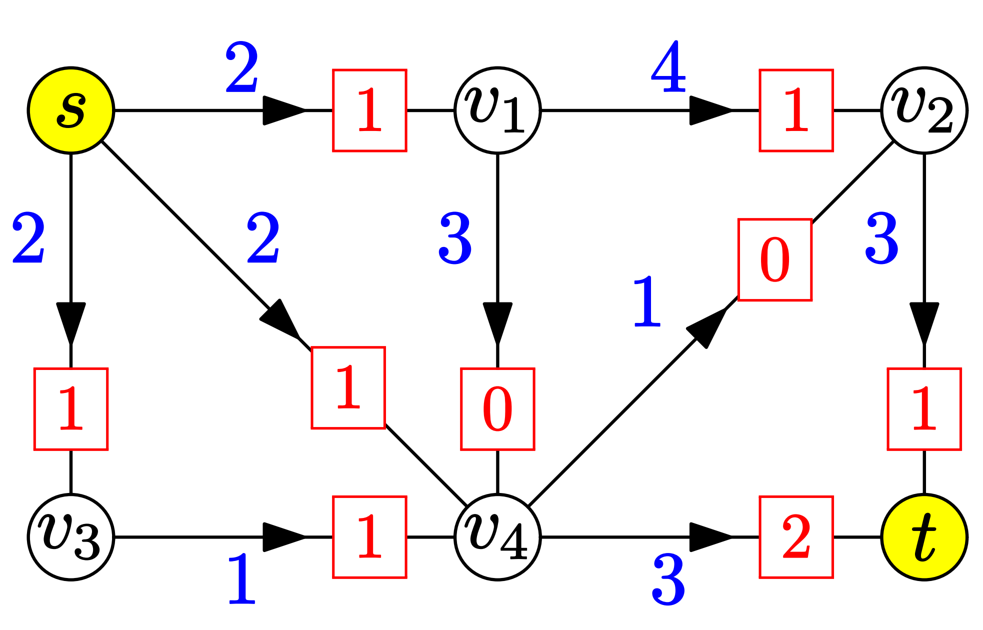
容量 $u(a)$

逆向き 容量 $f(a)$

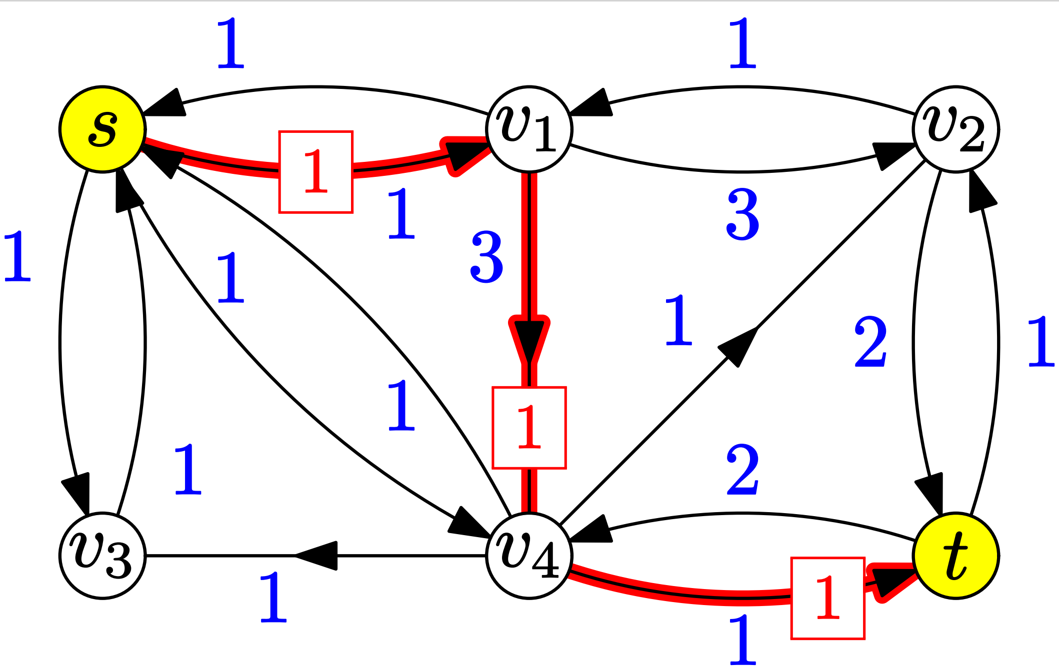


順向き 容量 $u(a) - f(a)$

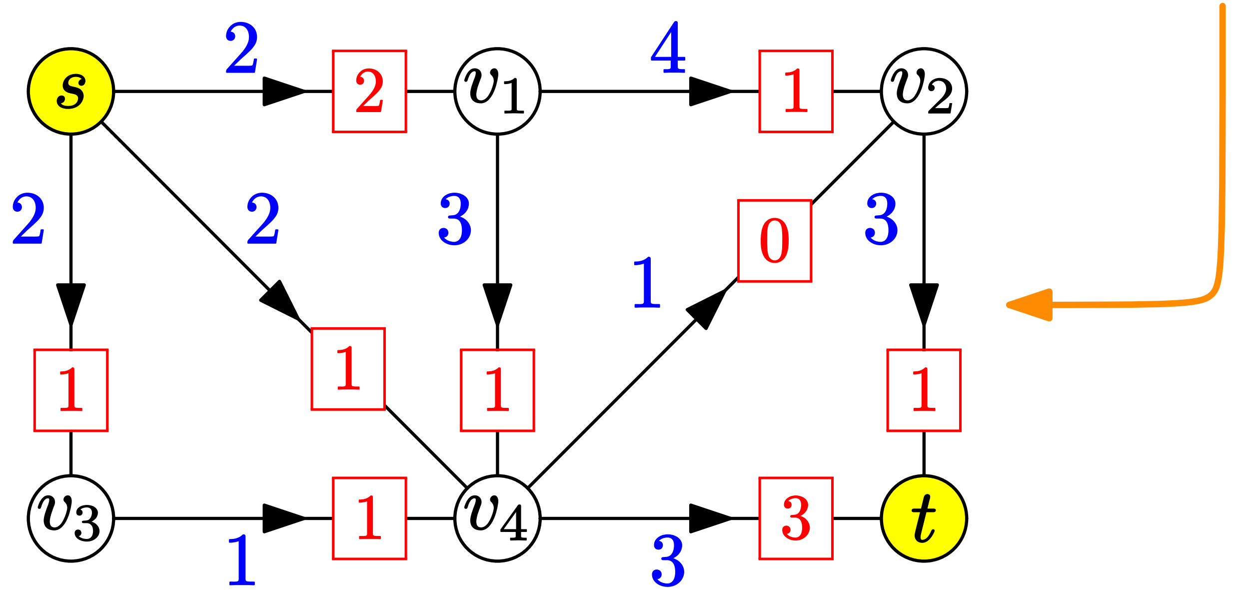
[復習] 増加道



$(G, u), f$



P (G_f, u_f)

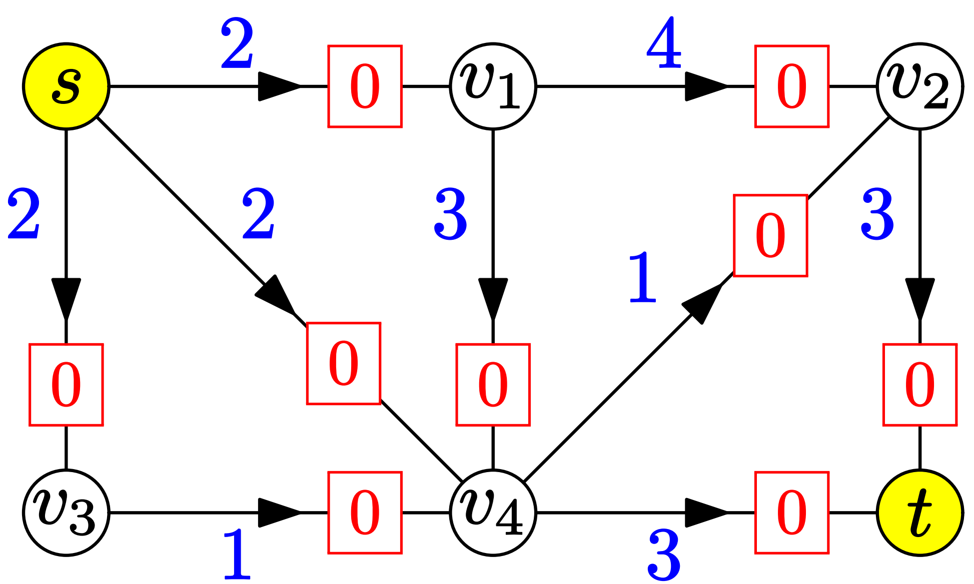


P に沿って f を増加

[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

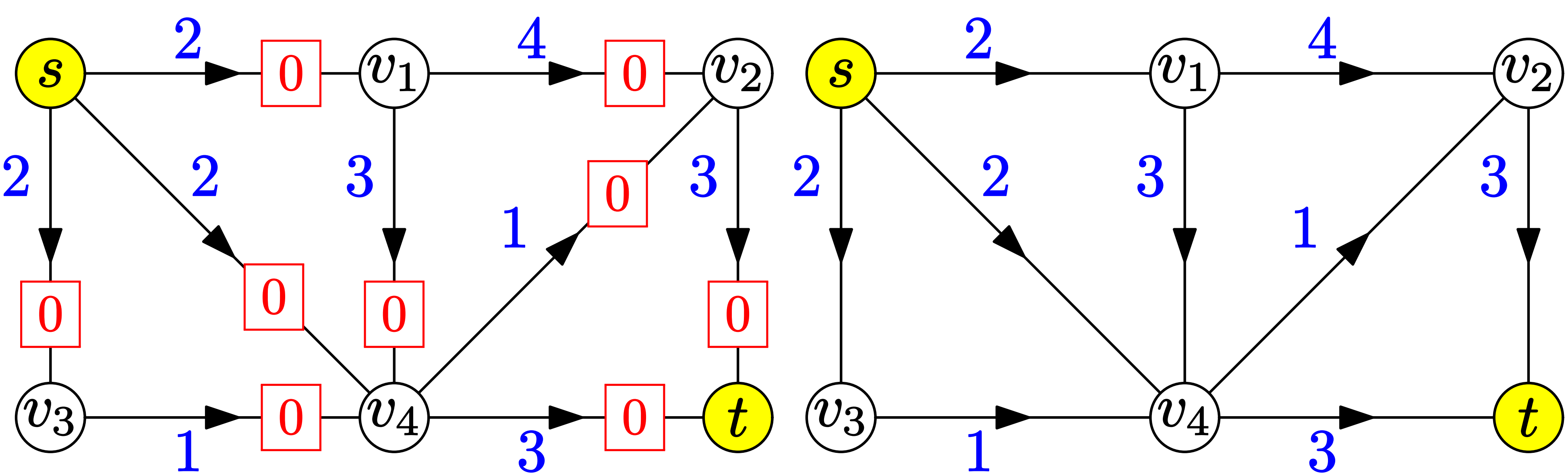
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

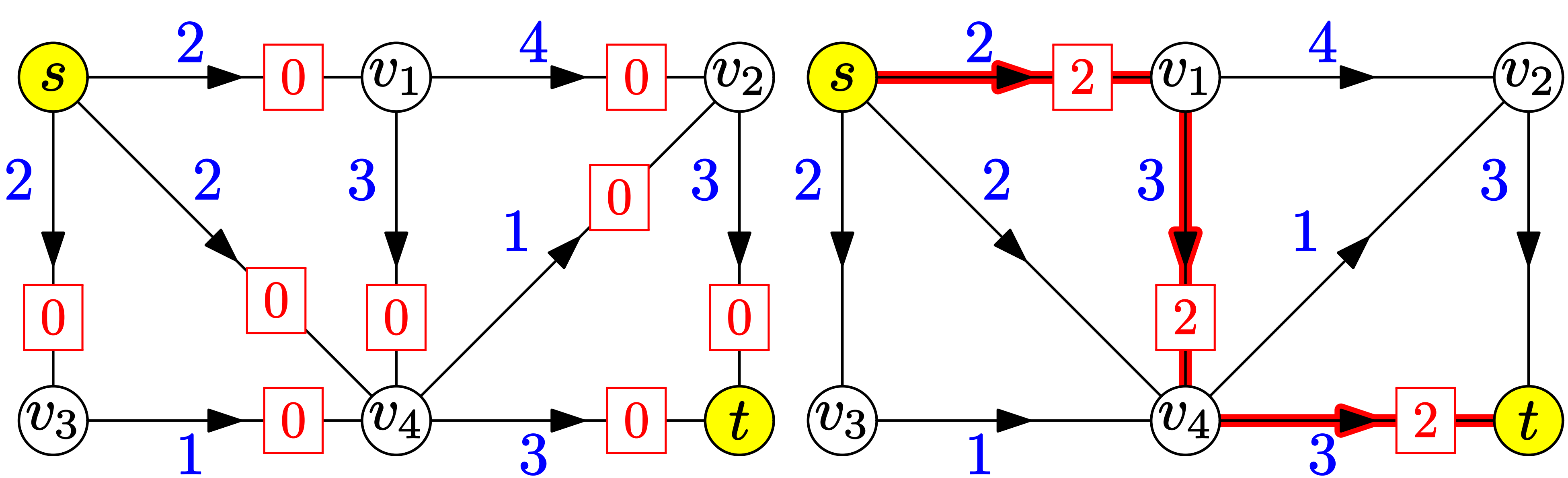
- 初期化：任意の s-t 流 f　　　　　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

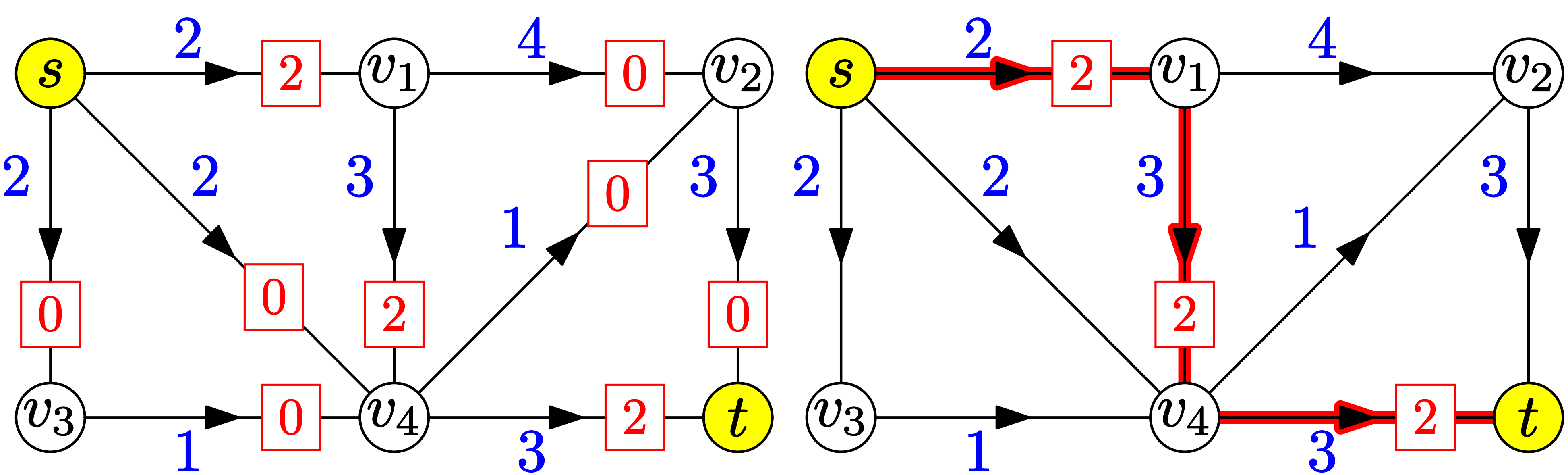
- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

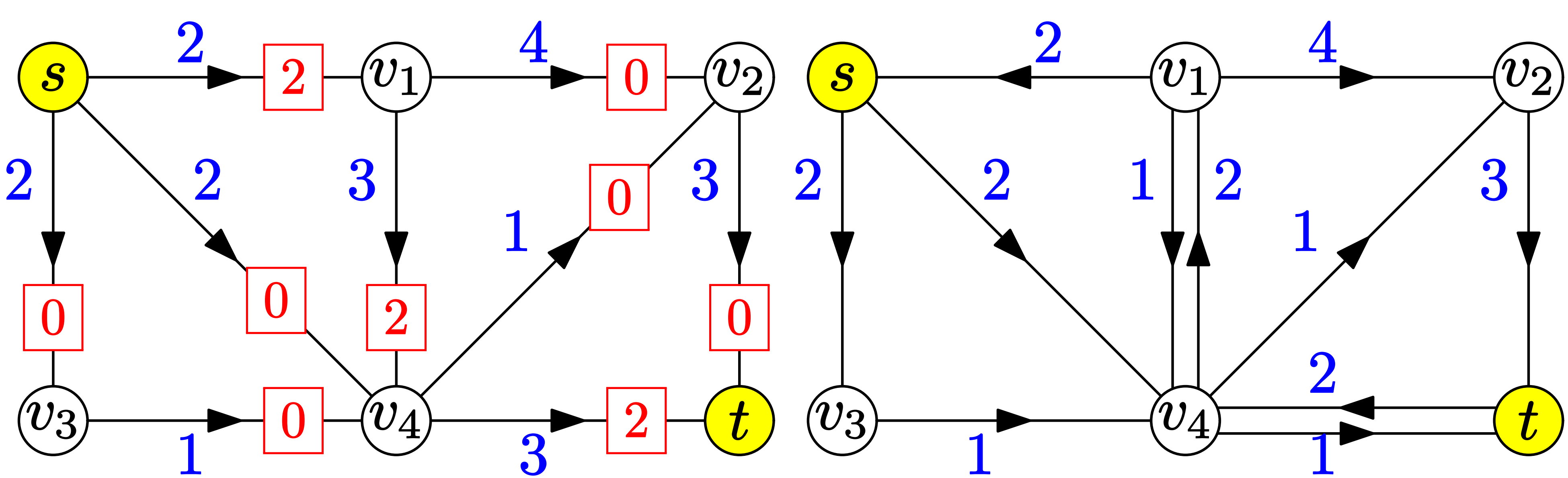
- 初期化：任意の s-t 流 f　　　　　　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

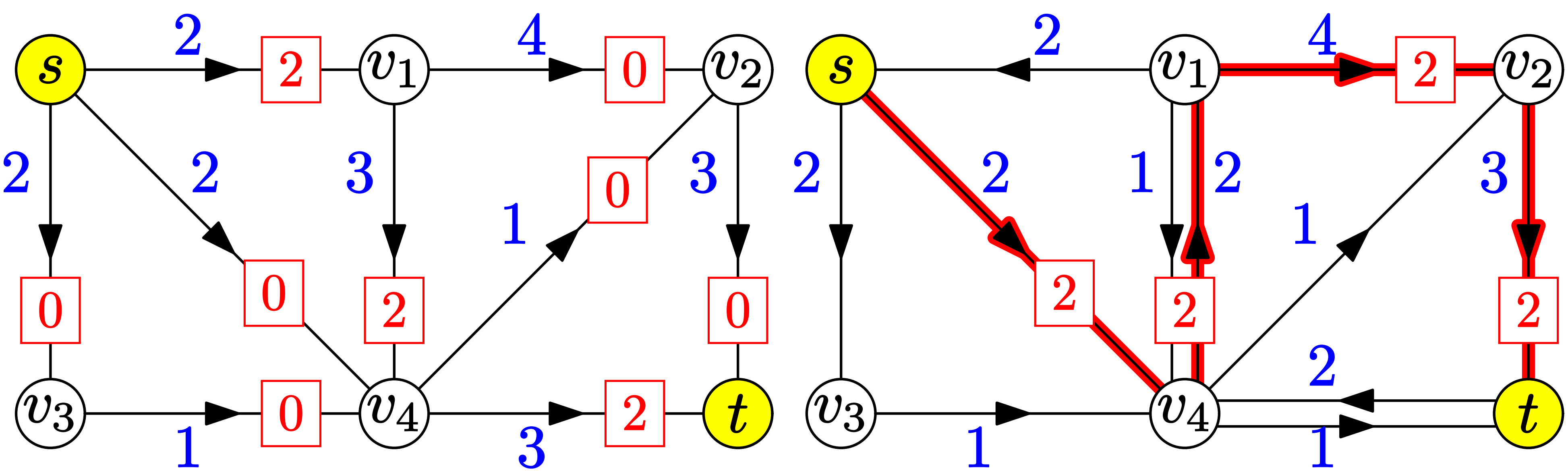
- 初期化：任意の s-t 流 f　　　　　　　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

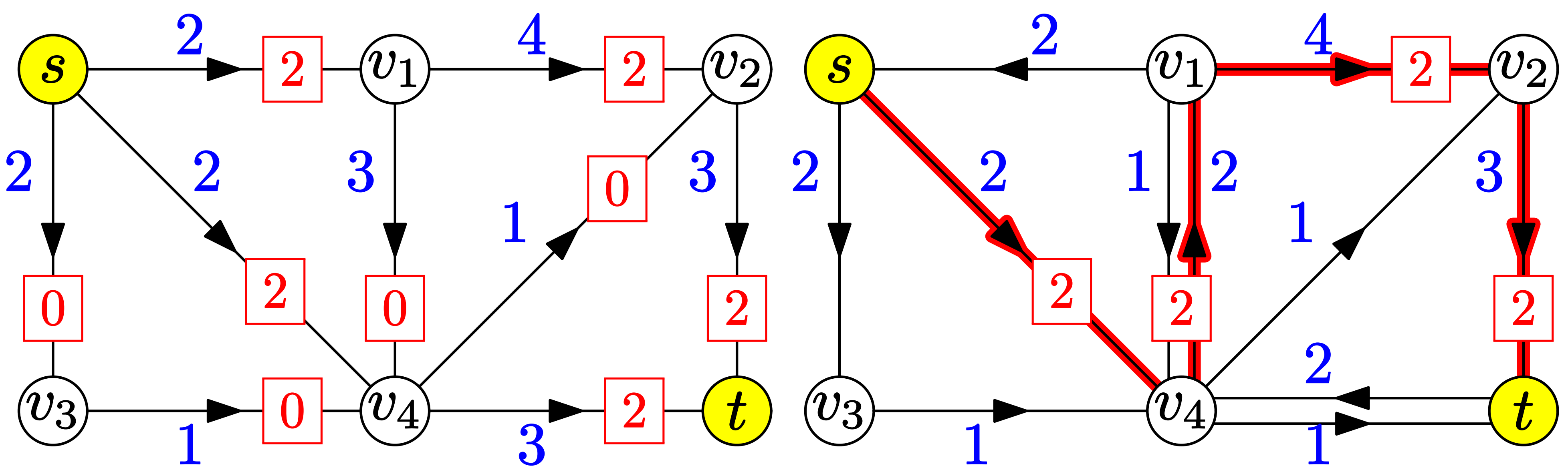
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

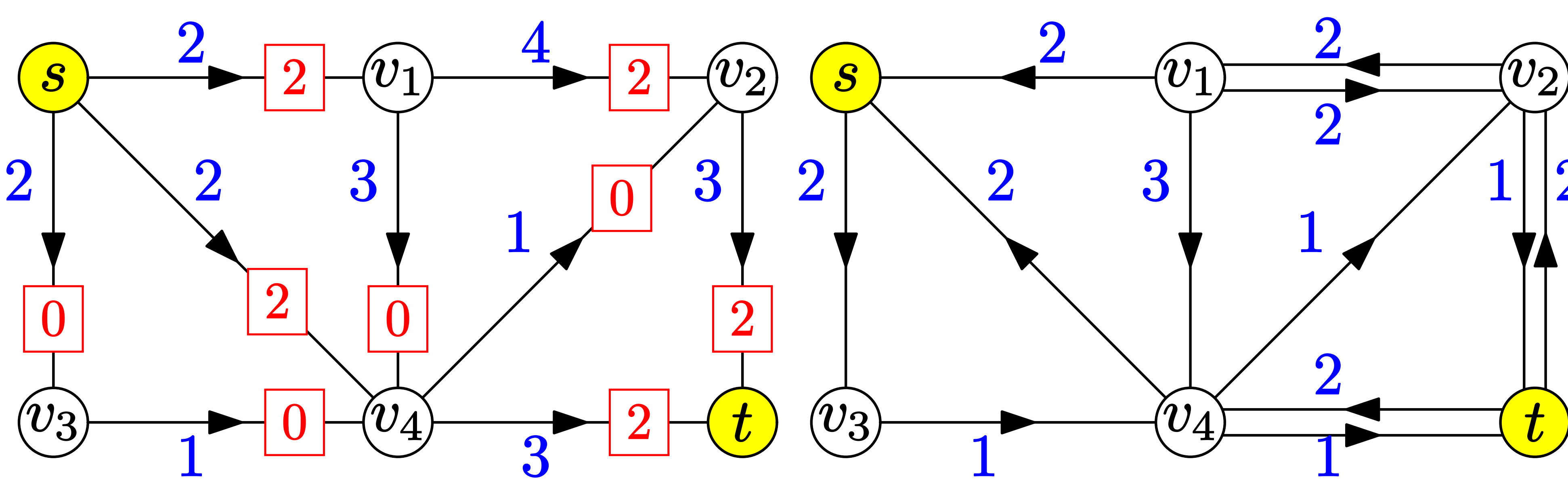
- 初期化：任意の s-t 流 f　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

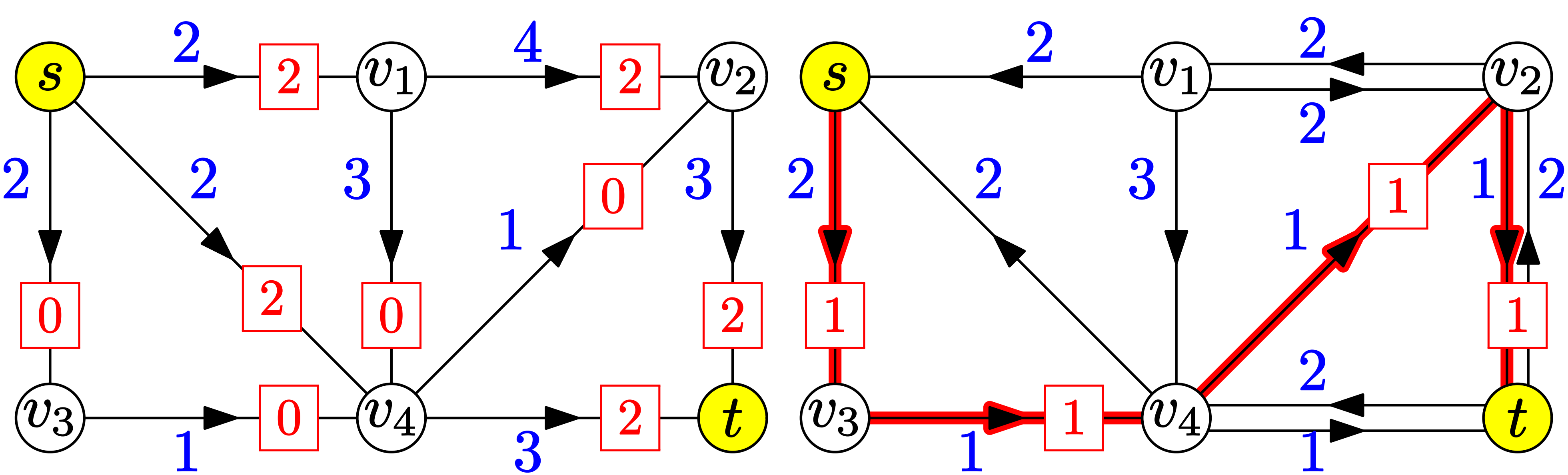
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

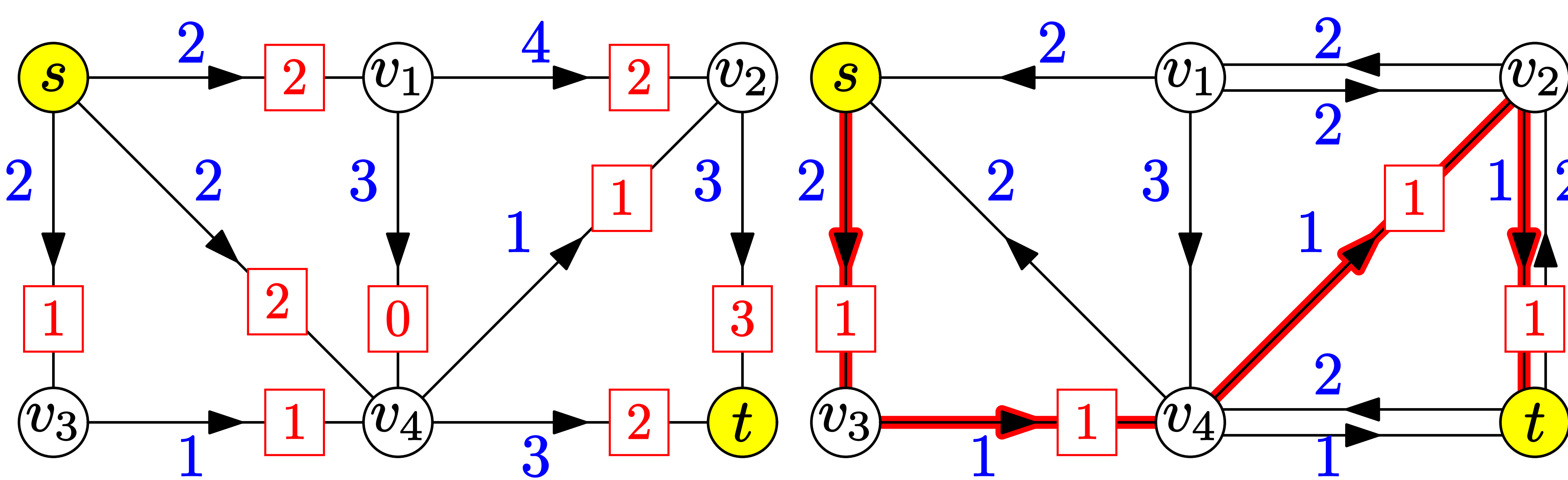
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f=0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

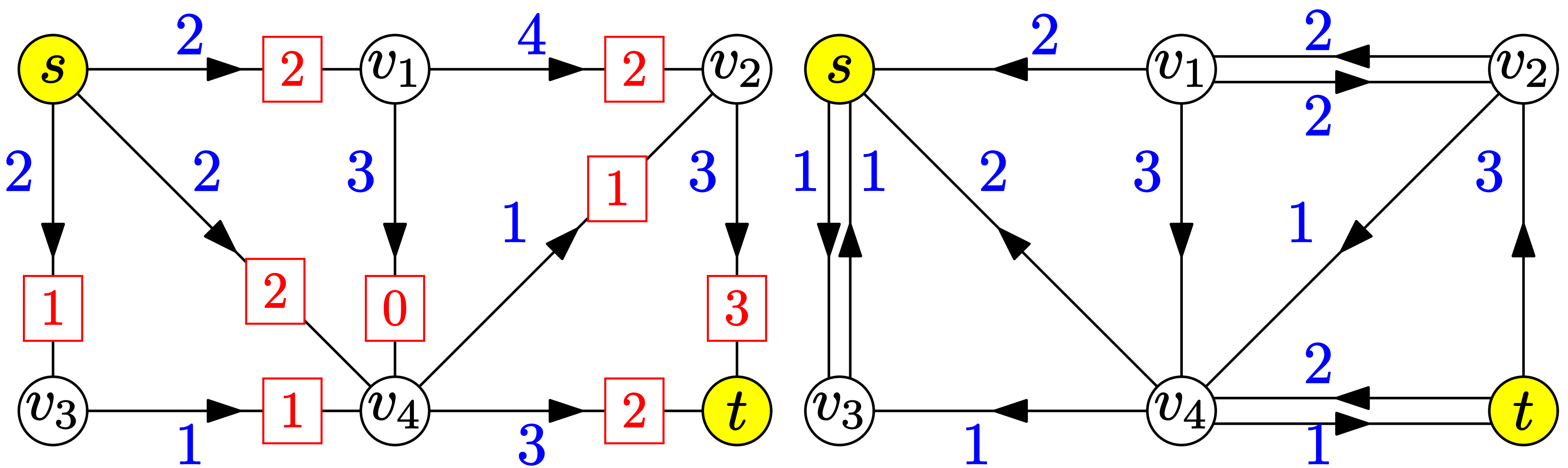
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



[復習] 増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f　　　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



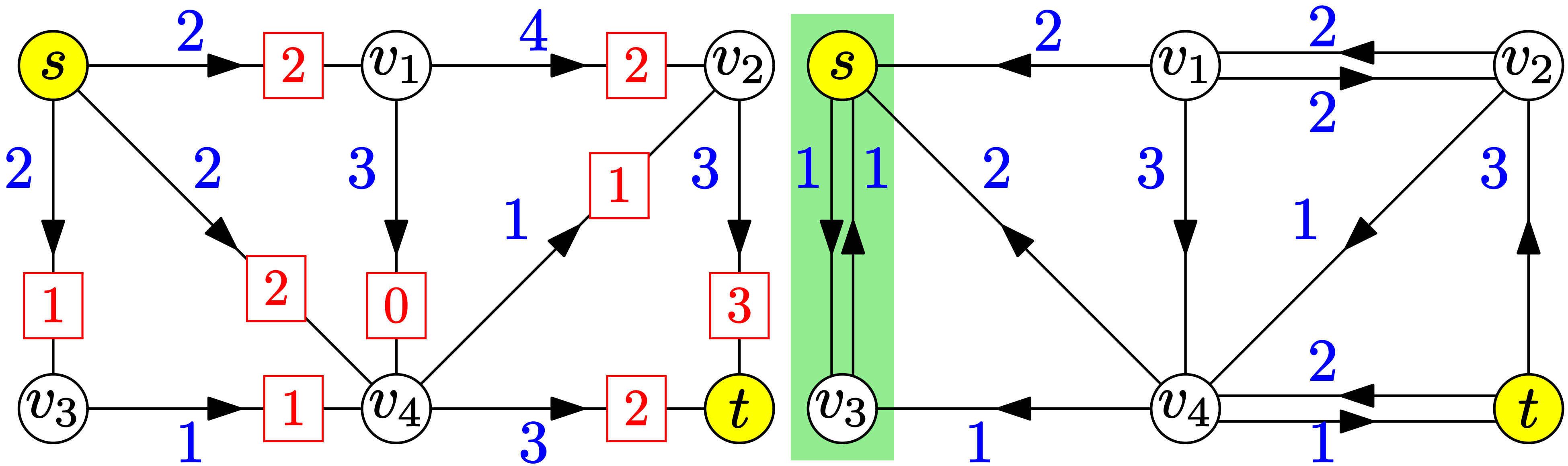
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：最大流問題の最適性条件

f が最大 s-t 流 $\Leftrightarrow$ f に対する増加道が存在しない

特に，最大 s-t 流 f と最小容量の s-t カット S に対して

$$\mathsf{val}(f) = \mathsf{cap}(S)$$



[復習] 最適性条件と増加道法

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：最大流問題の最適性条件

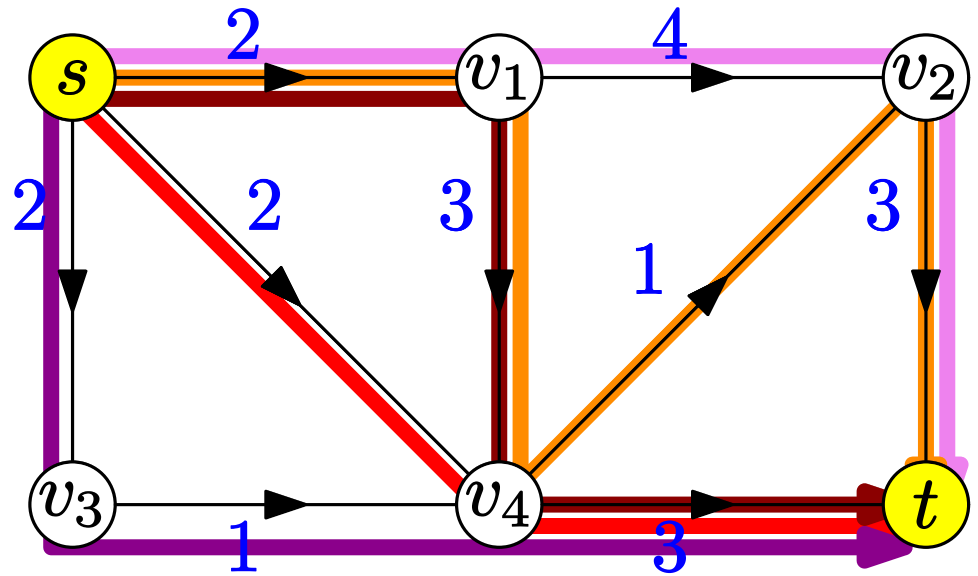
f が最大 s-t 流 $\Leftrightarrow$ f に対する増加道が存在しない

性質：増加道法と最大 s-t 流

増加道法が停止する $\Rightarrow$
出力 f は (G, u) に対する最大 s-t 流

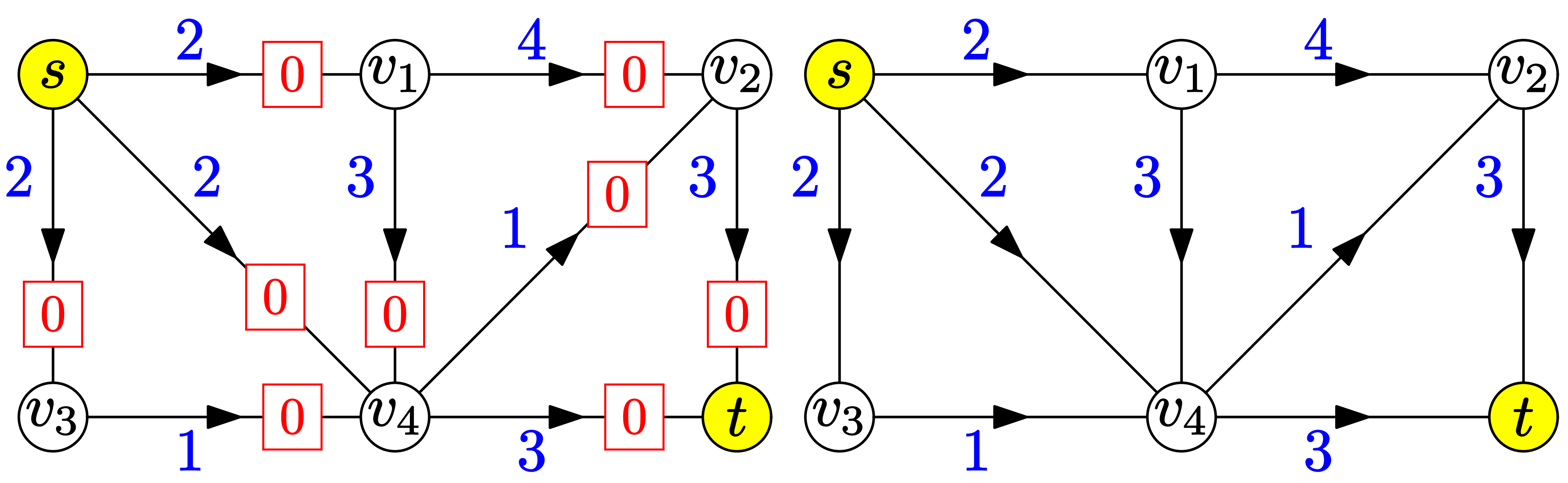
$\boxed{\text{注}}$：増加道法は停止しないかもしれない $\leadsto$ 工夫が必要

1. **Edmonds-Karp のアルゴリズム：概要**
2. Edmonds-Karp のアルゴリズム：停止性
3. Edmonds-Karp のアルゴリズム：計算量



Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

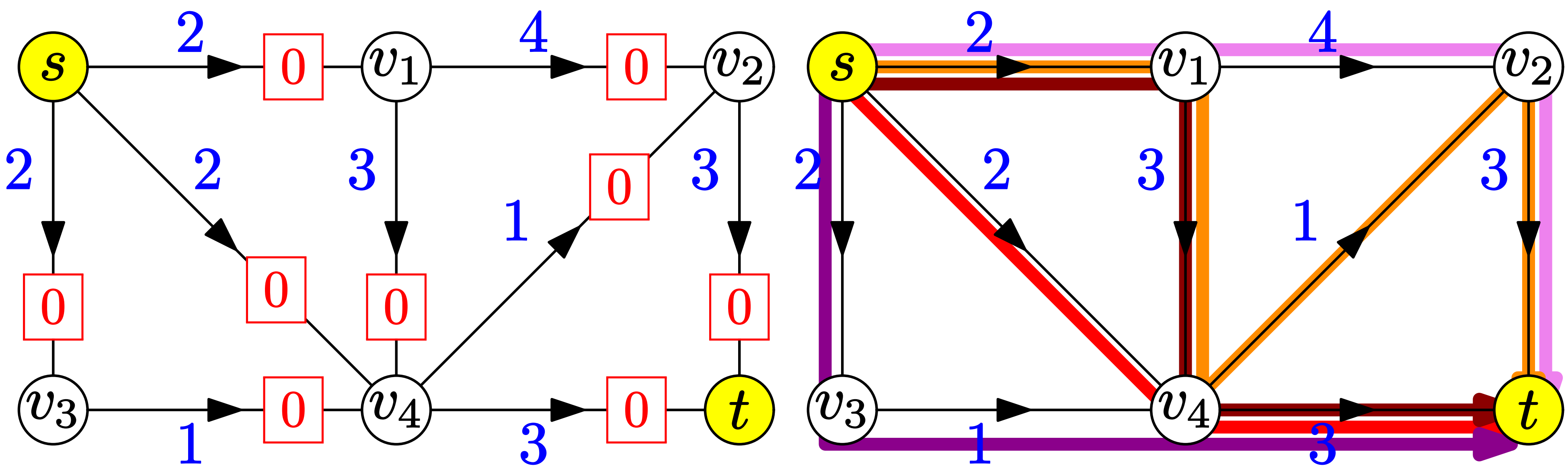
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム：例

Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

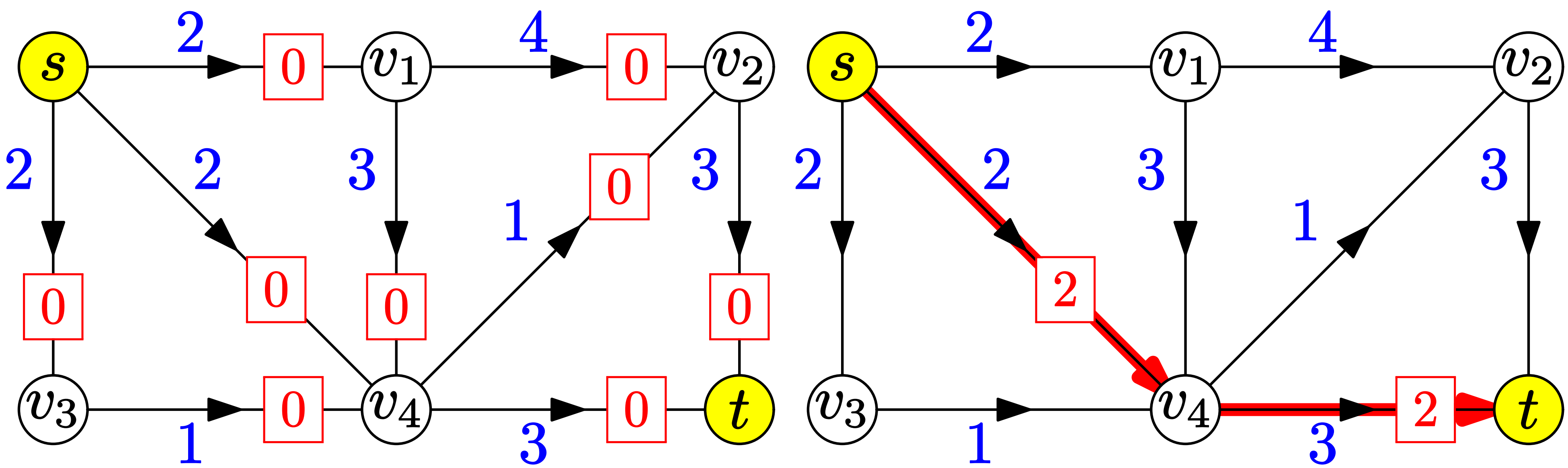
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム：例

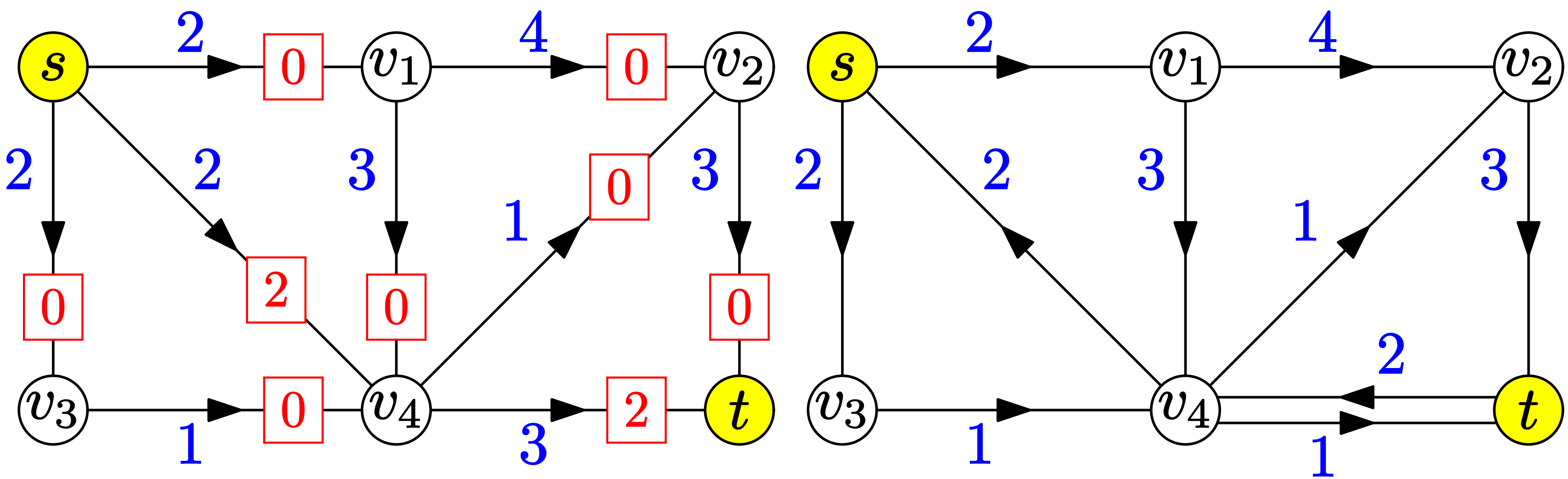
Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

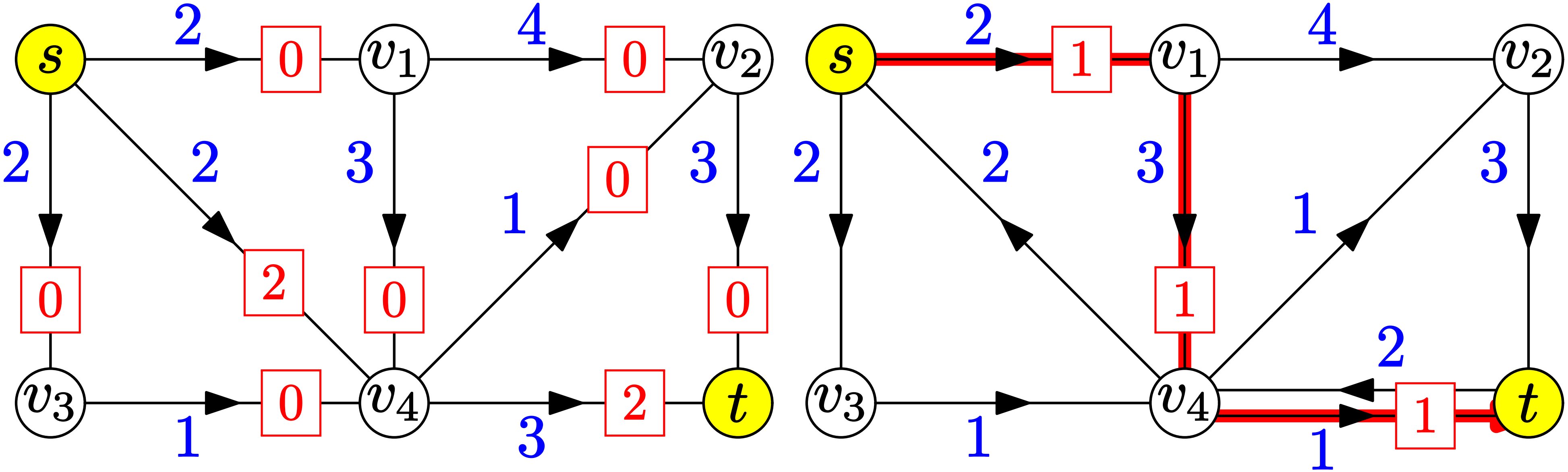
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム：例

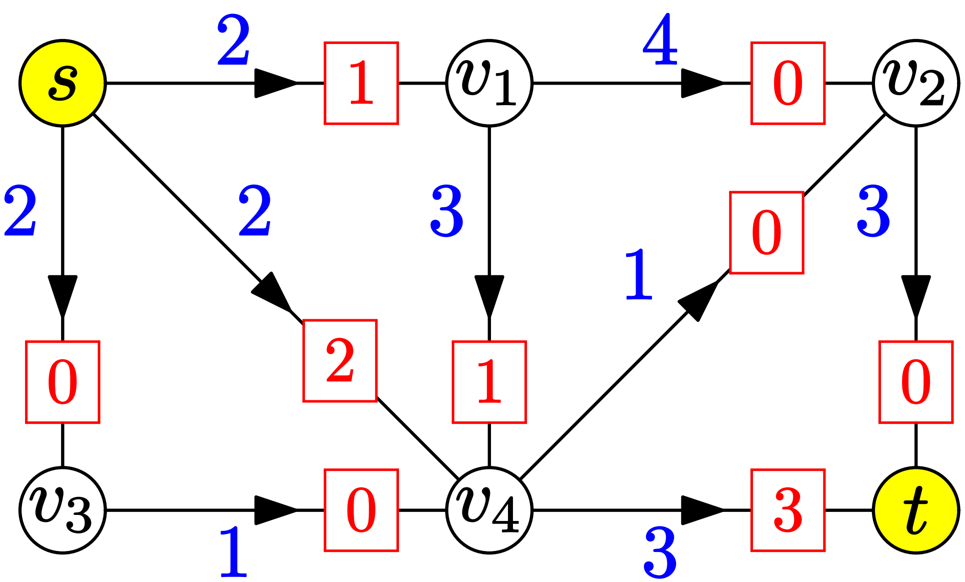
Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

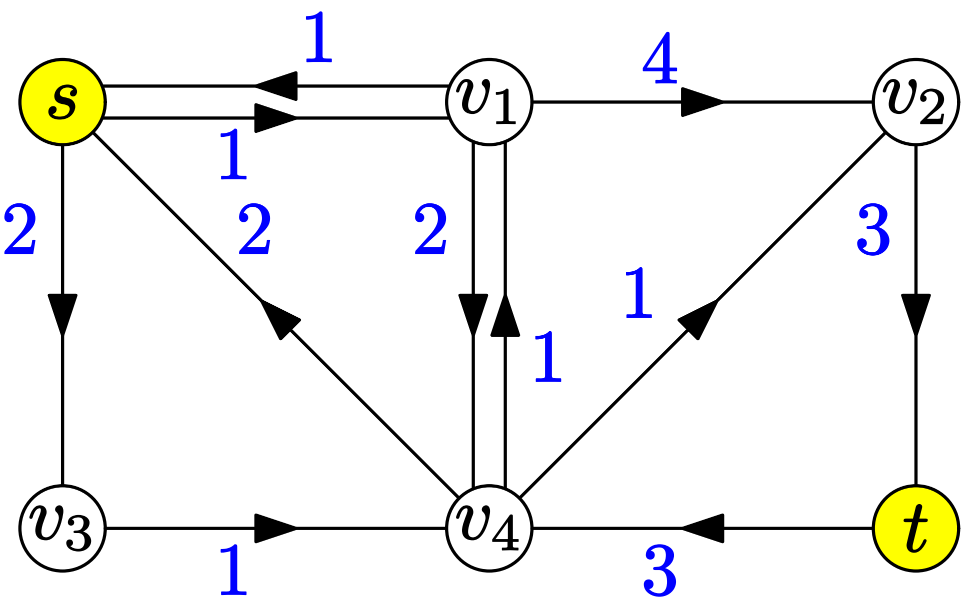
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

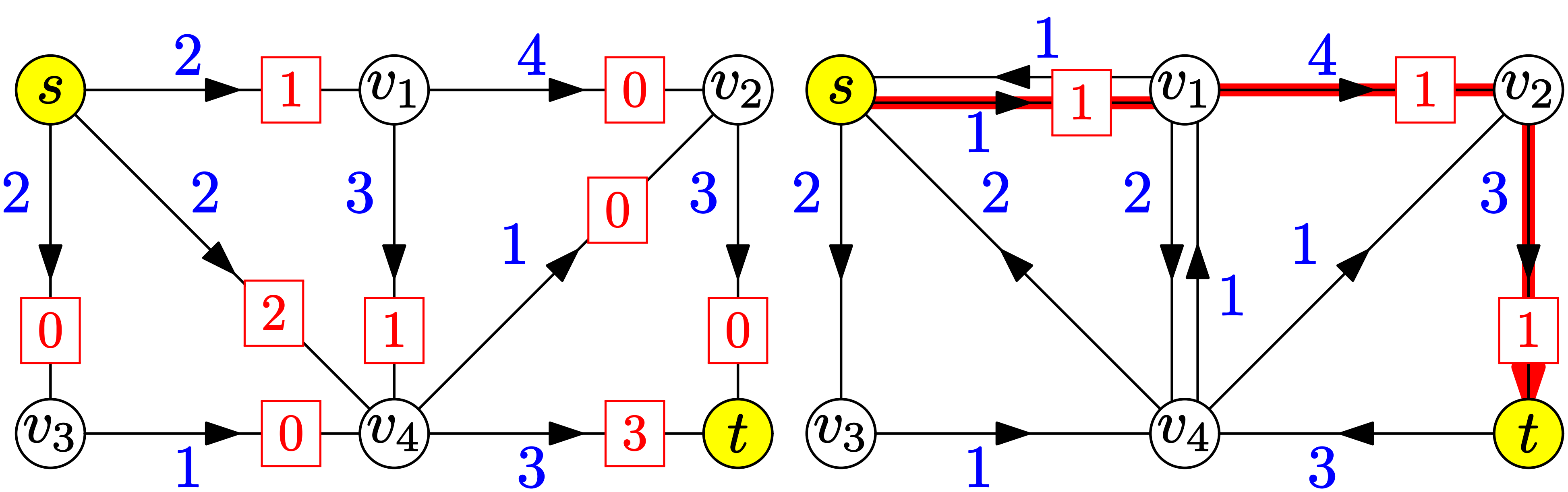
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ





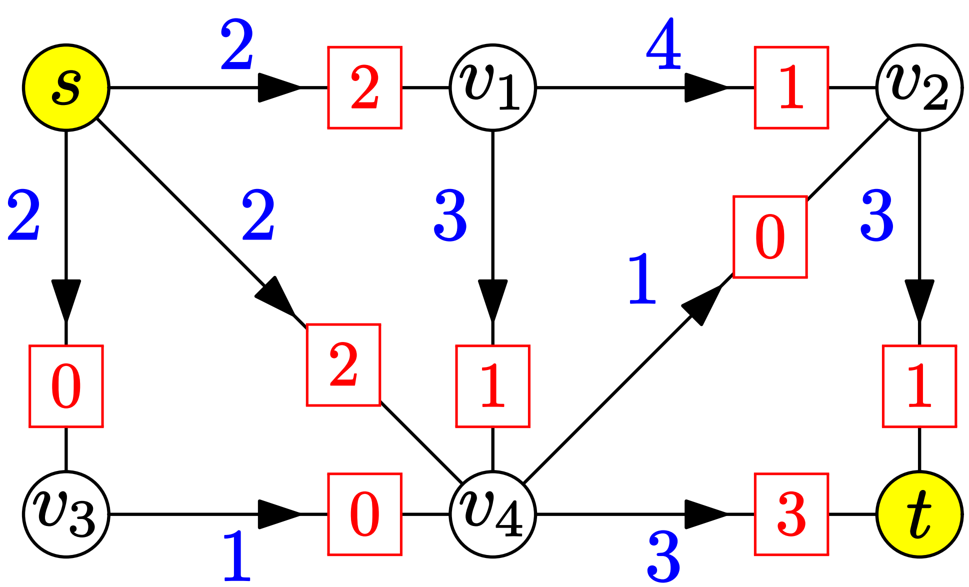
Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

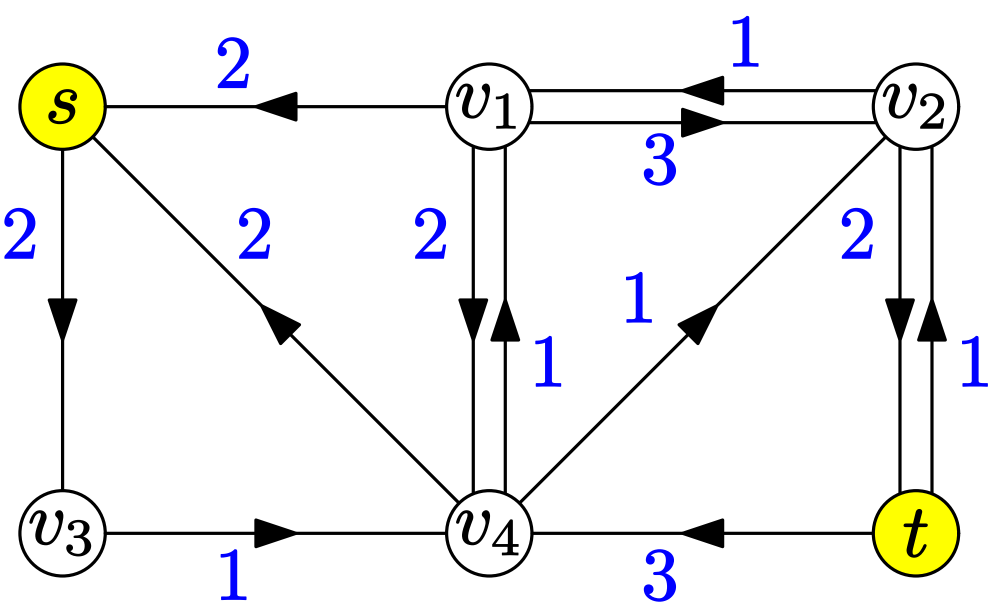
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

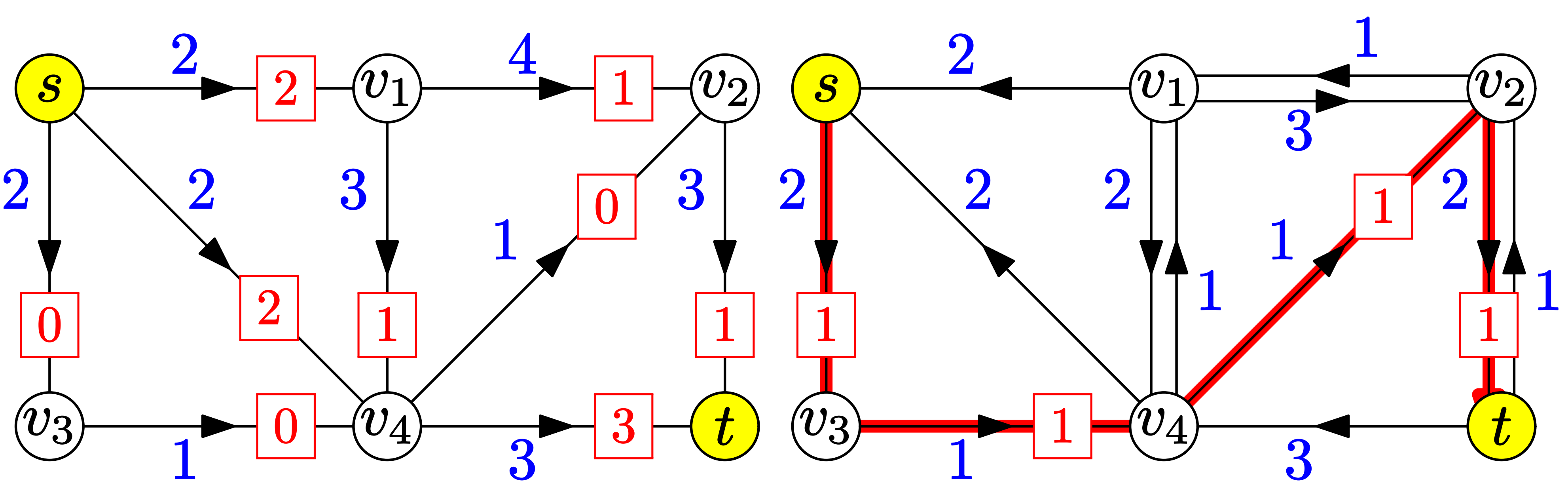
必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ





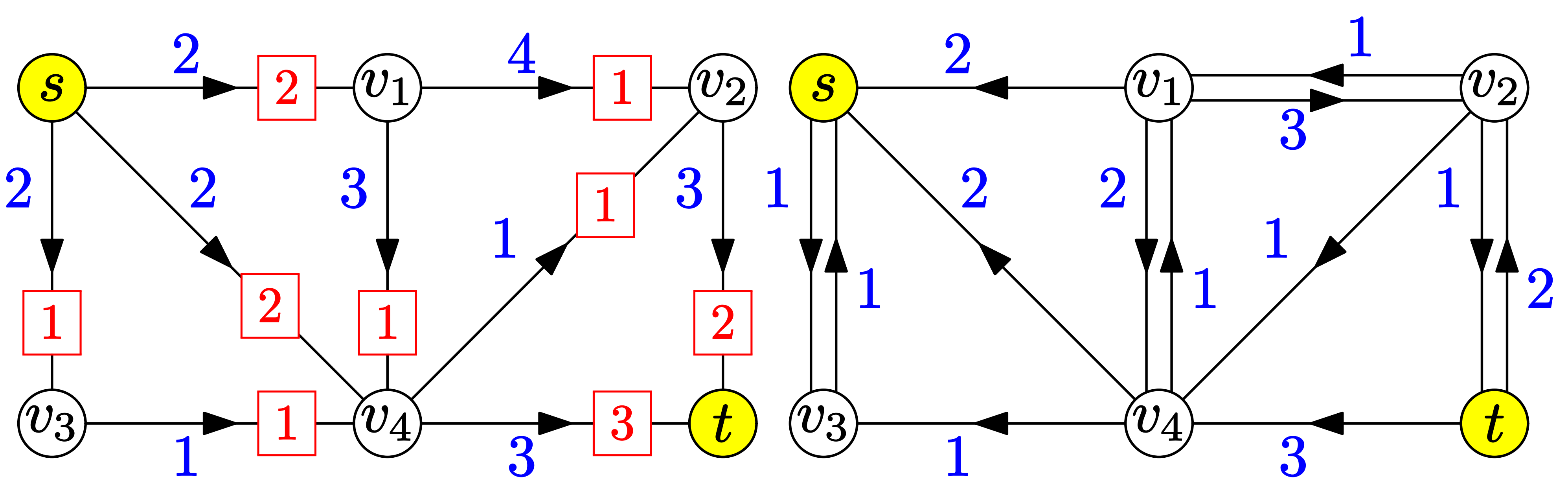
Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム ('72)

必ず **弧の数が最小** の増加道を選ぶ



Edmonds-Karp のアルゴリズム

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

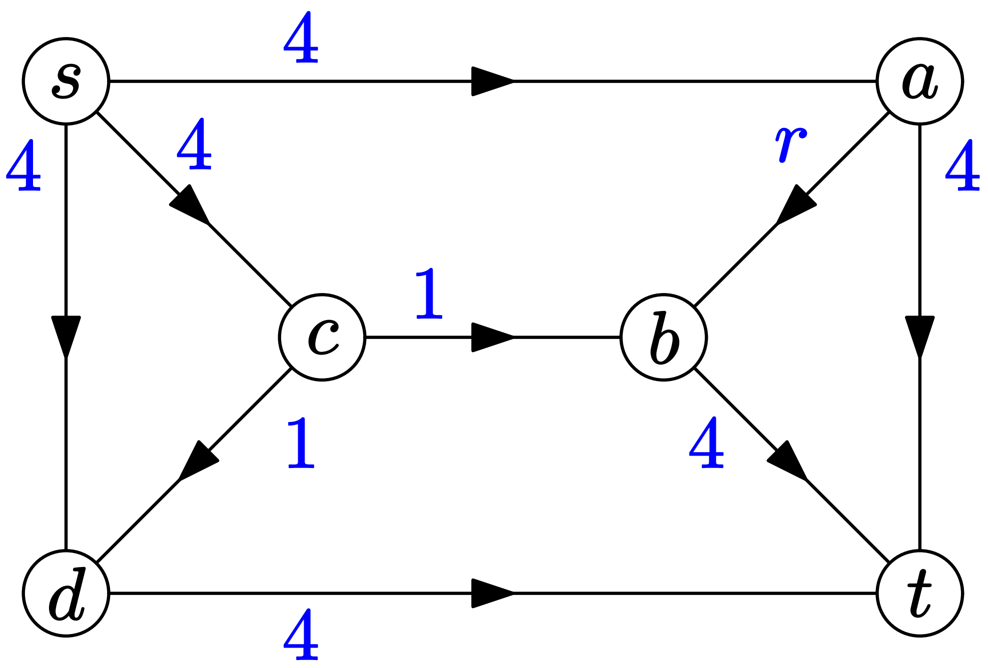
- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

$\boxed{\text{注}}$：Edmonds-Karp のアルゴリズムは

- 増加道法の一種
- 増加道法における増加道の選び方に制限を加えたもの

つまり，停止すれば，出力 f は必ず最大 s-t 流

次の例は Zwick ('95) による

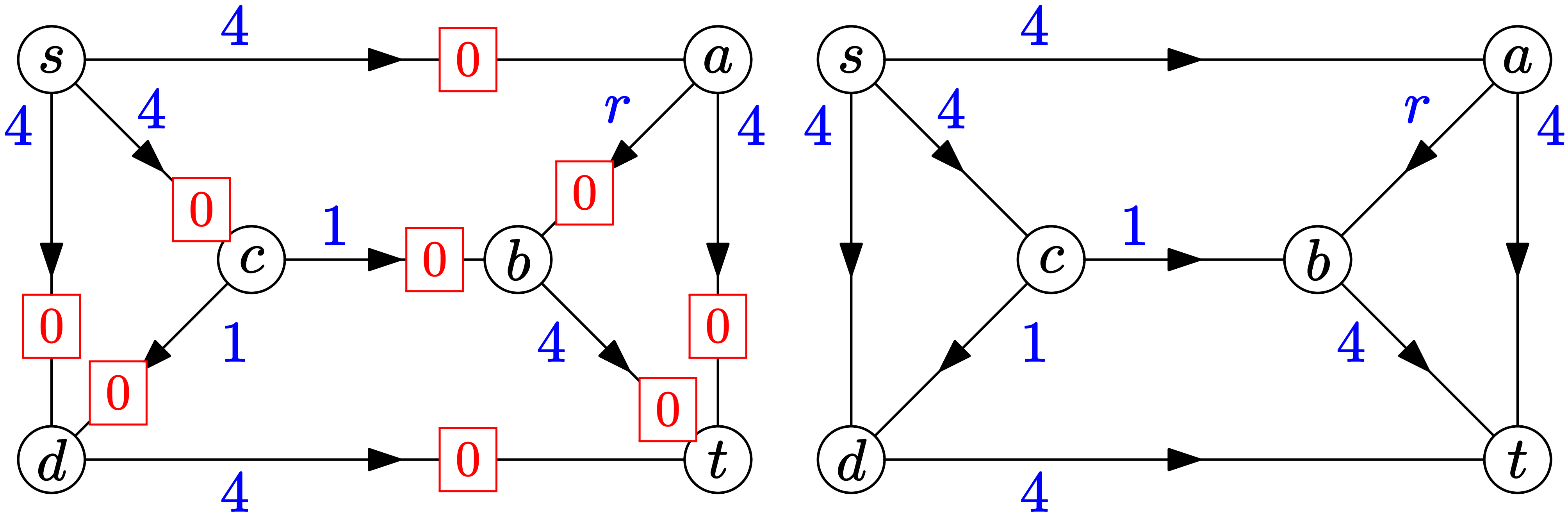


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

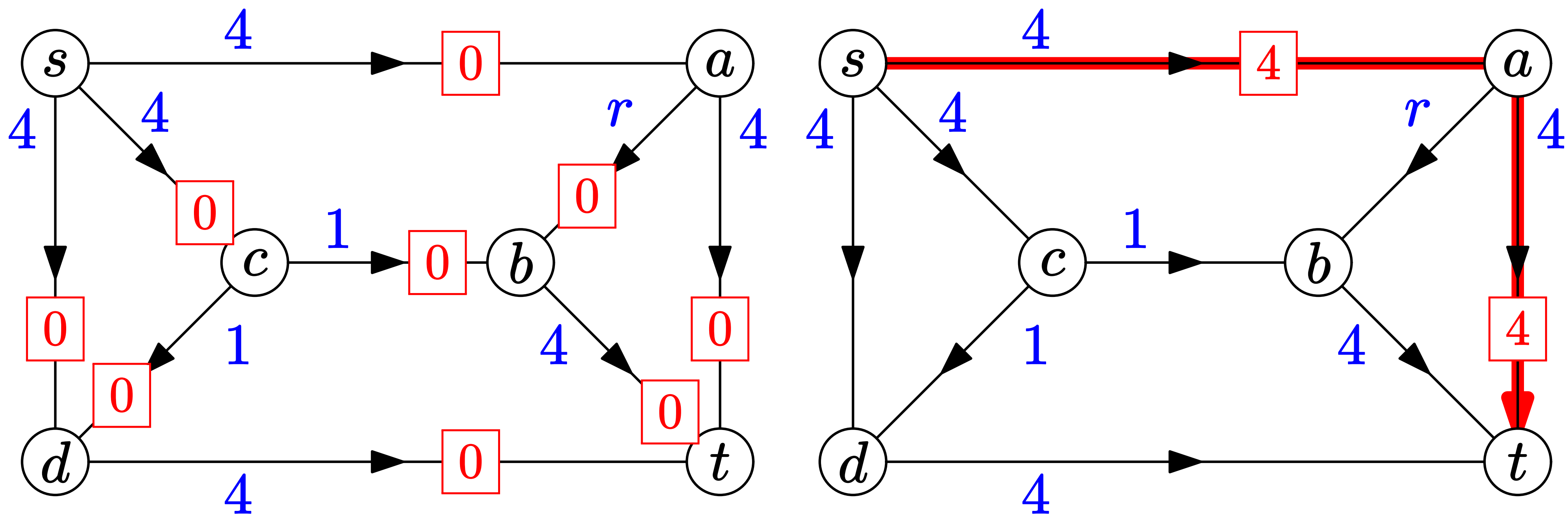


ただし, r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には, $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

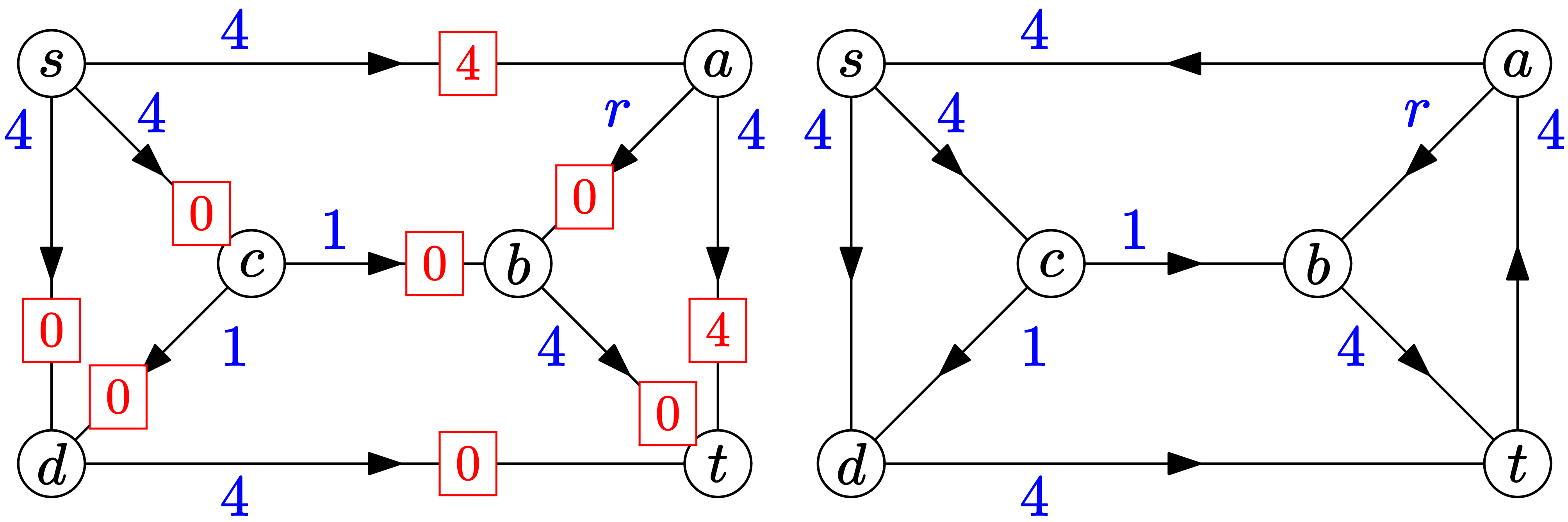


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

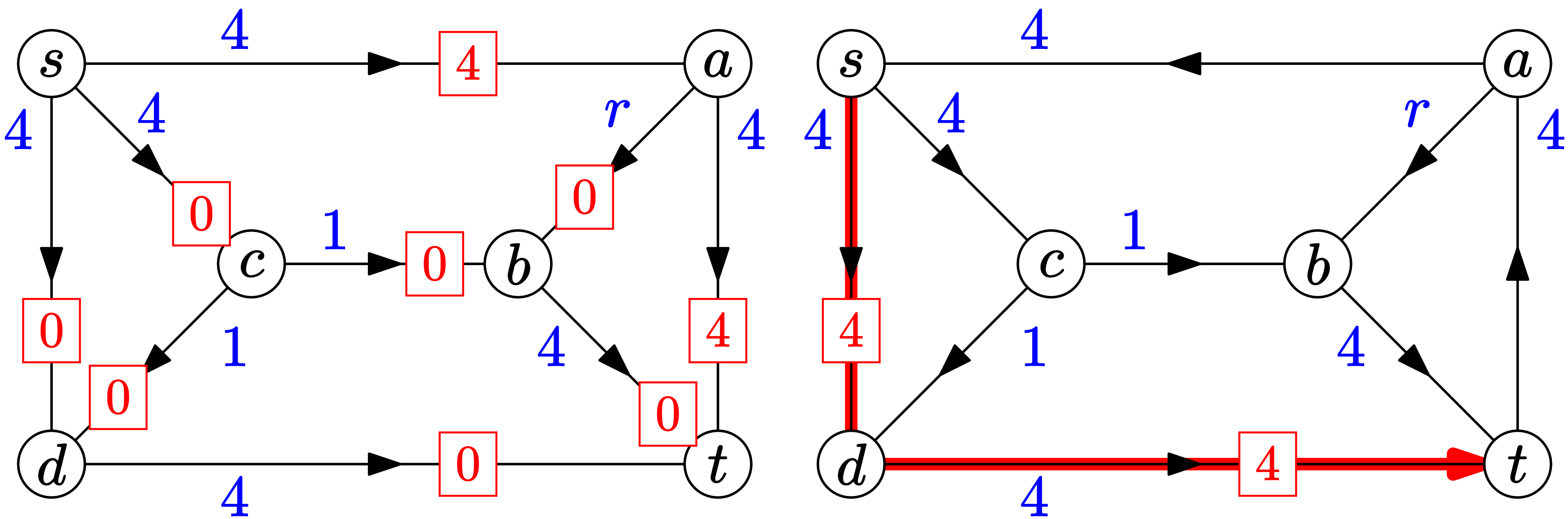


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

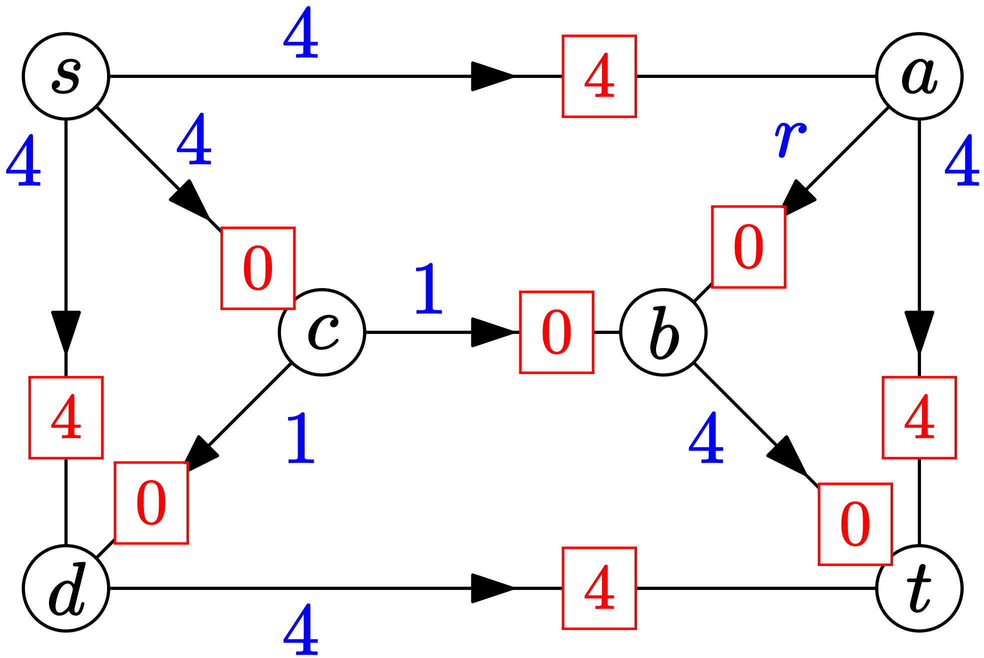


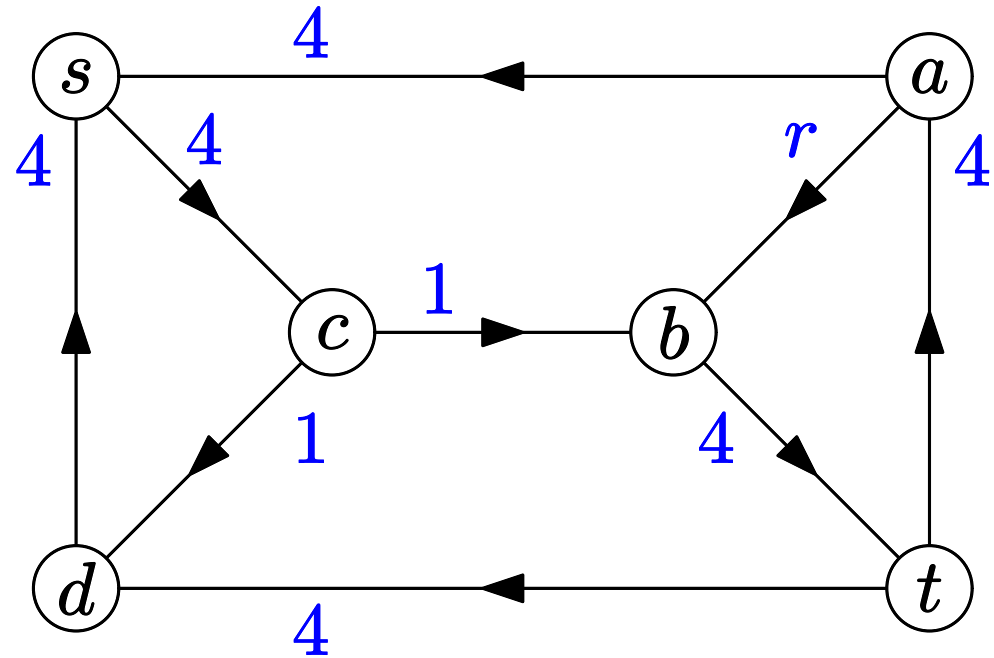
ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による



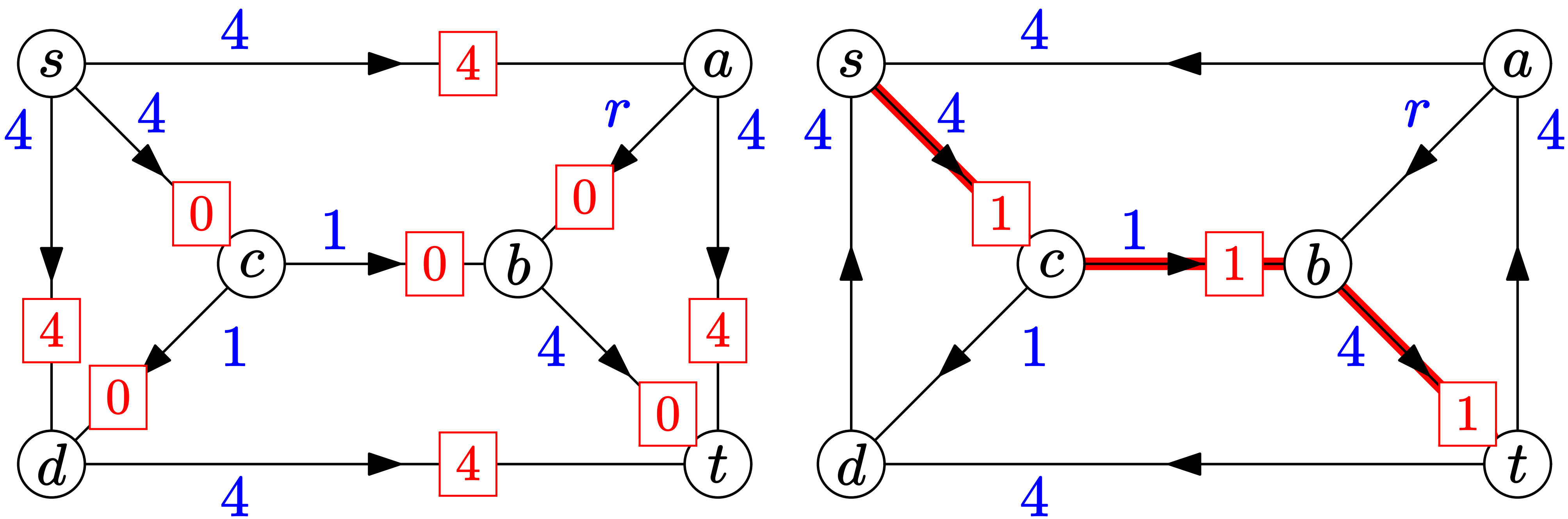


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

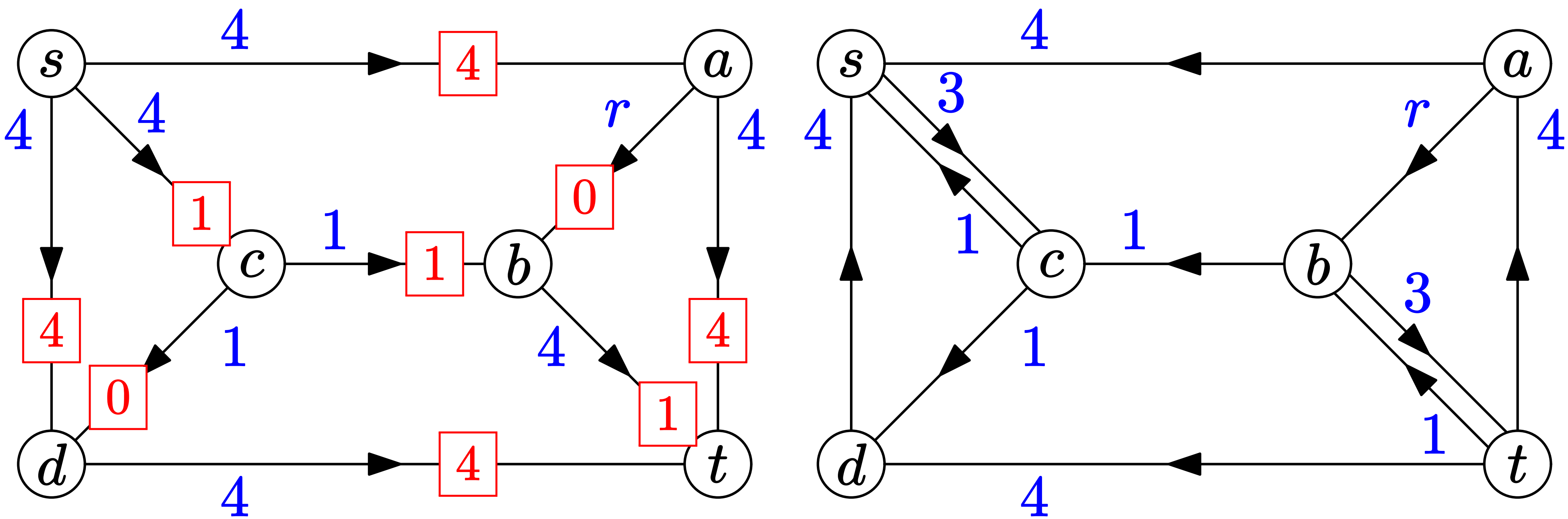


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が止まらない例 (第 2 回講義より)

次の例は Zwick ('95) による

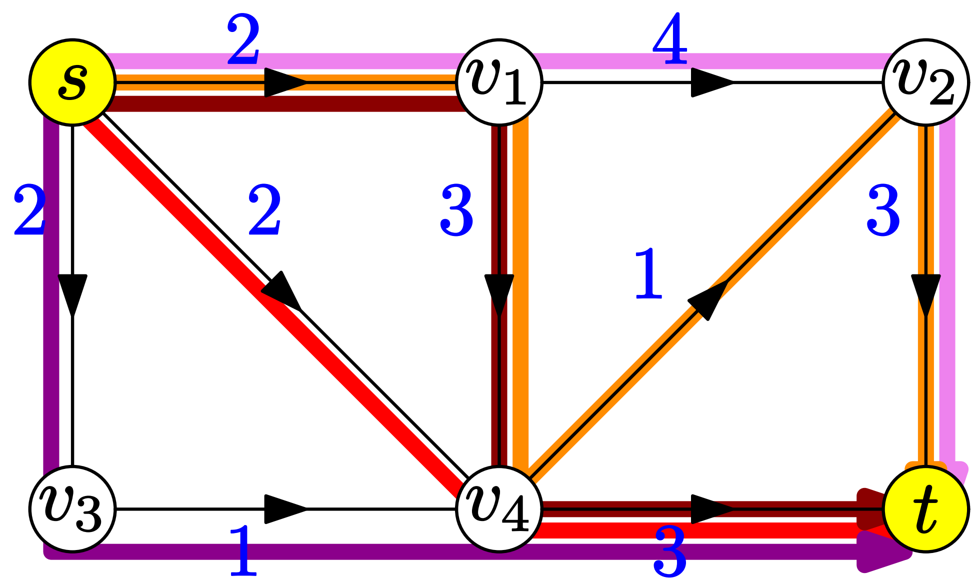


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

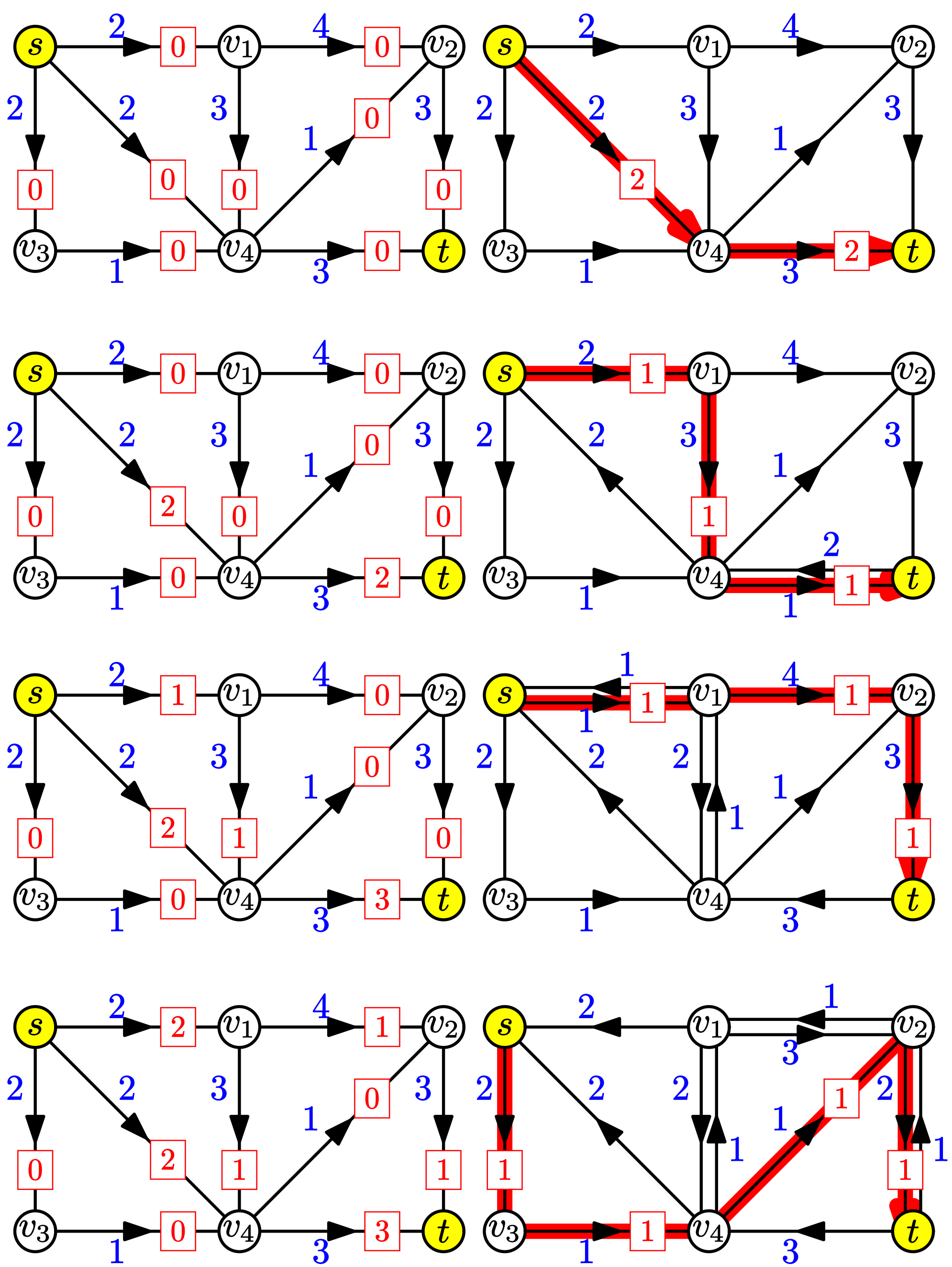
(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

Edmonds-Karp のアルゴリズムでは，ちゃんと止まる

1. Edmonds-Karp のアルゴリズム：概要
2. **Edmonds-Karp のアルゴリズム：停止性**
3. Edmonds-Karp のアルゴリズム：計算量



弧数の単調性：例



選ばれた増加道の弧数

2

∧

3

‖

3

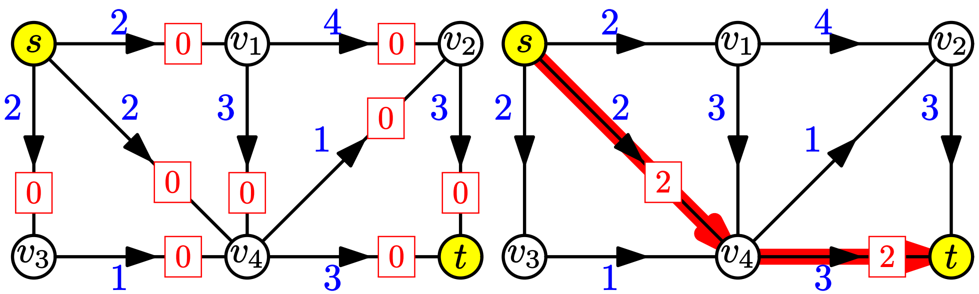
∧

4

弧数の単調性：例

選ばれた増加道の弧数

f_1

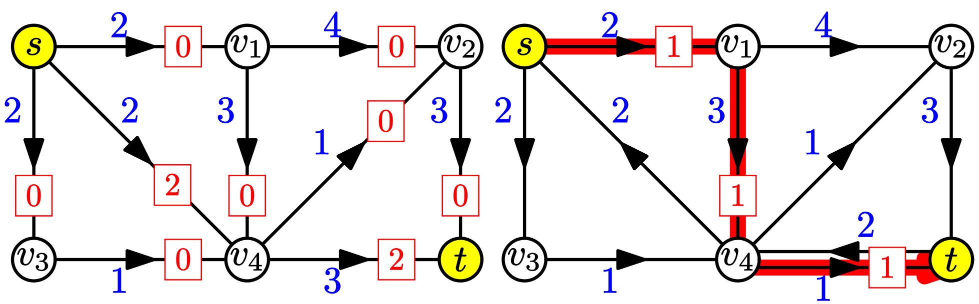


G_{f_1}

P_1 2

∧

f_2

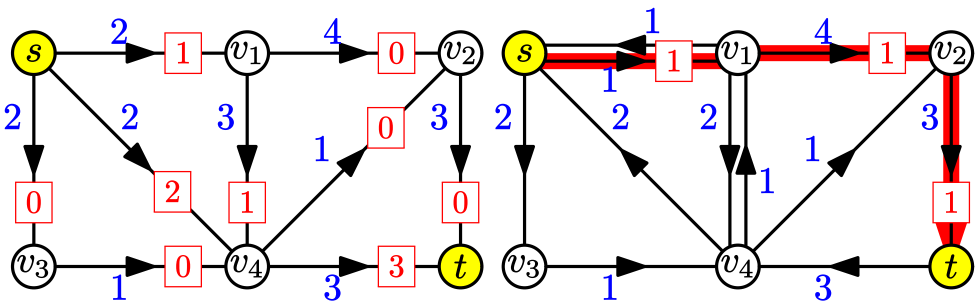


G_{f_2}

P_2 3

‖

f_3

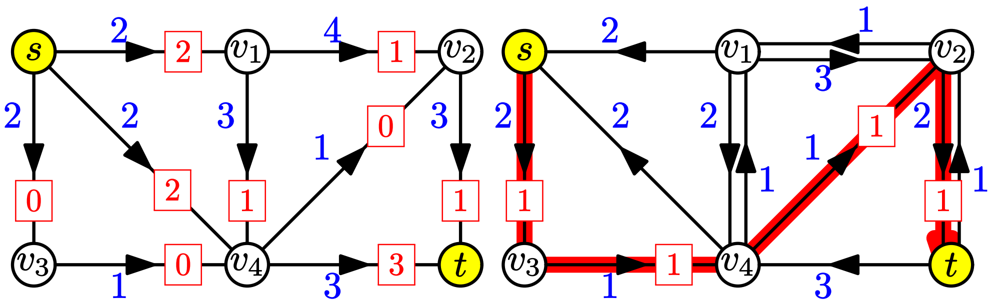


G_{f_3}

P_3 3

∧

f_4



G_{f_4}

P_4 4

弧数の単調性

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，

i 回目の反復：s-t 流 f_i，補助ネットワーク G_{f_i}

$\rightsquigarrow$ 選ばれた増加道 P_i

性質：弧数の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，

1. P_i の弧数 $\leq$ P_{i+1} の弧数
2. P_i の弧数 $<$ $P_{i+|A|}$ の弧数

$f_1 \quad f_2 \quad f_i \quad f_{i+1} \quad f_{i+|A|} \quad f_k$

$P_1 \quad P_2 \quad P_i \leq P_{i+1} \quad P_{i+|A|} \quad P_k$

$<$

$\boxed{\text{注}}$：増加道の弧数 $\leq |V| - 1$

弧数の単調性 ⇒ 停止性

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの停止性

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
高々 $|V||A|$ 回の反復で停止する

証明：「弧数の単調性」から分かる □

弧数の単調性 ⇒ 停止性

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの停止性

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
高々 $|V||A|$ 回の反復で停止する

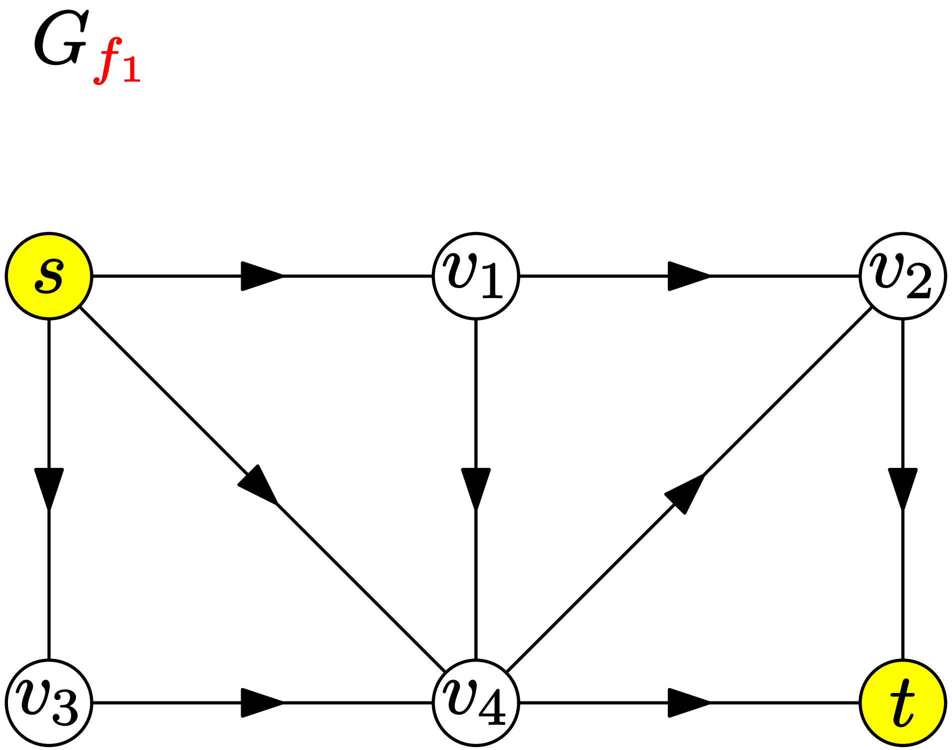
証明：「弧数の単調性」から分かる □

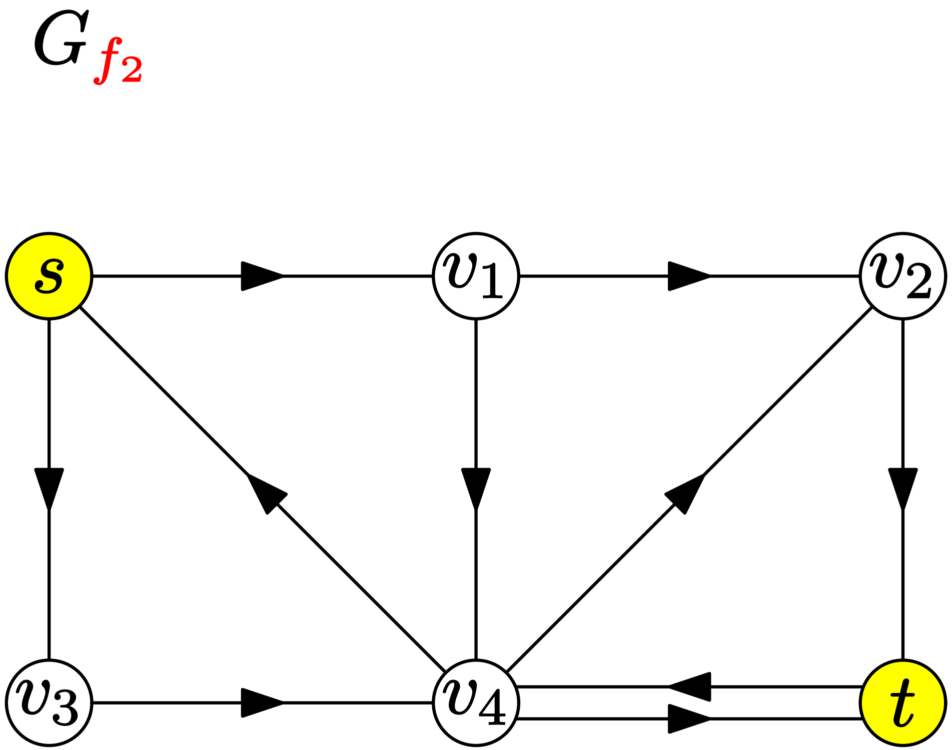
$|V||A|+1$ 回目の反復が 実行されるとすると

$$
\begin{aligned}
|V|-1 &\geq P_{|V||A|+1} \text{ の弧数} \\
&\geq P_{(|V|-1)|A|+1} \text{ の弧数} + 1 \\
&\geq P_{(|V|-2)|A|+1} \text{ の弧数} + 2 \\
&\vdots \\
&\geq P_1 \text{ の弧数} + |V| \geq |V| \quad \lightning
\end{aligned}
$$

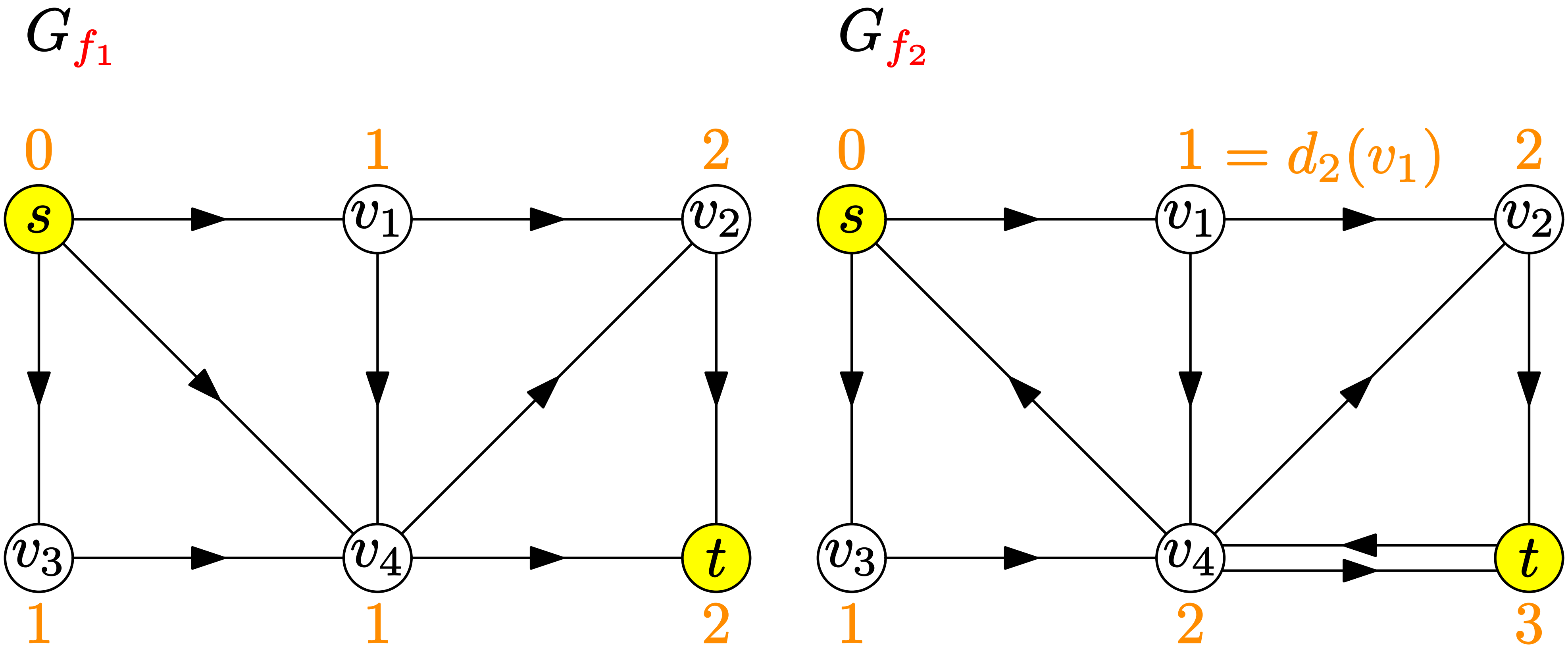
□

弧数の単調性：証明に向けて (1)





弧数の単調性：証明に向けて (1)



s からの距離

(弧 a の長さ $= 1$)

距離の単調性

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
i 回目の反復：s-t 流 f_i，補助ネットワーク G_{f_i}
$d_i(v) = G_{f_i}$ における s から v までの距離 (弧長 $= 1$)

性質：距離の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
任意の頂点 $v \in V$ に対して，$d_i(v) \leq d_{i+1}(v)$

距離の単調性：証明 (1/2)

証明：ある v, i に対して，$d_i(v) > d_{i+1}(v)$ と仮定

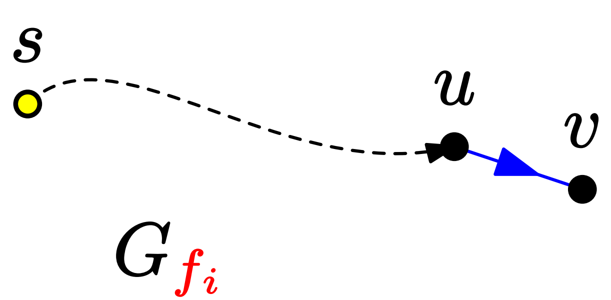
- i は固定して，
  そのような v の中で $d_{i+1}(v)$ が最小のものを取る　　特に，$v \neq s$
- $G_{f_{i+1}}$ において，s から v への弧数最小の道を 1 つ取り，
  その上の弧 (u, v) を考える　　ヒント：v の選び方
- このとき，$d_i(u) \leq d_{i+1}(u)$ である　　(なぜ？)

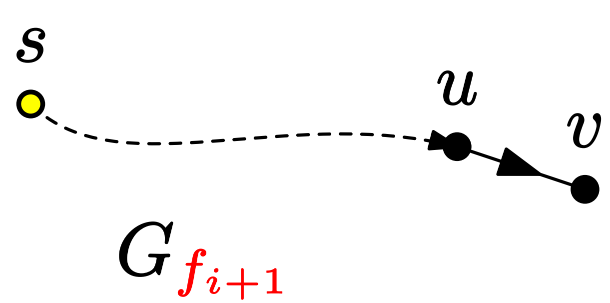
距離の単調性：証明 (1/2)

証明：ある v, i に対して，$d_i(v) > d_{i+1}(v)$ と仮定

- i は固定して，
  そのような v の中で $d_{i+1}(v)$ が最小のものを取る　　特に，$v \neq s$
- $G_{f_{i+1}}$ において，s から v への弧数最小の道を 1 つ取り，
  その上の弧 (u, v) を考える　　ヒント：v の選び方
- このとき，$d_i(u) \leq d_{i+1}(u)$ である　　(なぜ？)
- (u, v) が G_{f_i} の弧であると，$d_i(v) > d_{i+1}(v)$ に矛盾

$$\because \quad d_i(v) \leq d_i(u) + 1 \leq d_{i+1}(u) + 1 = d_{i+1}(v)$$



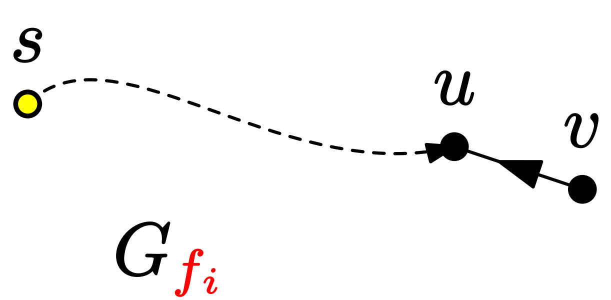


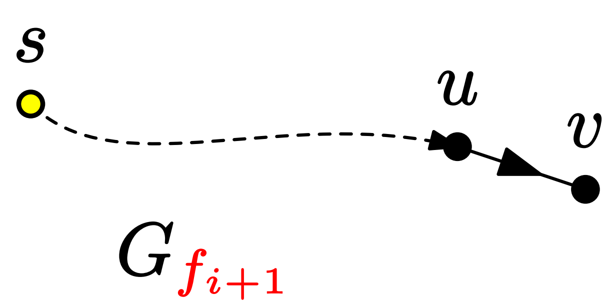
距離の単調性：証明 (2/2)

証明 (続)：すなわち，(u, v) は G_{f_i} の弧ではない

- 補助ネットワークの構成法から
  (v, u) は G_{f_i} の弧である
- つまり，(v, u) は弧数最小の増加道 P_i の弧である

仮定：$d_i(v) > d_{i+1}(v)$，示したこと：$d_i(u) \leq d_{i+1}(u)$





距離の単調性：証明 (2/2)

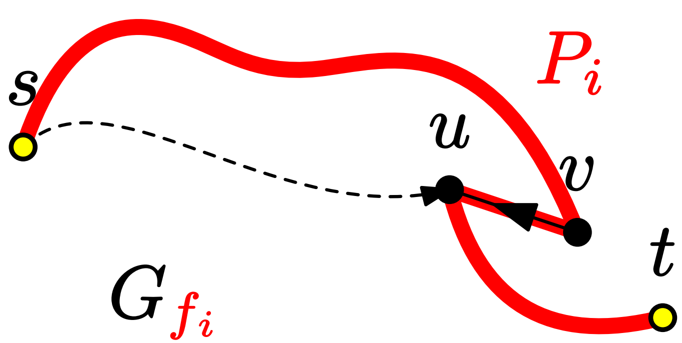
証明 (続)：すなわち，(u,v) は G_{f_i} の弧ではない

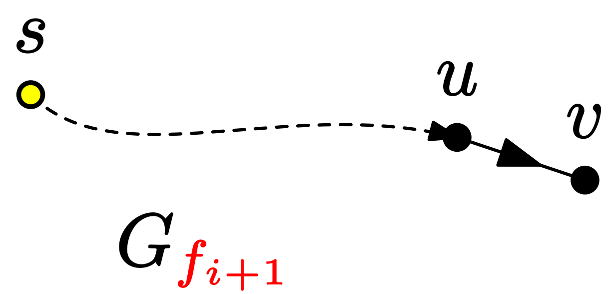
- 補助ネットワークの構成法から (v,u) は G_{f_i} の弧である
- つまり，(v,u) は弧数最小の増加道 P_i の弧である
- したがって，

$$d_i(u) = d_i(v) + 1 > d_{i+1}(v) + 1 = d_{i+1}(u) + 2$$

- これは $d_i(u) \le d_{i+1}(u)$ に矛盾 □

仮定：$d_i(v) > d_{i+1}(v)$，示したこと：$d_i(u) \le d_{i+1}(u)$





弧数の単調性 (1)：証明

性質：弧数の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて,

1. P_i の弧数 $\leq$ P_{i+1} の弧数
2. P_i の弧数 $<$ $P_{i+|A|}$ の弧数

1. の証明：「距離の単調性」より直ちに分かる $\square$

弧数の単調性 (1)：証明

性質：弧数の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて,

1. P_i の弧数 $\leq$ P_{i+1} の弧数
2. P_i の弧数 $<$ $P_{i+|A|}$ の弧数

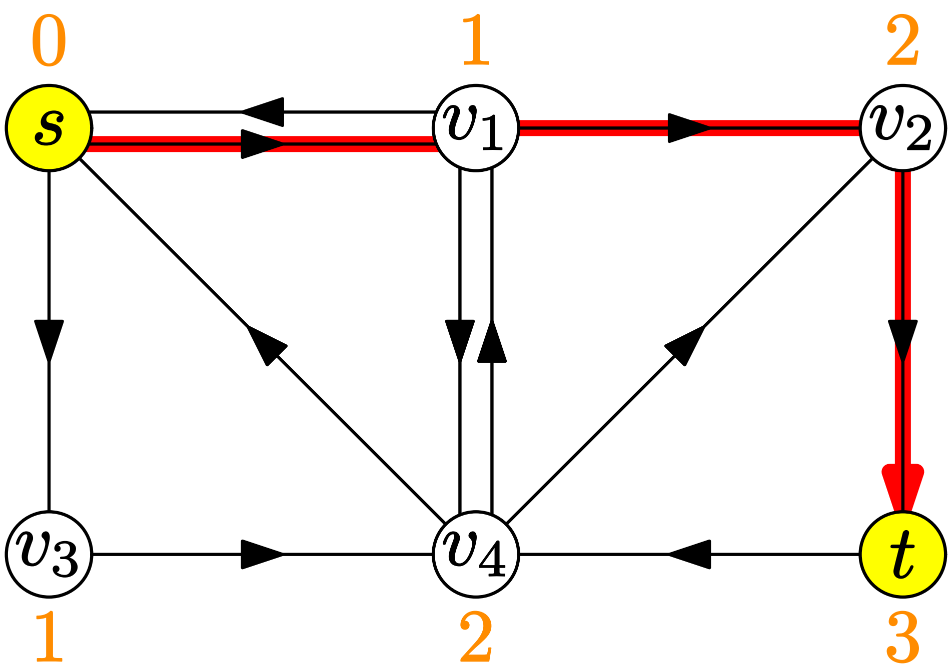
1. の証明：「距離の単調性」より直ちに分かる $\square$

P_i の弧数 $= d_i(t)$ なので,「距離の単調性」より

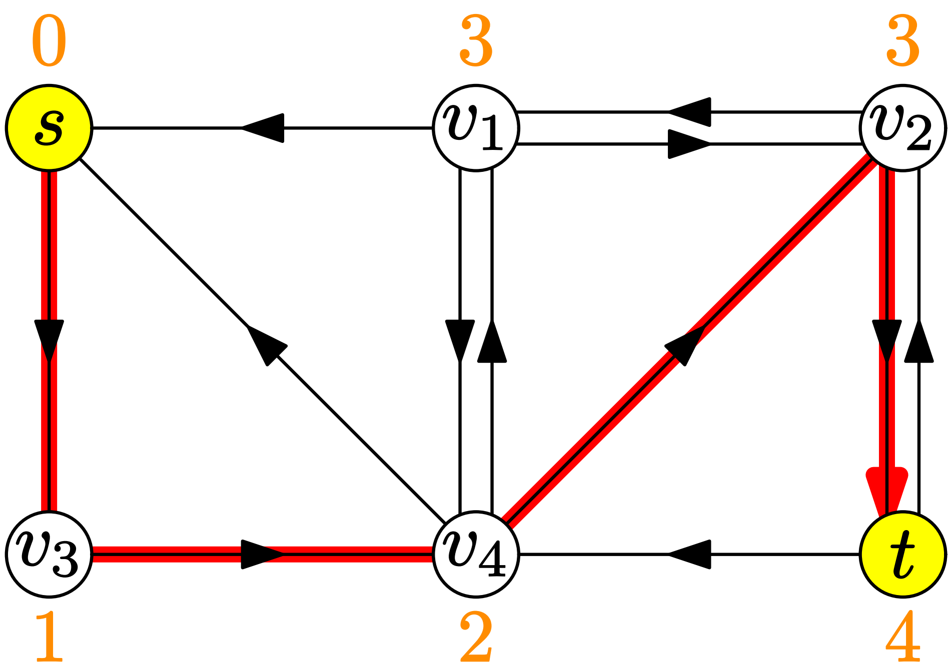
$$P_i \text{ の弧数} = d_i(t) \leq d_{i+1}(t) = P_{i+1} \text{ の弧数} \qquad \square$$

弧数の単調性：証明に向けて (2)

G_{f_3}



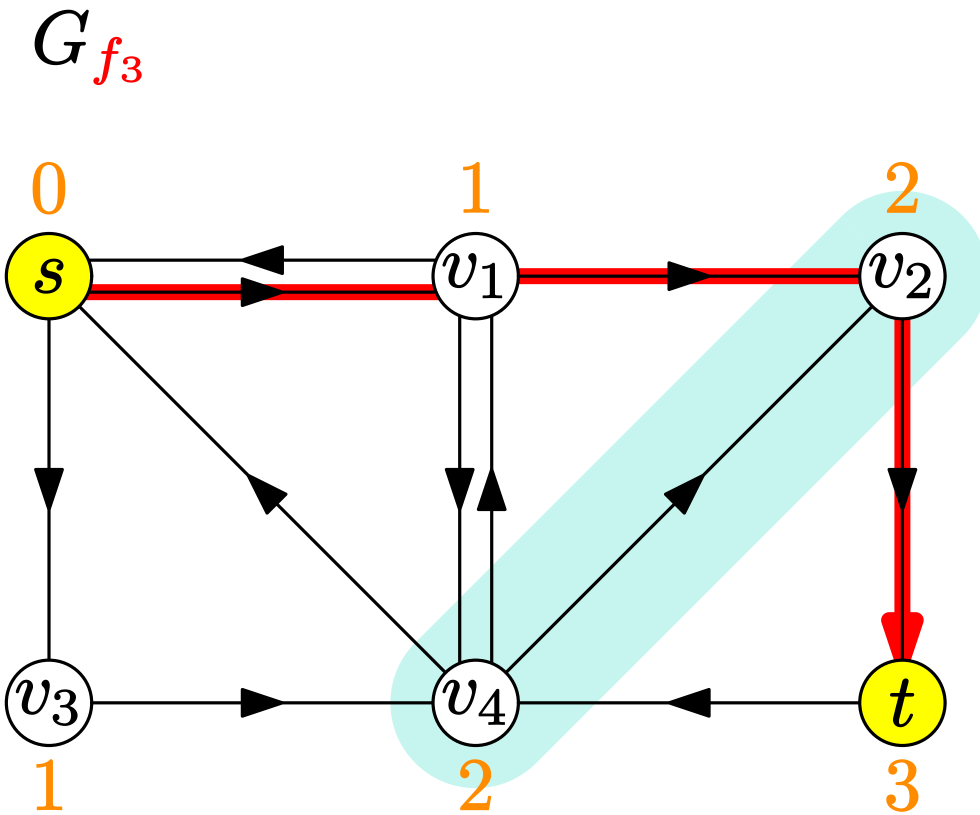
G_{f_4}

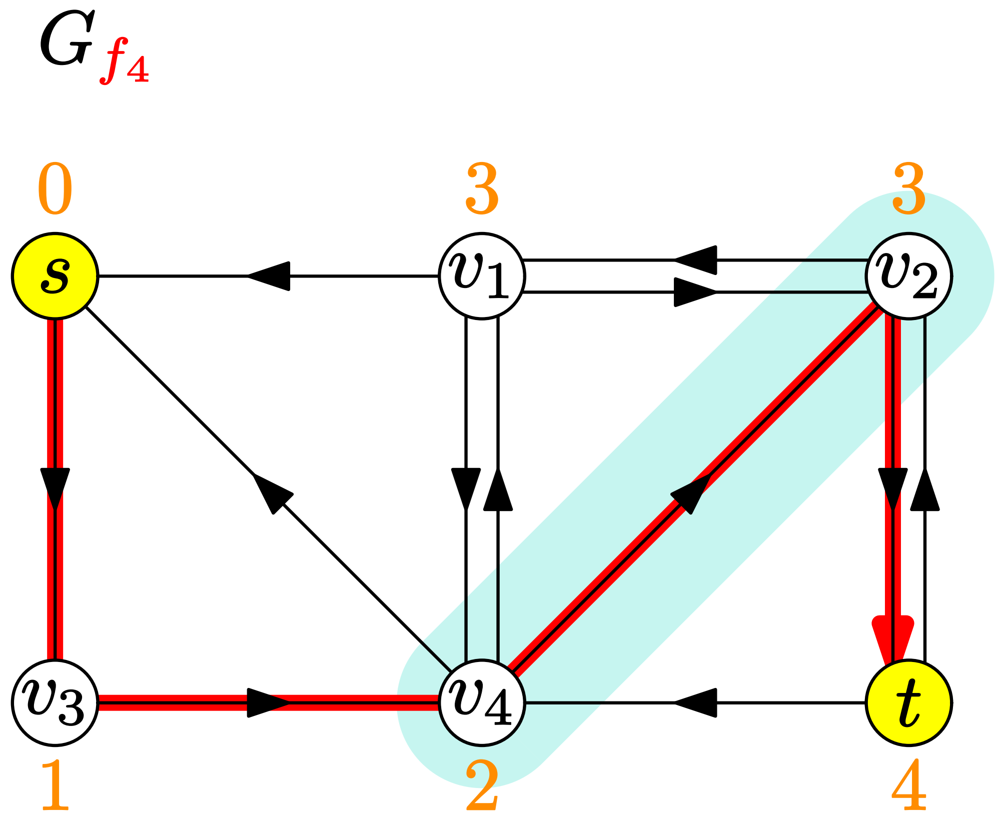


s からの距離

(弧 a の長さ $= 1$)

弧数の単調性：証明に向けて (2)





s からの距離

(弧 a の長さ $= 1$)

v_4v_2 が P_4 の弧であり，

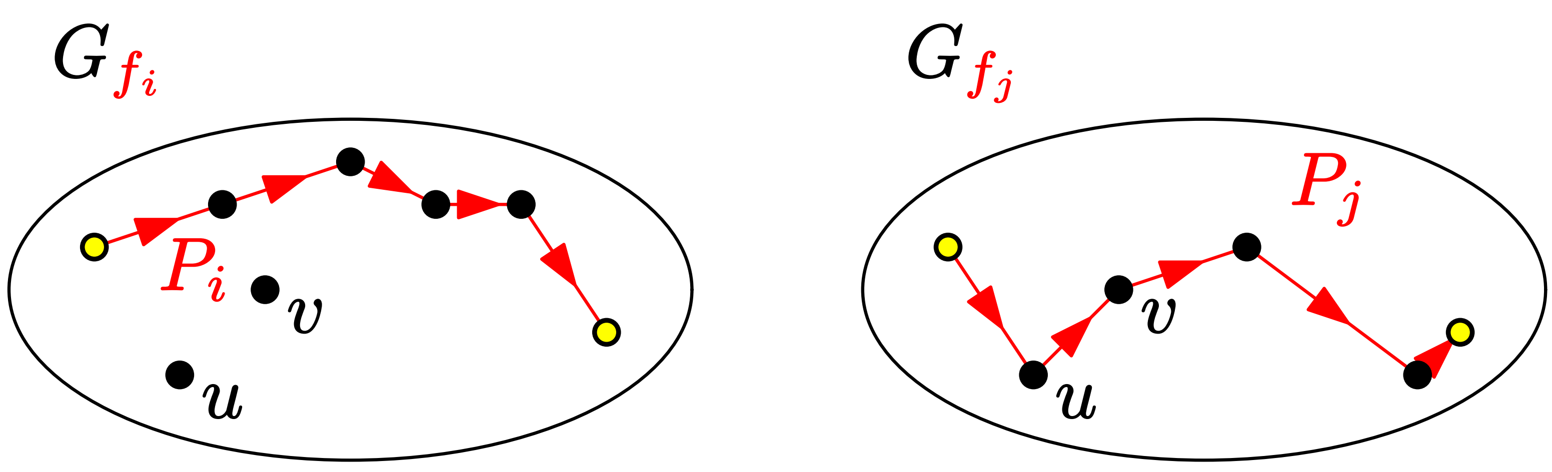
$d_3(v_4) \geq d_3(v_2)$ を満たす

弧数増加の十分条件

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$，
i 回目の反復：s-t 流 f_i，補助ネットワーク G_{f_i}
選ばれた増加道 P_i
$d_i(v) = G_{f_i}$ における s から v までの距離 (弧長 $=1$)

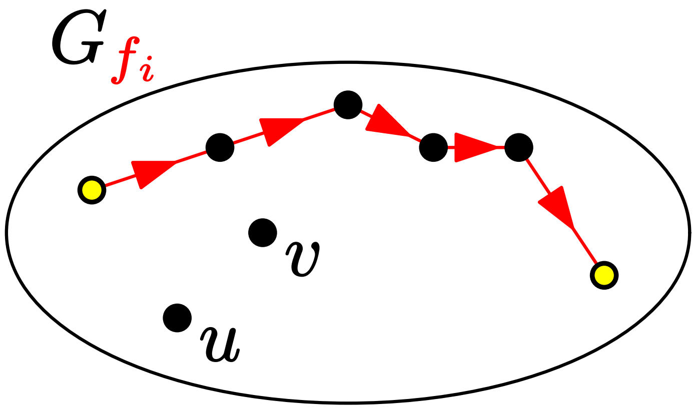
性質：弧数増加の十分条件

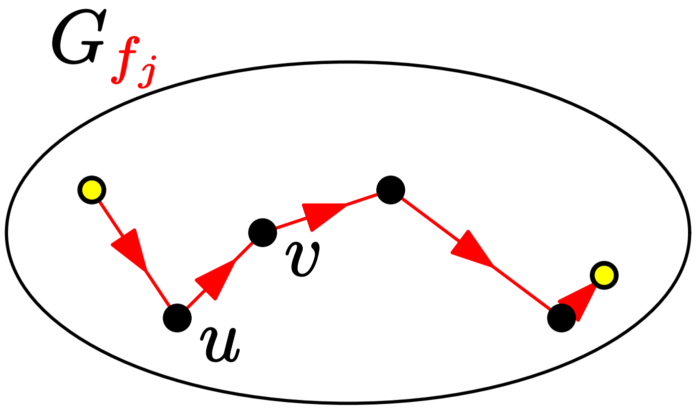
Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
$i < j$，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通る $\Rightarrow d_i(u) < d_i(v)$



弧数増加の十分条件：証明 (1/2)

証明：ある $i < j$ で，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通るが，
$d_i(u) \geq d_i(v)$ であると仮定

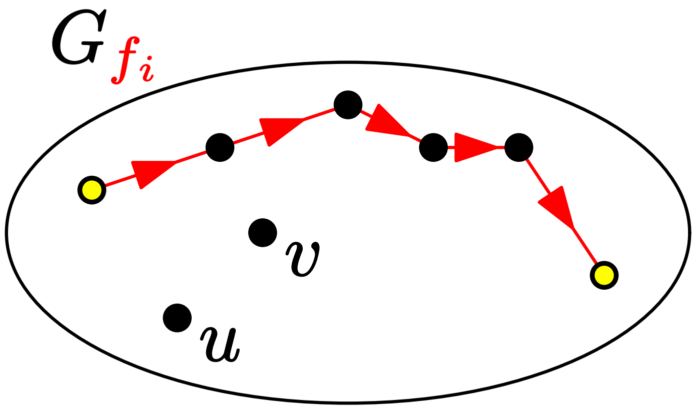




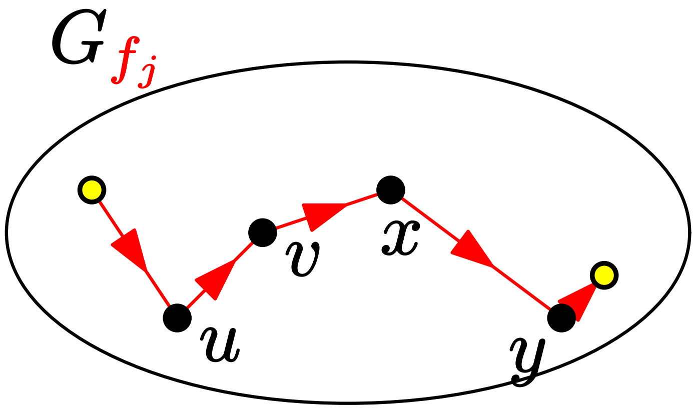
弧数増加の十分条件：証明 (1/2)

証明：ある $i < j$ で，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通るが，

$d_i(u) \geq d_i(v)$ であると仮定



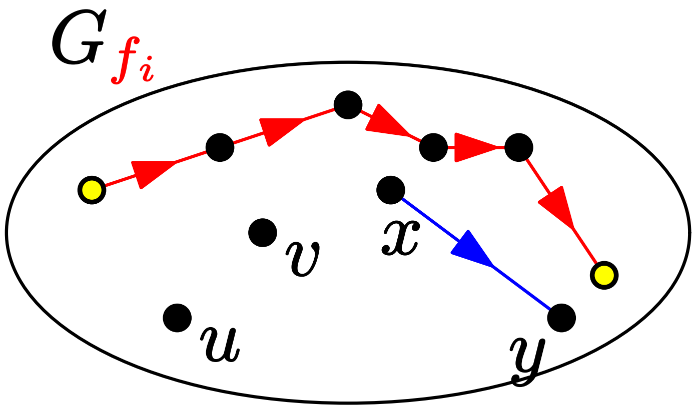
- そのような j の中で，最小のものを考える
- そのような uv の中で，t に最も近いものを考える
- P_j において，v と t の間にある弧 xy を考える ($d_i(x) < d_i(y)$)



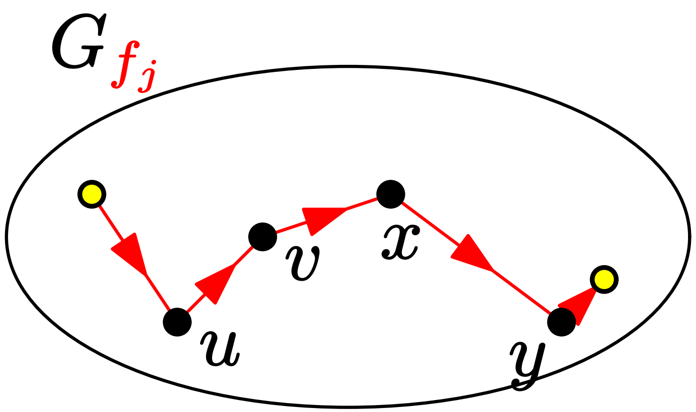
弧数増加の十分条件：証明 (1/2)

<u>証明</u>：ある $i < j$ で，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通るが，

$d_i(u) \geq d_i(v)$ であると仮定



- そのような j の中で，最小のものを考える
- そのような uv の中で，t に最も近いものを考える
- P_j において，v と t の間にある弧 xy を考える ($d_i(x) < d_i(y)$)
- このとき，xy は G_{f_i} の弧である



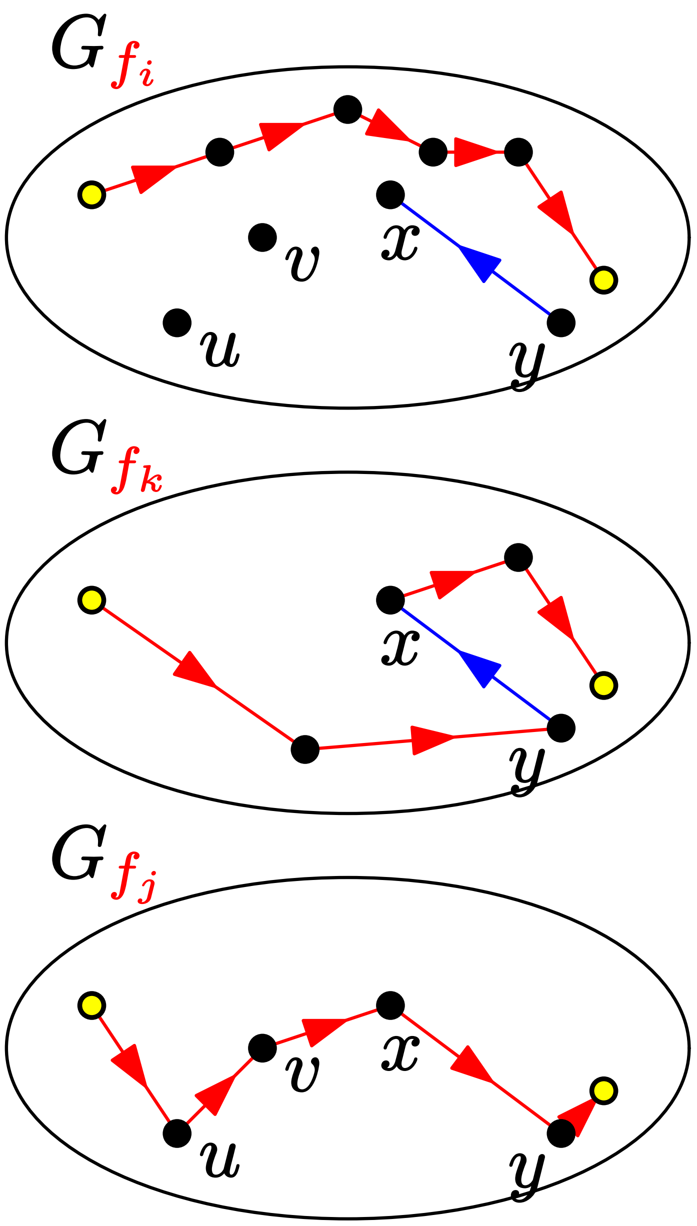
弧数増加の十分条件：証明 (1/2)

証明：ある $i < j$ で，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通るが，

$d_i(u) \geq d_i(v)$ であると仮定

- そのような j の中で，最小のものを考える
- そのような uv の中で，t に最も近いものを考える
- P_j において，v と t の間にある弧 xy を考える ($d_i(x) < d_i(y)$)
- このとき，xy は G_{f_i} の弧である

なぜか？
- そうでないと，yx が G_{f_i} の弧
- $\therefore$ ある $k \in \{i, \ldots, j-1\}$ に対して P_k が yx を通る
- $\therefore j$ の最小性に矛盾



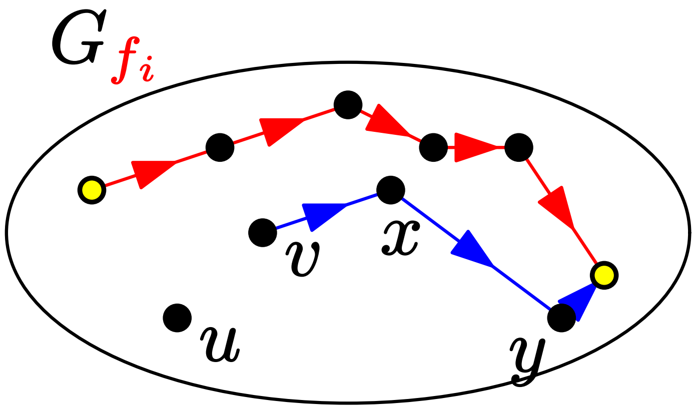
弧数増加の十分条件：証明 (2/2)

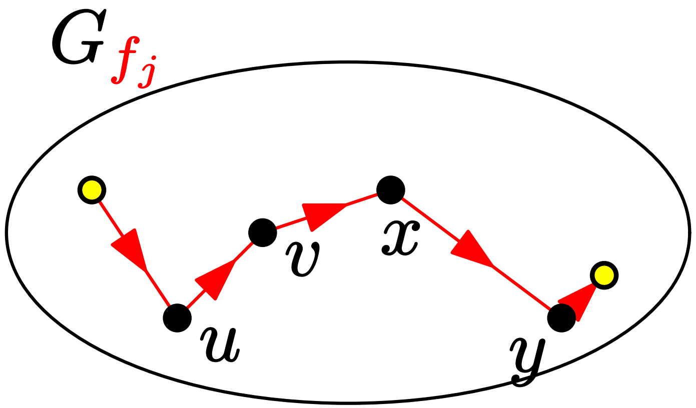
証明 (続)：

- $\therefore$ P_j において v から t までの弧は G_{f_i} にも存在する
- したがって

$$
\begin{aligned}
d_i(t) &\leq d_i(v) + (d_j(t) - d_j(v)) \\
&\leq d_i(u) + (d_j(t) - (d_j(u) + 1)) \\
&\leq d_j(t) - 1
\end{aligned}
$$

- $d_i(t) = d_j(t)$ に矛盾 $\square$





弧数増加の十分条件：言い換え

性質：弧数増加の十分条件

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
$i < j$，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通る $\Rightarrow d_i(u) < d_i(v)$

↓ 同値な言い換え (注：$d_i(t) \leq d_j(t)$)

性質：弧数増加の十分条件 (言い換え)

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
$i < j$，P_j が弧 uv を通る，$d_i(u) \geq d_i(v) \Rightarrow d_i(t) < d_j(t)$

性質：弧数の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，

1. P_i の弧数 $\leq$ P_{i+1} の弧数
2. P_i の弧数 $<$ $P_{i+|A|}$ の弧数

2. の証明：「弧数増加の十分条件」より分かる

性質：弧数の単調性

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，

1. P_i の弧数 $\leq P_{i+1}$ の弧数
2. P_i の弧数 $< P_{i+|A|}$ の弧数

2. の証明：「弧数増加の十分条件」より分かる

性質：弧数増加の十分条件

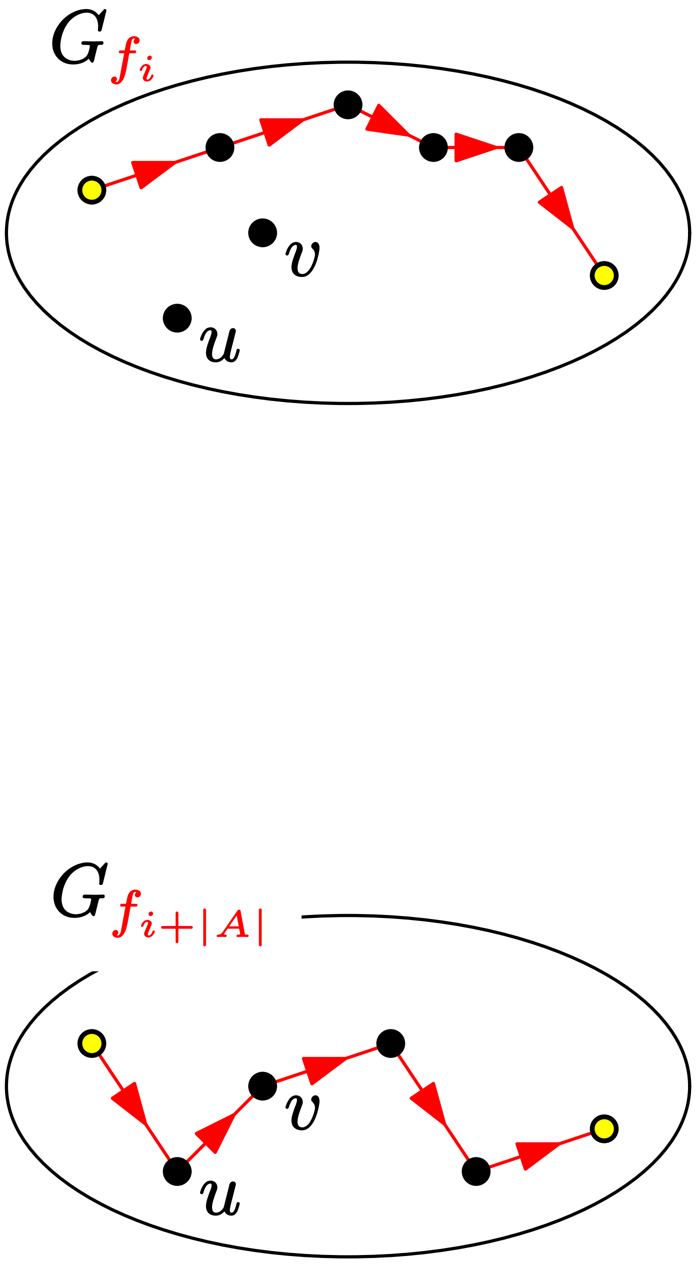
Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
$i < j$，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通る $\Rightarrow d_i(u) < d_i(v)$

$j = i + |A|$ のとき，$d_i(t) = d_j(t)$ を仮定し，矛盾を導く

弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

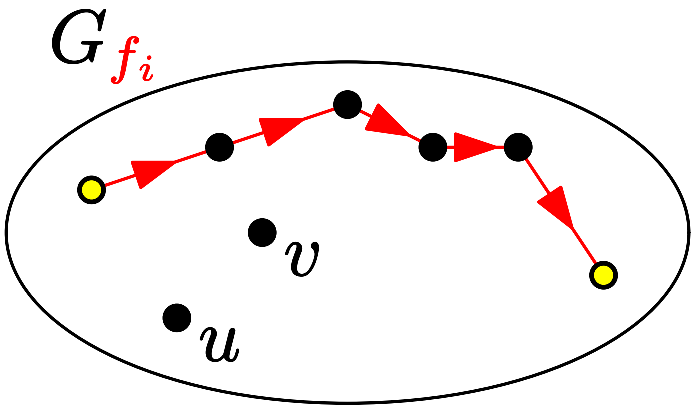
- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす

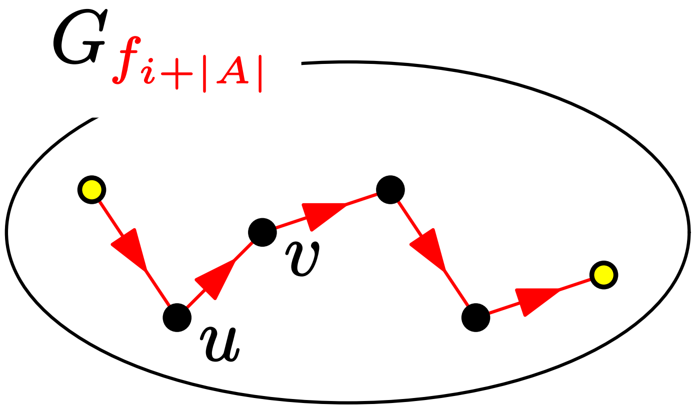


弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)

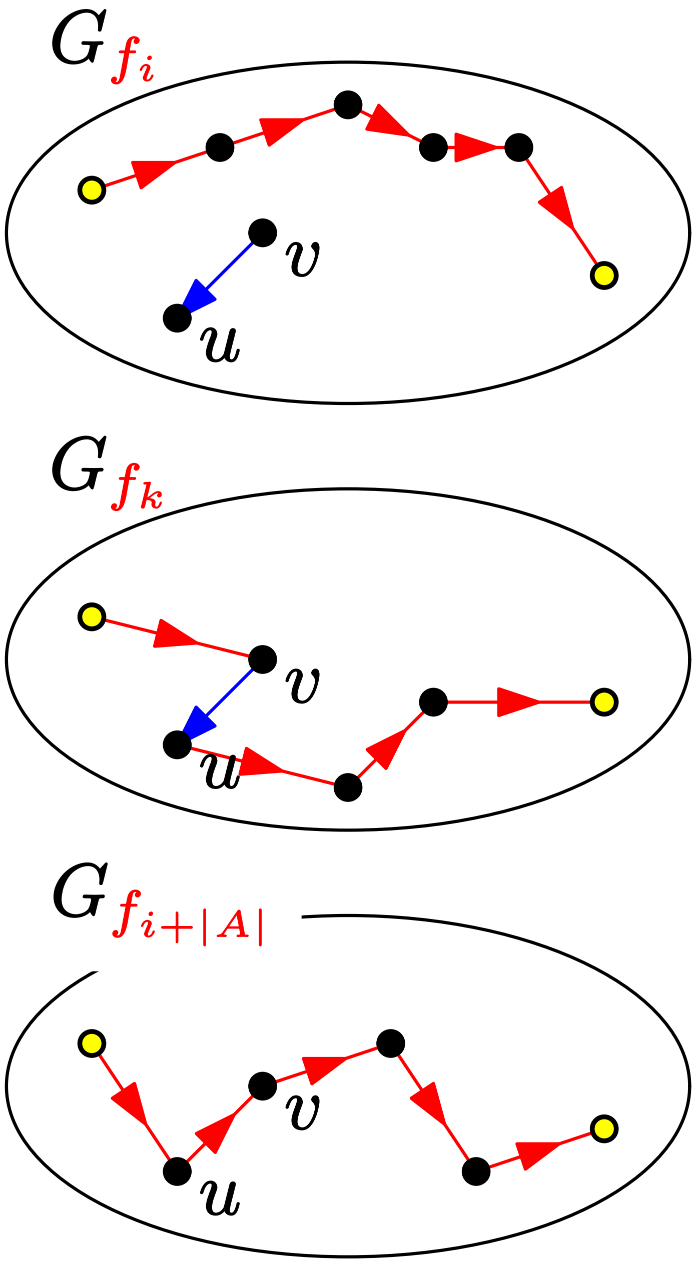




弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

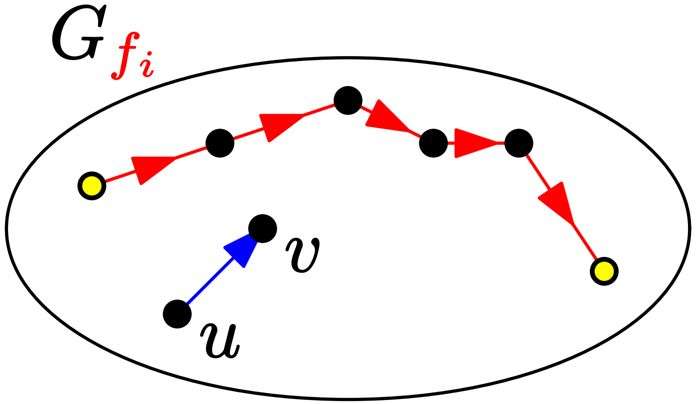
- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)

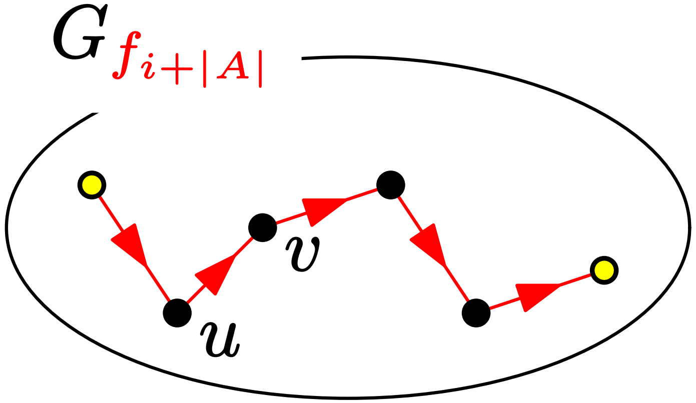


弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)

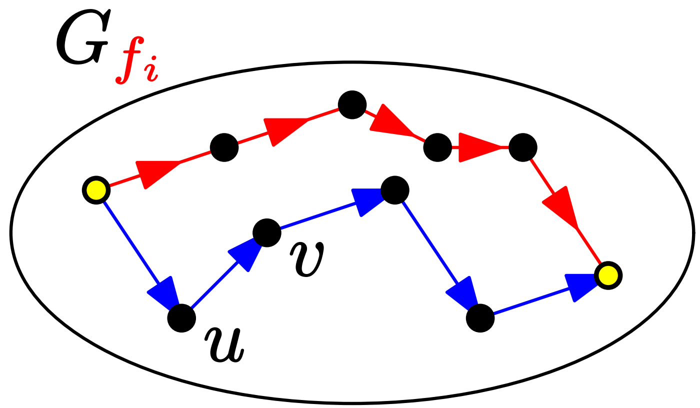


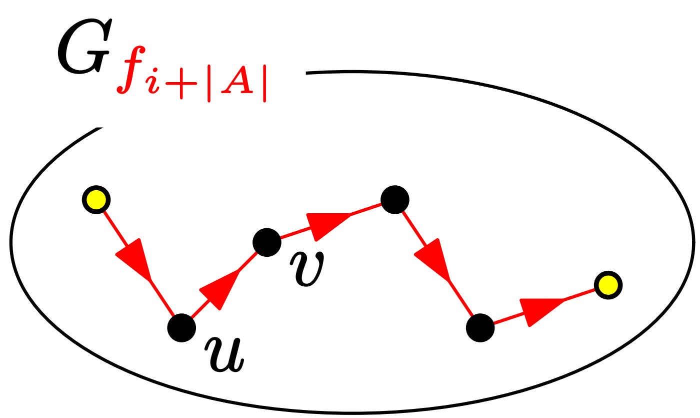


弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)



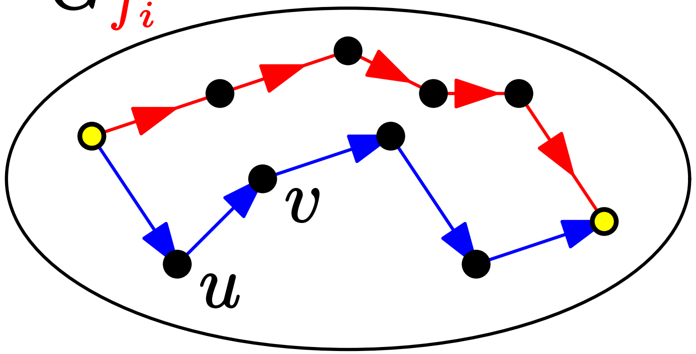


弧数の単調性 (2)：証明 (続)

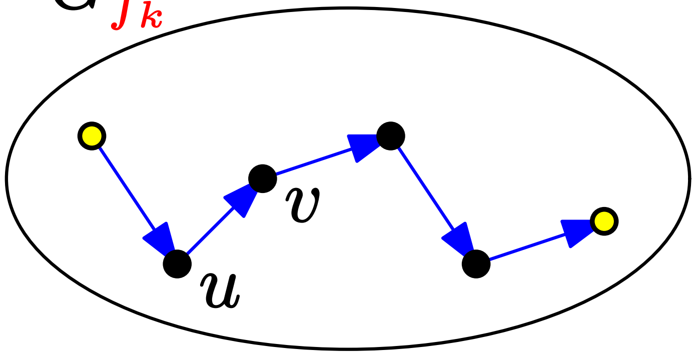
$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で uv は G_{f_k} の弧

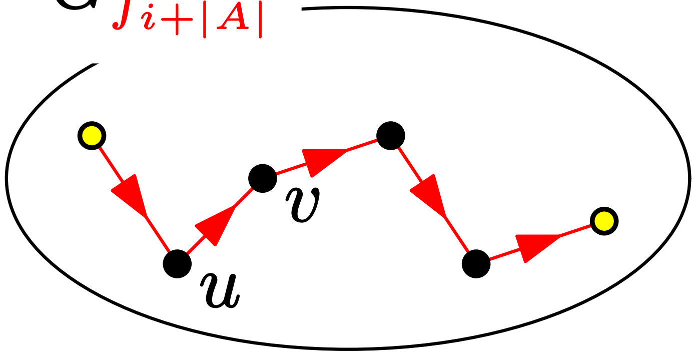
G_{f_i}



G_{f_k}



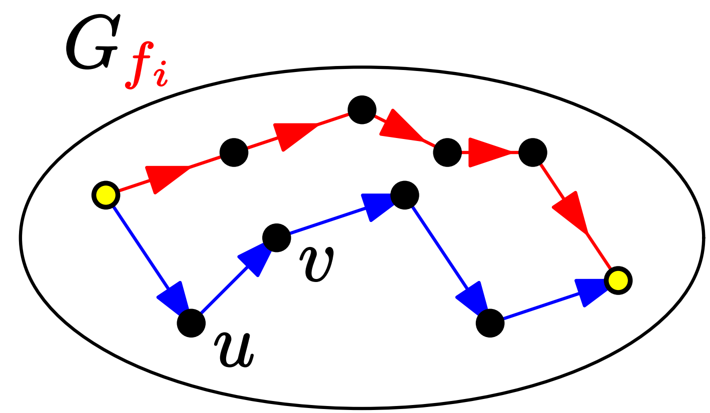
$G_{f_{i+|A|}}$

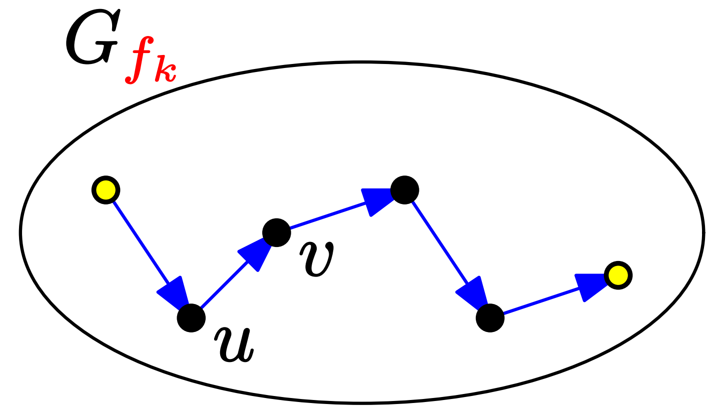


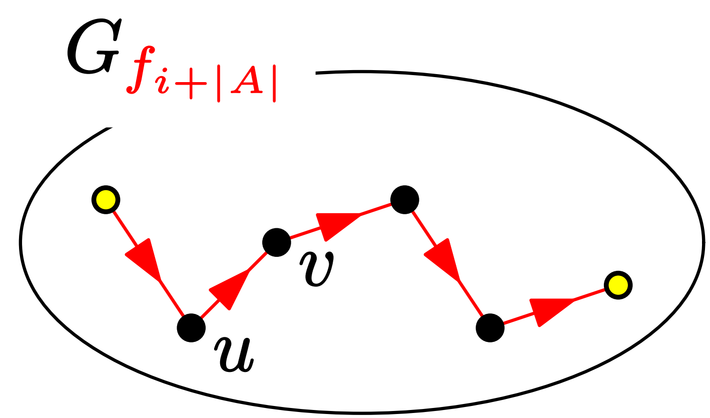
弧数の単調性 (2)：証明 (続)

$j = i + |A|$, $d_i(t) = d_j(t)$, uv を P_j の任意の弧とする

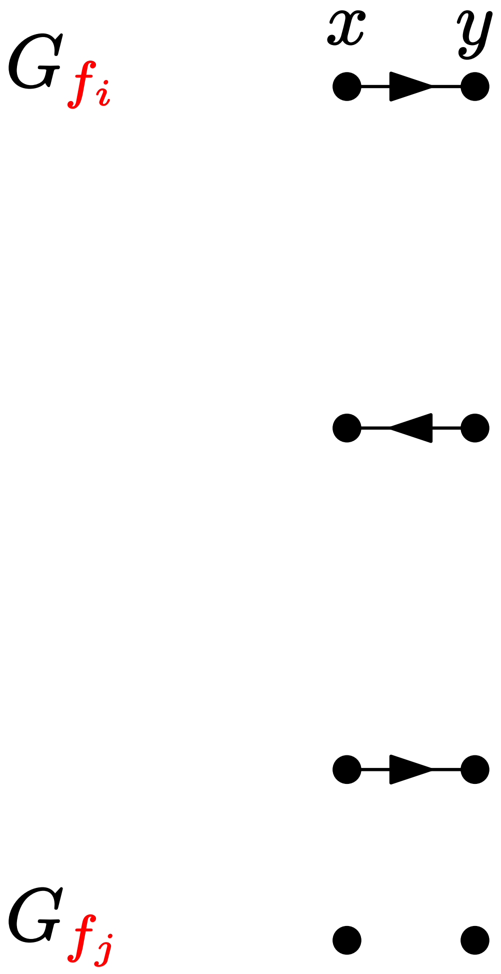
- $d_i(u) < d_i(v)$ を満たす
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で $d_k(u) < d_k(v)$
- uv は G_{f_i} の弧である (なぜ？)
- 任意の $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ で uv は G_{f_k} の弧
- P_k に沿って流を増加させると G_{f_k} の弧が 1 つ以上消える
- $j = i + |A|$ なので，G_{f_i} から G_{f_j} を考える間にある弧 xy は一旦消えてまた現れる





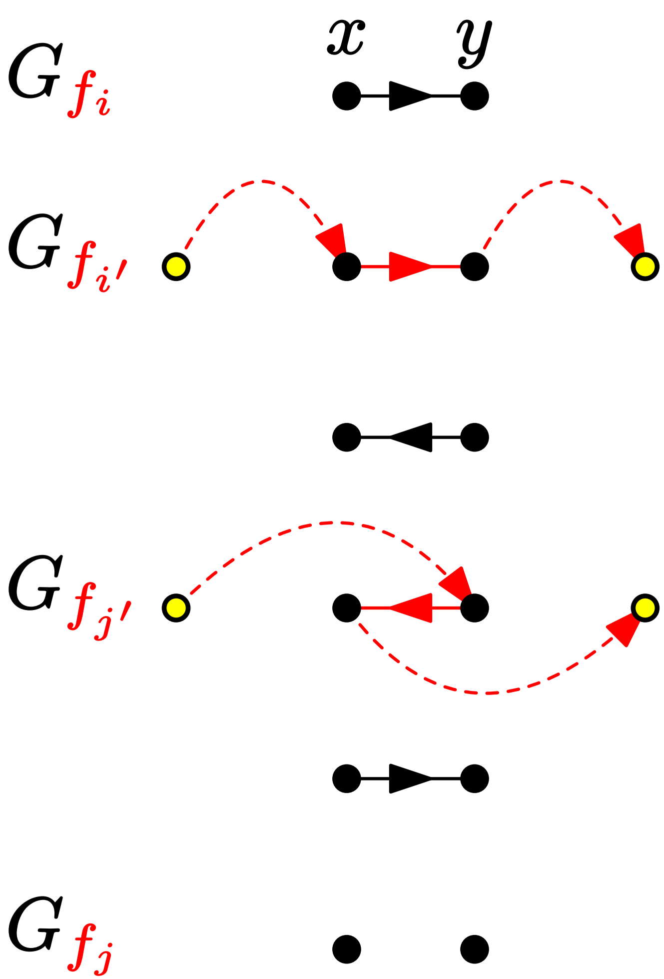


弧数の単調性 (2)：証明 (続 2)



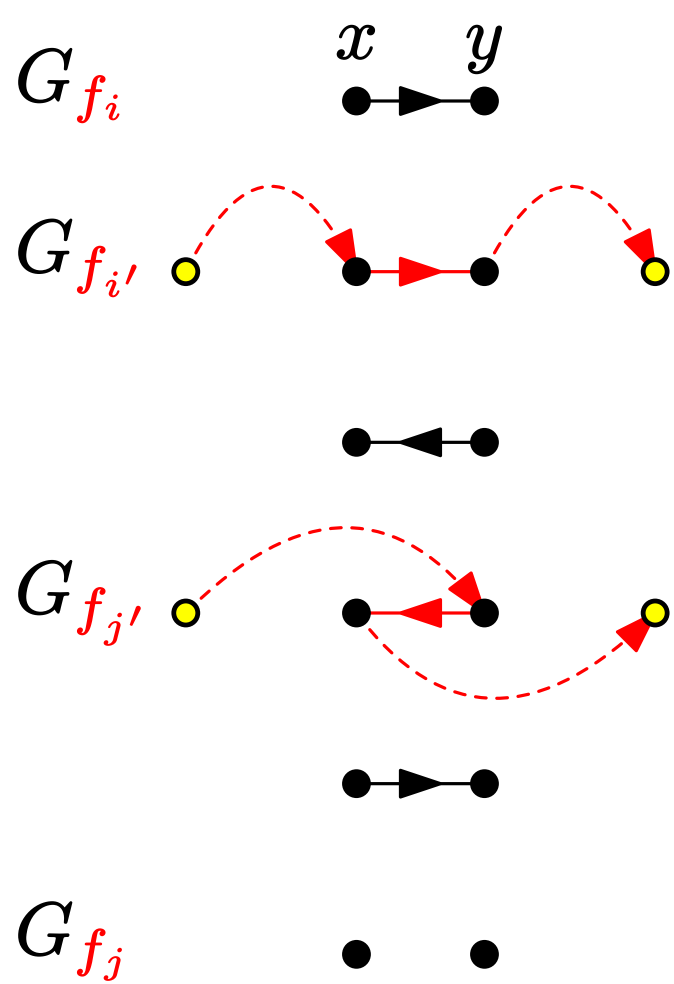
弧数の単調性 (2)：証明 (続 2)

- $i \le i' < j' < j$ で
  $P_{i'}$ が弧 xy を通り
  $P_{j'}$ が弧 yx を通るとする
- $d_i(t) = d_j(t)$ なので，
  $d_i(t) = d_{i'}(t) = d_{j'}(t) = d_j(t)$
- また，$d_{i'}(x) < d_{i'}(y)$



弧数の単調性 (2)：証明 (続 2)

- $i \leq i' < j' < j$ で
  $P_{i'}$ が弧 xy を通り
  $P_{j'}$ が弧 yx を通るとする
- $d_i(t) = d_j(t)$ なので，
  $d_i(t) = d_{i'}(t) = d_{j'}(t) = d_j(t)$
- また，$d_{i'}(x) < d_{i'}(y)$
- 一方で，「性質」より　$i = i', j = j', uv = yx$ として適用
  $d_{i'}(y) < d_{i'}(x)$
- これらは互いに矛盾 $\square$



性質：弧数増加の十分条件

Edmonds-Karp のアルゴリズムにおいて，
$i < j$，$d_i(t) = d_j(t)$，P_j が弧 uv を通る $\Rightarrow d_i(u) < d_i(v)$

Edmonds-Karp のアルゴリズム：まとめ

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの停止性

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
高々 $|V||A|$ 回の反復で停止する

$\therefore$ Edmonds-Karp のアルゴリズムは必ず停止する

最大 s-t 流の存在性

定理：最大流の存在性

任意のネットワーク (G, u) に対して，
最大 s-t 流は存在する

証明：Edmonds-Karp のアルゴリズムは必ず停止する

- $\therefore$ 出力は最大 s-t 流 $\square$

性質：増加道法と最大 s-t 流

増加道法が停止する $\Rightarrow$
出力 f は (G, u) に対する最大 s-t 流

定理：最大流最小カット定理

ある s-t 流 f，s-t カット S が存在し，次が成立

$$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$$

<u>証明</u>：最大 s-t 流 f を考える

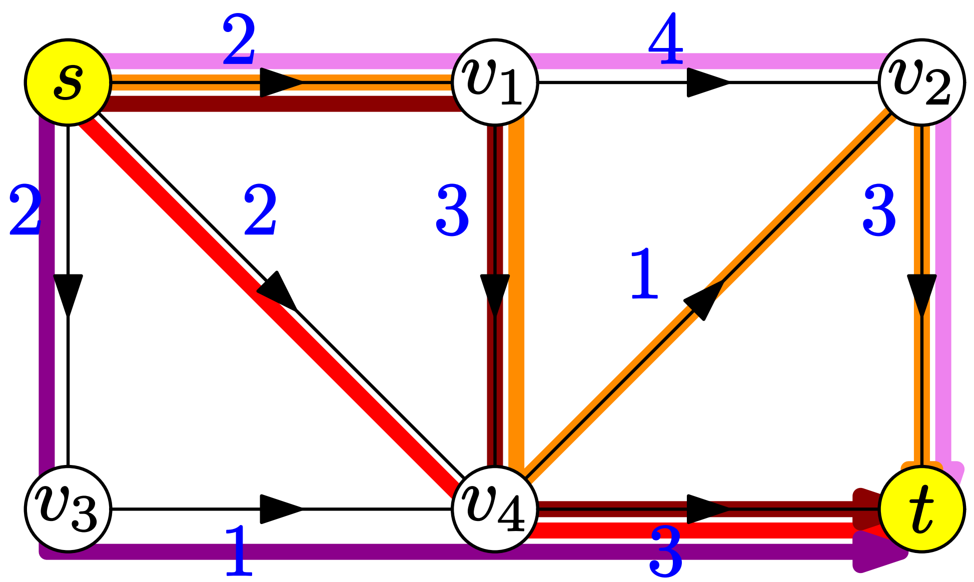
- 補助ネットワーク G_f から s-t カット S が得られ，$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ が成り立つ □

性質：増加道法と最大 s-t 流

増加道法が停止する $\Rightarrow$
出力 f は (G, u) に対する最大 s-t 流

本日の内容

1. Edmonds-Karp のアルゴリズム：概要
2. Edmonds-Karp のアルゴリズム：停止性
3. **Edmonds-Karp のアルゴリズム：計算量**



計算量解析に向けて

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの停止性

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
高々 $|V||A|$ 回の反復で停止する

$$\text{計算量} = \underbrace{(\text{反復回数})}_{O(|V||A|)} \times (\text{各反復の計算量})$$

各反復の計算量

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

各反復で行うこと

- 補助ネットワークの構成
- 弧数最小の増加道の発見
- 流の増加

各反復の計算量

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

各反復で行うこと

- 補助ネットワークの構成 $O(|A|)$
- 弧数最小の増加道の発見 $O(|A|)$ ← 幅優先探索
- 流の増加 $O(|A|)$

グラフは隣接リスト (標準的な方法) で表現されるものとする

計算量解析

アルゴリズム：Edmonds-Karp ('72)

- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. **弧の数が最小** の増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの停止性

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
高々 $|V||A|$ 回の反復で停止する

$$\text{計算量} = \underbrace{(\text{反復回数})}_{O(|V||A|)} \times \underbrace{(\text{各反復の計算量})}_{O(|A|)} = O(|V||A|^2)$$

性質：Edmonds-Karp のアルゴリズムの計算量

Edmonds-Karp のアルゴリズムは
$O(|V||A|^2)$ ステップで必ず停止する

組合せ最適化，離散アルゴリズムの文献では
$n = |V|$， $m = |A|$ として
$O(nm^2)$ と書かれることも多い

$|V|$ だけで表すと，$|A| = O(|V|^2)$ なので，
$O(|V|^5)$ となる

最大流問題　増加道法　停止しないことがある

工夫　**弧数が最小** の増加道を選ぶ

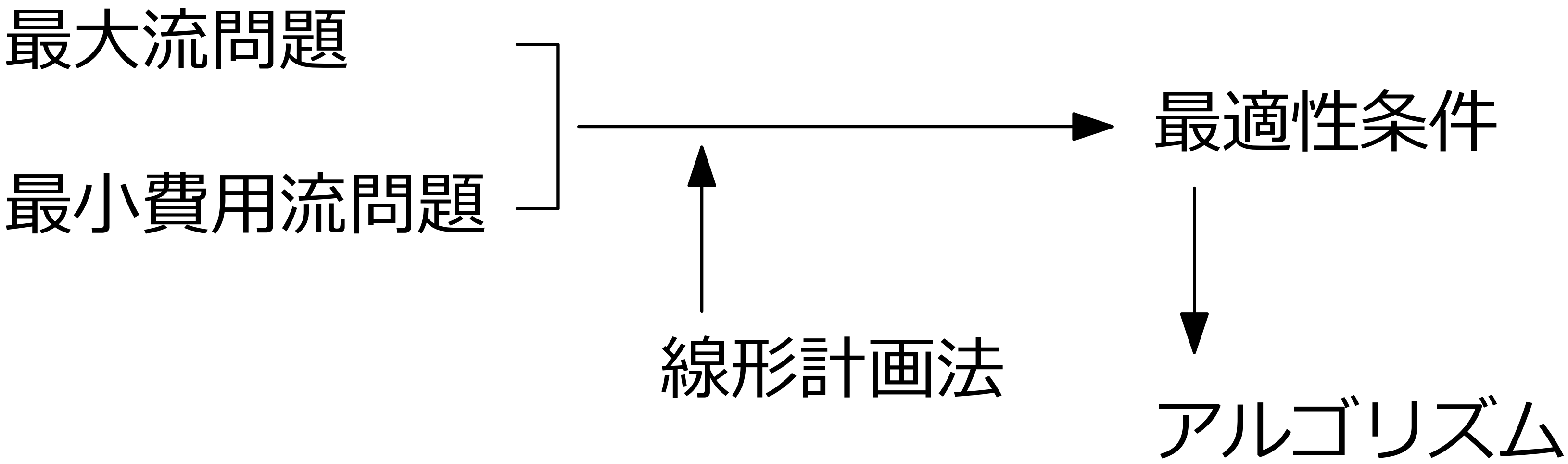
Edmonds-Karp のアルゴリズム

Edmonds-Karp のアルゴリズム：まとめ

Edmonds-Karp のアルゴリズムは

- 必ず停止する
- 停止するまでの計算ステップ数は $O(|V||A|^2)$ である

次回予告



次回の予告

増加道法に対する別の工夫
- 容量スケーリング

一般的に「スケーリング法」という重要な技法の紹介