離散最適化基礎論

第 4 回

最大流問題：線形計画問題として

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 10 月 31 日

最終更新：2023 年 11 月 8 日　14:02

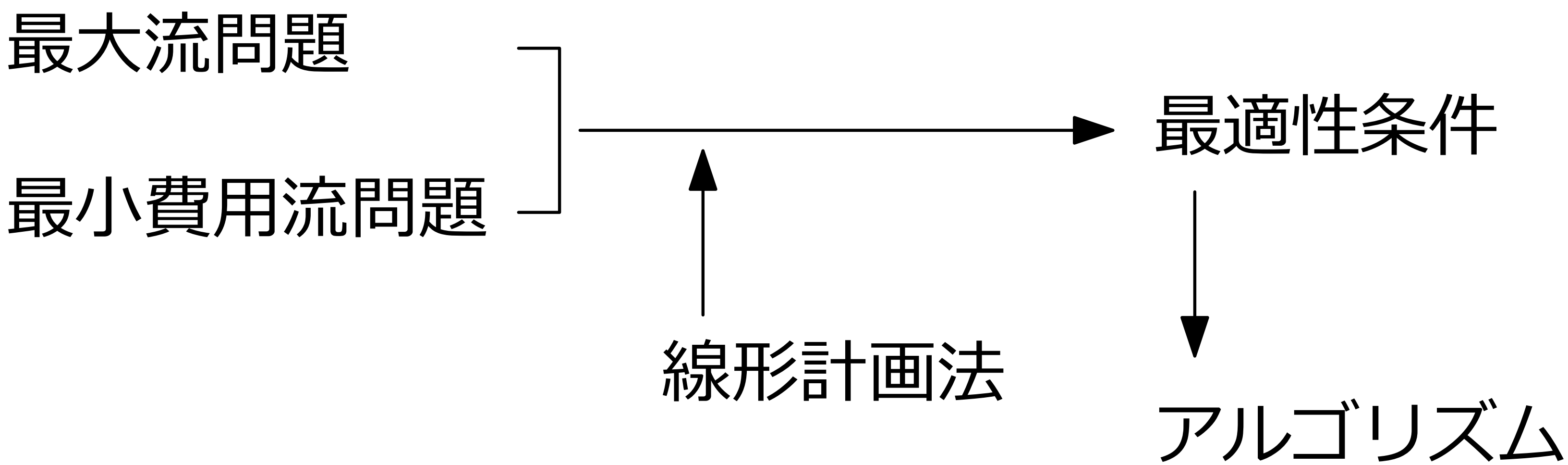
スケジュール (前半)

1.	最大流と最小費用流：定義	(10/3)
2.	最大流問題：増加道法	(10/10)
＊	休み	(10/17)
3.	線形計画法の復習	(10/24)
4.	最大流問題：線形計画問題として	(10/31)
5.	最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム	(11/7)
6.	最大流問題：容量スケーリング法	(11/14)
7.	最大流問題：Push-Relabel 法 (概要)	(11/21)
8.	最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価)	(11/28)

スケジュール(後半)

∗	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：線形計画問題として	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
∗	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
∗	休み	(1/30)

本日の目標



本日の目標

最大流問題について，次を行う

- 線形計画法を使って，問題を記述する
- 双対定理・相補性定理を使って，問題の性質を調べる

[復習] 線形計画法

主問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \\ \text{s.t.}\quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\ \text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

与えられるものは
(定数)

$$\boldsymbol{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \boldsymbol{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$$
$$A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}, A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2},$$
$$A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}, A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$$

決めるものは
(変数)

$$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$
$$\boldsymbol{y}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$$

[復習] 双対定理

主問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \\ \text{s.t.}\quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\ \text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

<u>弱双対定理</u>

$\forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$：主問題の許容解，$\forall\, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$：双対問題の許容解

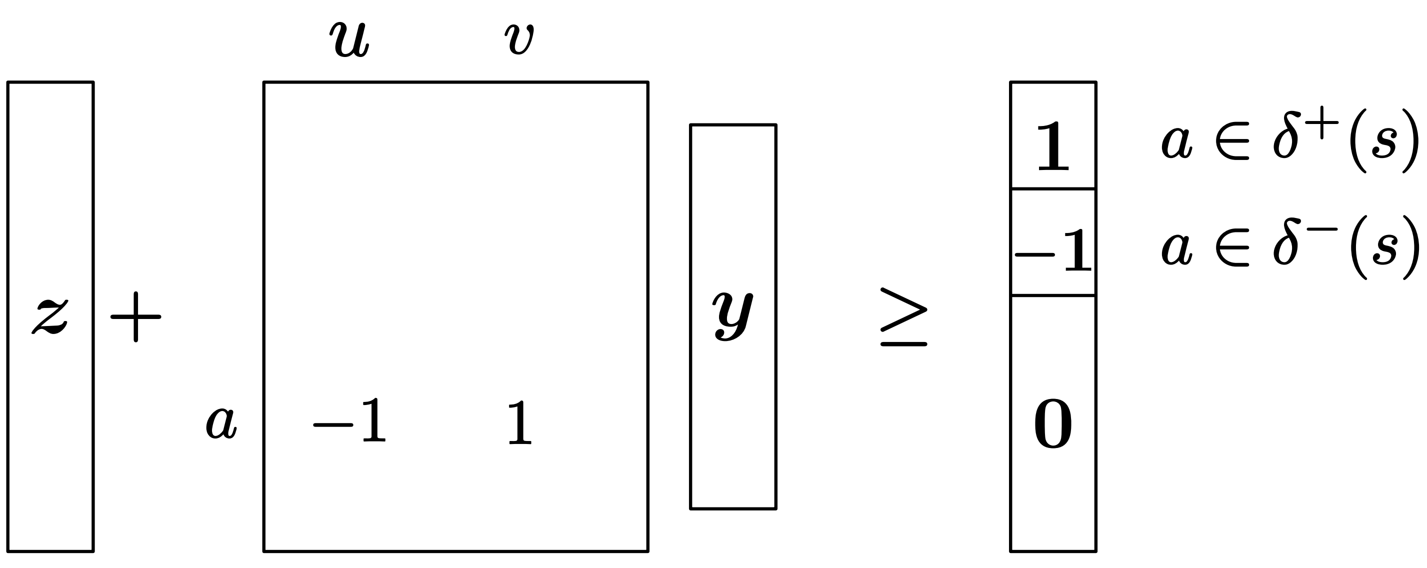
$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2$$

<u>強双対定理</u> 主問題，双対問題に許容解がある $\Rightarrow$

$\exists\, \boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*$：主問題の許容解，$\exists\, \boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*$：双対問題の許容解

$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2^* = \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^* + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2^*$$

1. **最大流問題と線形計画法**
2. 最大流問題と双対定理
3. 双対問題と s-t カット



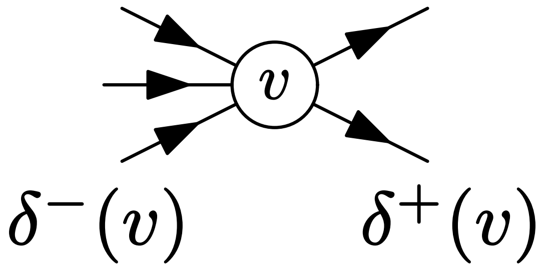
[復習] 流：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流 (flow)

ネットワーク (G, u) における s-t **流** とは
次の 2 条件を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して (容量制約)
$$0 \le f(a) \le u(a)$$
2. 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して (流量保存制約)
$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

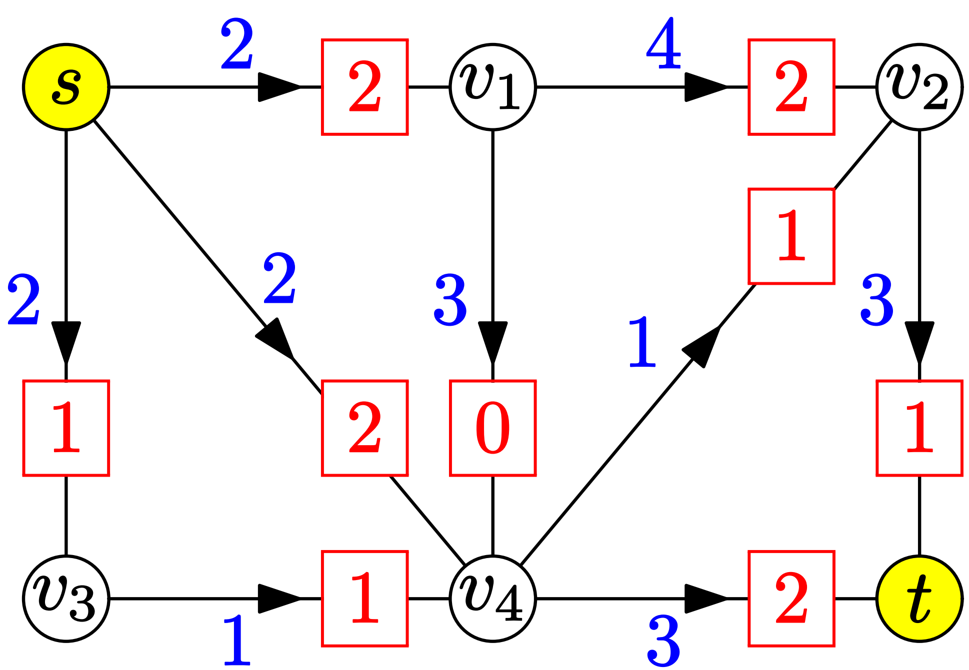


<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流の値 (value)

s-t 流 f の **値** とは次の量のこと

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$



$\mathrm{val}(f) = (2 + 1 + 2) - 0 = 5$

[復習] 最大流：定義

<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：最大流 (maximum flow)

f がネットワーク (G, u) の **最大 s-t 流** であるとは，
次を満たすこと

任意の s-t 流 f' に対して，$\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$

$\boxed{\text{注}}$ 最大 s-t 流が存在することは 当然ではない

定義：最大流問題 (maximum flow problem)

入力

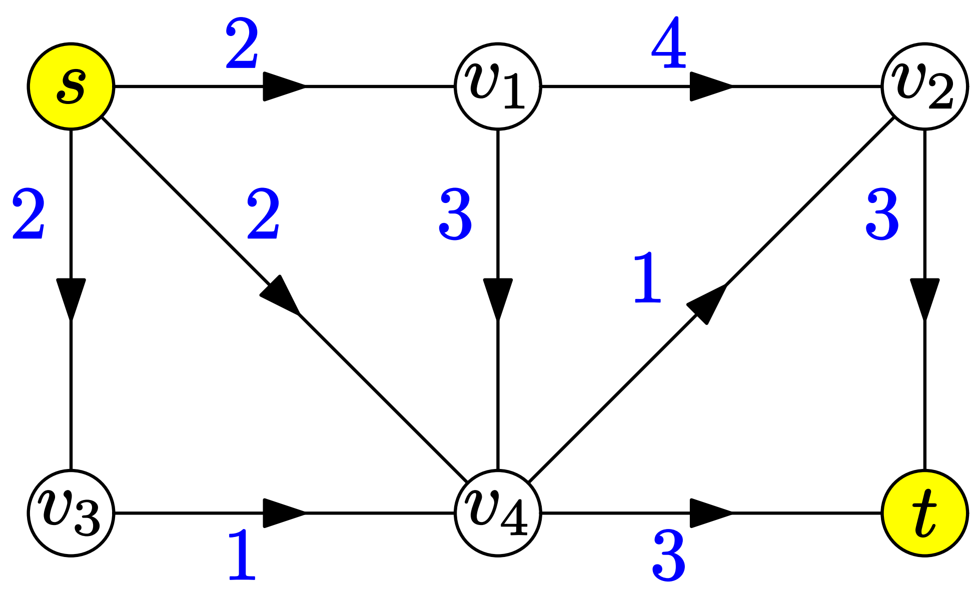
- 有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$
- 弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$

出力

- ネットワーク (G, u) に対する最大 s-t 流 f^*

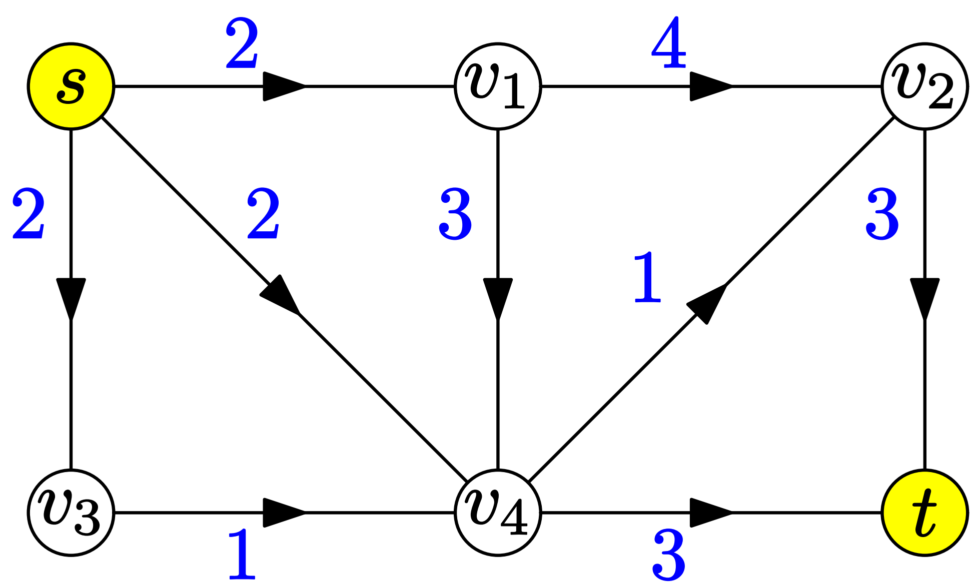
最大流問題：線形計画問題として (例)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4} \\
\text{subject to} & 0 \le f_{sv_1} \le 2, 0 \le f_{sv_3} \le 2, 0 \le f_{sv_4} \le 2, \\
& 0 \le f_{v_1v_2} \le 4, 0 \le f_{v_1v_4} \le 3, 0 \le f_{v_2t} \le 3, \\
& 0 \le f_{v_3v_4} \le 1, 0 \le f_{v_4v_2} \le 1, 0 \le f_{v_4t} \le 3, \\
& f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0, \\
& f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0, \\
& f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0, \\
& f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0
\end{array}
$$



最大流問題：線形計画問題として (例)

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boxed{f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4}} = \mathrm{val}(f) \\
\text{subject to} \quad & 0 \le f_{sv_1} \le 2, 0 \le f_{sv_3} \le 2, 0 \le f_{sv_4} \le 2, \\
& 0 \le f_{v_1v_2} \le 4, 0 \le f_{v_1v_4} \le 3, 0 \le f_{v_2t} \le 3, \\
& 0 \le f_{v_3v_4} \le 1, 0 \le f_{v_4v_2} \le 1, 0 \le f_{v_4t} \le 3, \\
& f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0, \\
& f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0, \\
& f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0, \\
& f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0
\end{aligned}
$$

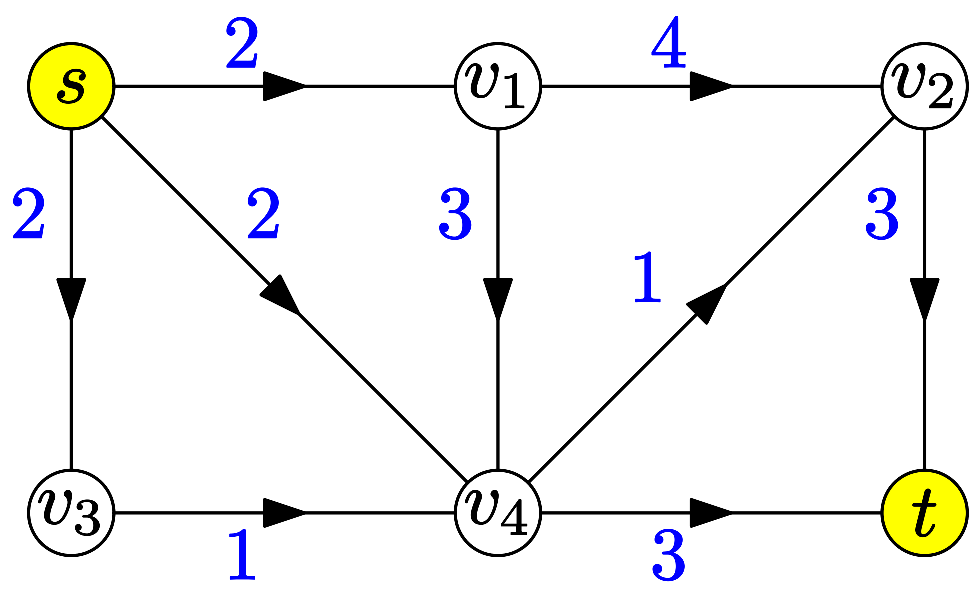


maximize $f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4}$

容量制約

subject to

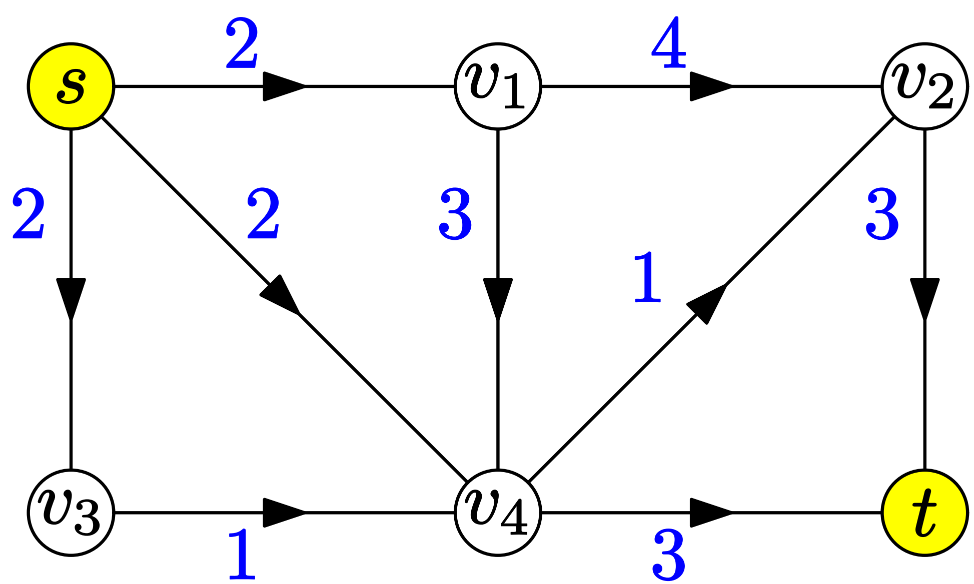
$$0 \le f_{sv_1} \le 2, 0 \le f_{sv_3} \le 2, 0 \le f_{sv_4} \le 2,$$
$$0 \le f_{v_1v_2} \le 4, 0 \le f_{v_1v_4} \le 3, 0 \le f_{v_2t} \le 3,$$
$$0 \le f_{v_3v_4} \le 1, 0 \le f_{v_4v_2} \le 1, 0 \le f_{v_4t} \le 3,$$
$$f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0,$$
$$f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0,$$
$$f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0,$$
$$f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0$$



最大流問題：線形計画問題として (例)

maximize $\quad f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4}$

subject to
$$0 \le f_{sv_1} \le 2, 0 \le f_{sv_3} \le 2, 0 \le f_{sv_4} \le 2,$$
$$0 \le f_{v_1v_2} \le 4, 0 \le f_{v_1v_4} \le 3, 0 \le f_{v_2t} \le 3,$$
$$0 \le f_{v_3v_4} \le 1, 0 \le f_{v_4v_2} \le 1, 0 \le f_{v_4t} \le 3,$$
$$f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0,$$
$$f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0,$$
$$f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0,$$
$$f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0$$



流量保存制約

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a & \\
\text{subject to} & f_a \leq u_a & \forall\, a \in A, \\
& \displaystyle\sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0 & \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

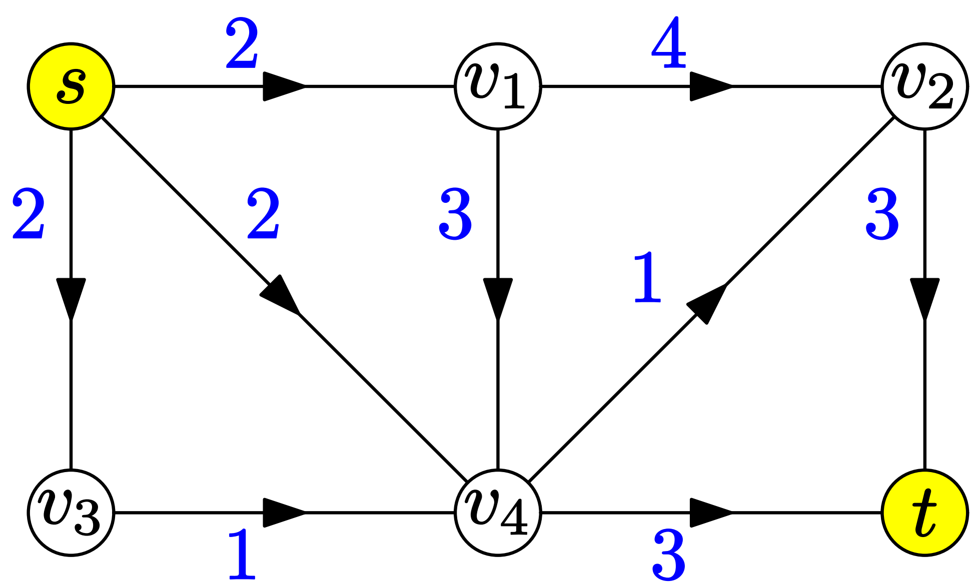
最大流問題：変数

変数：$\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^A \quad \longleftrightarrow \quad f\colon A \to \mathbb{R}$

f_{sv_1} f_{sv_3} f_{sv_4}

$f_{v_1v_2}$ $f_{v_1v_4}$ f_{v_2t}

$f_{v_3v_4}$ $f_{v_4v_2}$ f_{v_4t}



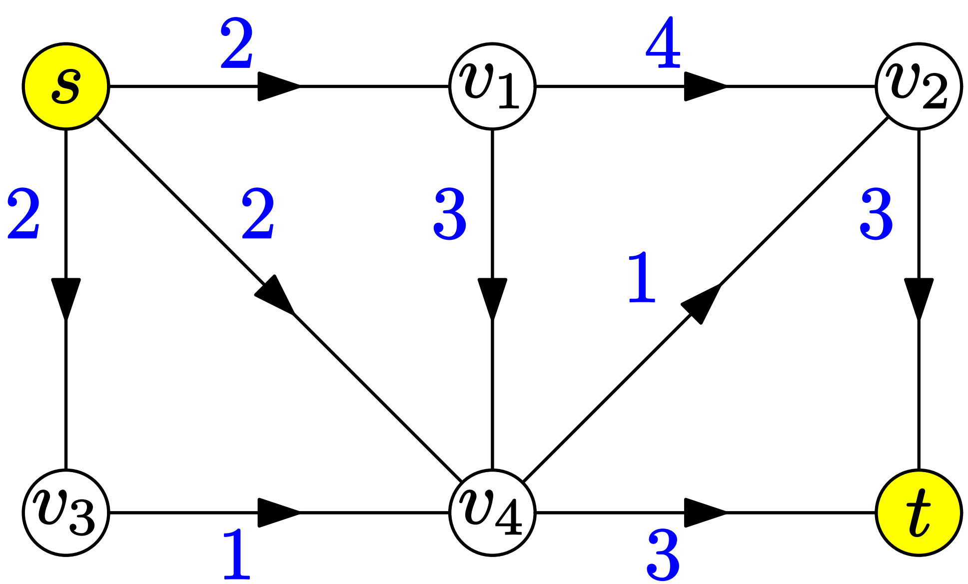
最大流問題：変数

変数：$\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^A \quad \longleftrightarrow \quad f\colon A \to \mathbb{R}$

$f_{sv_1} \quad f_{sv_3} \quad f_{sv_4}$

$f_{v_1v_2} \quad f_{v_1v_4} \quad f_{v_2t}$

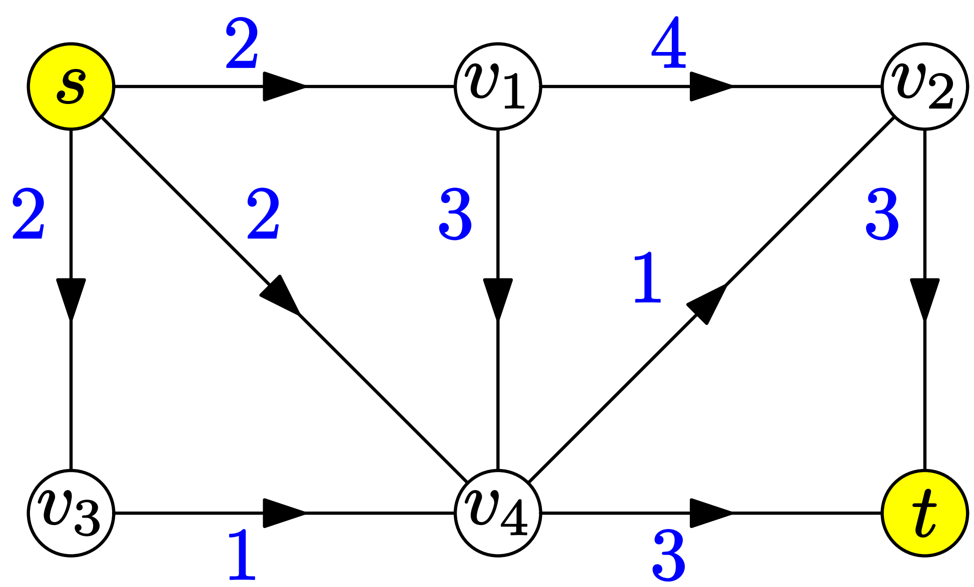
$f_{v_3v_4} \quad f_{v_4v_2} \quad f_{v_4t}$



$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t} \end{bmatrix}$$

$$\text{maximize} \quad \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \longleftrightarrow \text{val}(f) \text{ の最大化}$$

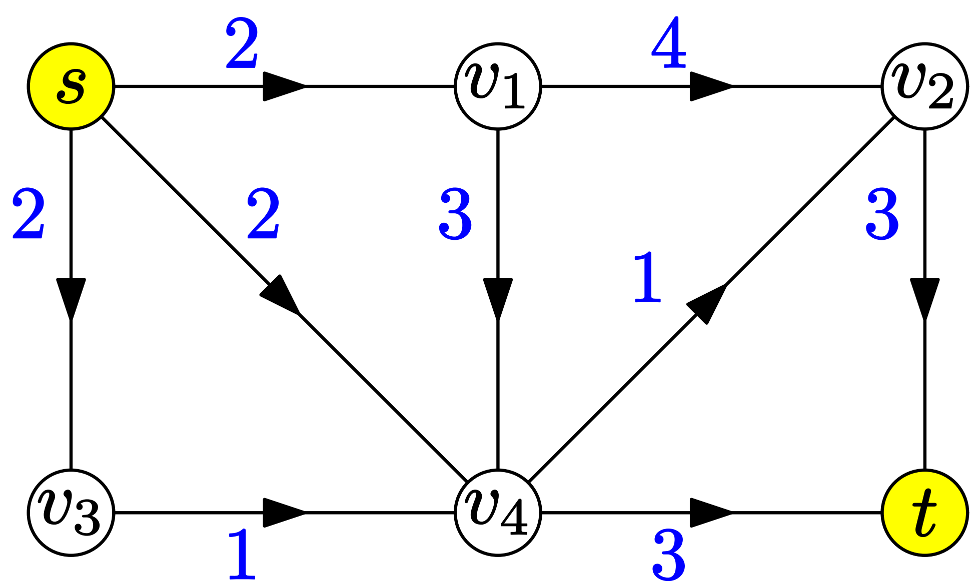
$$f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4}$$



最大流問題：目的関数

$$\text{maximize} \quad \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \quad \longleftrightarrow \quad \text{val}(f) \text{ の最大化}$$

$$f_{sv_1} + f_{sv_3} + f_{sv_4}$$

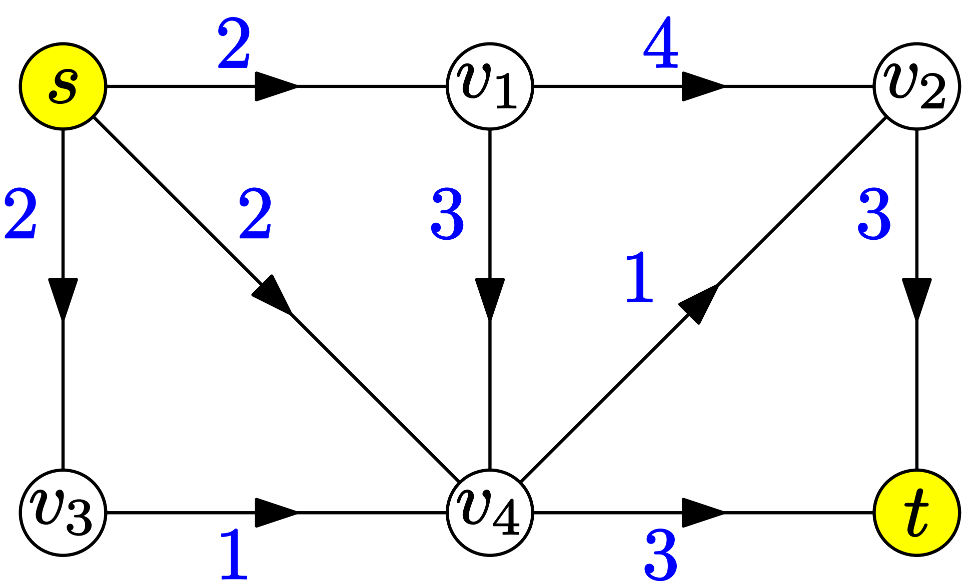


$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t} \end{bmatrix}$$

最大流問題：容量制約

任意の弧 $a \in A$ に対して
$$f_a \le u_a,\ f_a \ge 0$$
$\longleftrightarrow$ 容量制約

$u(a)$ の略記



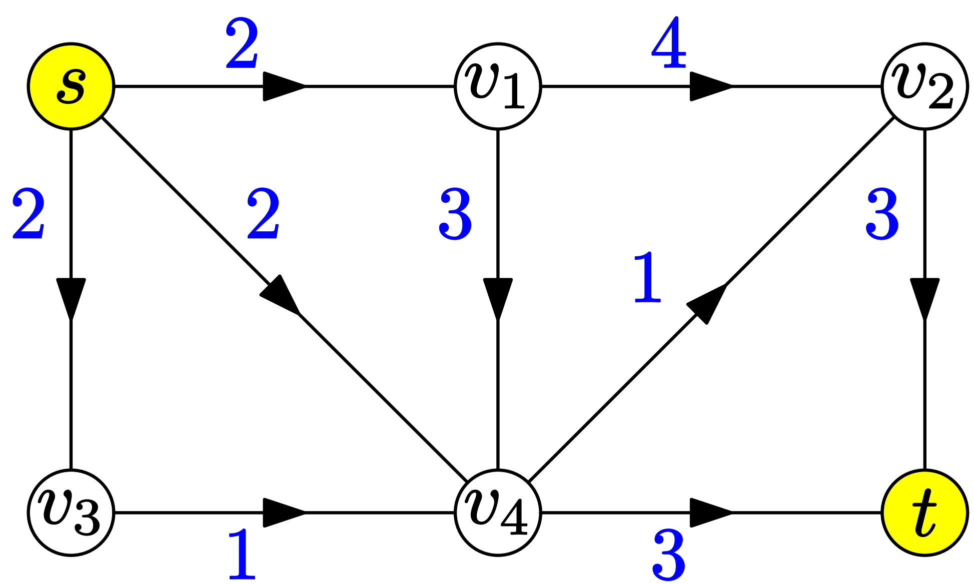
$$\begin{bmatrix} f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0$$

⟷ 流量保存制約

$$f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0$$
$$f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0$$
$$f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0$$
$$f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0$$



最大流問題：流量保存制約 (続)

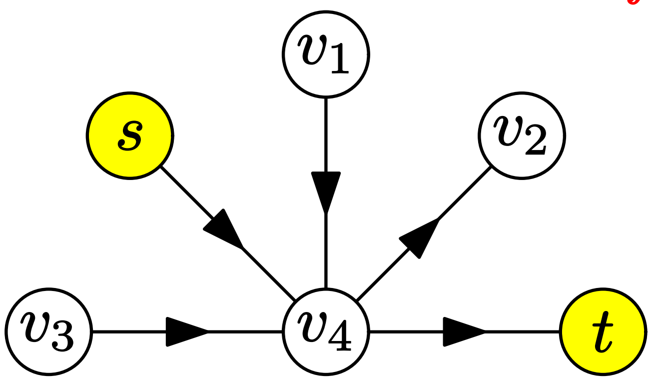
$$f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} = 0$$
$$f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} = 0$$
$$f_{sv_3} - f_{v_3v_4} = 0$$
$$f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccccccc} sv_1 & sv_3 & sv_4 & v_1v_2 & v_1v_4 & v_2t & v_3v_4 & v_4v_2 & v_4t \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
f_{sv_1} - f_{v_1v_2} - f_{v_1v_4} &= 0 \\
f_{v_1v_2} + f_{v_4v_2} - f_{v_2t} &= 0 \\
f_{sv_3} - f_{v_3v_4} &= 0 \\
f_{sv_4} + f_{v_1v_4} + f_{v_3v_4} - f_{v_4v_2} - f_{v_4t} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$



$$
\begin{array}{c}
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\boxed{0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1}
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccccc}
sv_1 & sv_3 & sv_4 & v_1v_2 & v_1v_4 & v_2t & v_3v_4 & v_4v_2 & v_4t
\end{array}
\end{array}
\begin{bmatrix}
f_{sv_1} \\ f_{sv_3} \\ f_{sv_4} \\ f_{v_1v_2} \\ f_{v_1v_4} \\ f_{v_2t} \\ f_{v_3v_4} \\ f_{v_4v_2} \\ f_{v_4t}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

最大流問題：線形計画問題として (再)

maximize $\displaystyle\sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a$

subject to $f_a \le u_a \qquad \forall\, a \in A,$

$$\sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \qquad \forall\, v \in V - \{s,t\},$$

$$f_a \ge 0 \qquad \forall\, a \in A$$

最大流問題：ベクトルと行列で

max. $\displaystyle\sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a$

s.t. $f_a \leq u_a \qquad \forall\, a \in A,$

$\displaystyle\sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \qquad \forall\, v \in V - \{s,t\},$

$f_a \geq 0 \qquad \forall\, a \in A$

max. $\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2$

s.t. $A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}_1,$

$A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2,$

$\boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}$

最大流問題：ベクトルと行列で

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \leq u_a && \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \\
& && \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \geq 0 && \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 \\
\text{s.t.} \quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0, \ (c_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \ (b_1)_a = u_a, \ A_{11} = I
$$

$$
(b_2)_v = 0, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

1. 最大流問題と線形計画法
2. **最大流問題と双対定理**
3. 双対問題と s-t カット

$$\boldsymbol{z} + \begin{array}{c} \\ a \end{array} \begin{array}{cc} u & v \\ \left[\begin{array}{cc} \\ -1 & 1 \\ \\ \end{array}\right. & \left.\right] \end{array} \boldsymbol{y} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} a \in \delta^+(s) \\ a \in \delta^-(s) \\ \\ \end{array}$$

最大流問題の双対問題：目標

maximize $\displaystyle\sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a$

subject to $f_a \leq u_a \quad \forall\, a \in A,$

$$\sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \quad \forall\, v \in V - \{s,t\},$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A$$

目標

この線形計画問題の双対問題を書き下す

最大流問題の双対問題：準備

主問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \le \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{c}_1, \\
& A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2, \\
& \boldsymbol{y}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
x_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0, \quad (c_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (b_1)_a = u_a, \quad A_{11} = I
$$

$$
(b_2)_v = 0, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

最大流問題の双対問題：準備

主問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \cancel{\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2} \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{12}\boldsymbol{x}_2} \le \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{22}\boldsymbol{x}_2} = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{c}_1, \\
& \cancel{A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2,} \\
& \boldsymbol{y}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f},\ n_2 = 0,\quad (\boldsymbol{c}_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (\boldsymbol{b}_1)_a = u_a,\quad A_{11} = I
$$

$$
(\boldsymbol{b}_2)_v = 0, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

最大流問題の双対問題：準備

主問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2} \\
\text{s.t.}\ & A_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{12}\boldsymbol{x}_2} \le \boldsymbol{b}_1, \\
& A_{21}\boldsymbol{x}_1 + \cancel{A_{22}\boldsymbol{x}_2} = \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\ & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.}\ & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \ge \boldsymbol{c}_1, \\
& \cancel{A_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2,} \\
& \boldsymbol{y}_1 \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

あとの都合上，$(y_1)_a = z_a, (y_2)_v = y_v$ と書くことにする

$$
\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}_2 = 0,\ (c_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}\ (b_1)_a = u_a,\ A_{11} = I
$$

$$
(b_2)_v = 0, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

最大流問題の双対問題 (1)

$$\text{min.} \quad \sum_{a \in A} u_a z_a$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \\ \text{s.t.} \quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

あとの都合上，$(y_1)_a = z_a, (y_2)_v = y_v$ と書くことにする

$$x_1 = \boldsymbol{f}, n_2 = 0, \quad (c_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (b_1)_a = u_a, \quad A_{11} = I$$

$$(b_2)_v = 0, \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

最大流問題の双対問題 (2)

双対問題

$$\min. \sum_{a\in A} {\color{blue}u_a} z_a \qquad \textcircled{u} \xrightarrow{a} \textcircled{v}$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \\
\text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\
& \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{z} + \begin{array}{c|cc|} & u & v \\ a & -1 & 1 \end{array}\ \boldsymbol{y} \geq \begin{array}{|c|l} \boldsymbol{1} & a \in \delta^+(s) \\ \boldsymbol{-1} & a \in \delta^-(s) \\ \boldsymbol{0} & \end{array}
$$

あとの都合上，$(y_1)_a = z_a, (y_2)_v = y_v$ と書くことにする

$$
A_{11} = I \qquad (A_{21})_{v,a} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^-(v)), \\ -1 & (a \in \delta^+(v)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (c_1)_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(s)), \\ -1 & (a \in \delta^-(s)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

最大流問題の双対問題 (2)

$$\min.\ \sum_{a \in A} u_a z_a$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \\ \text{s.t.}\quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & z_{uv} - y_u + y_v \geq 0 && (\forall\, uv \in A, u \notin \{s,t\}, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{sv} + y_v \geq 1 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{vs} - y_v \geq -1 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{tv} + y_v \geq 0 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{vt} - y_v \geq 0 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{st} \geq 1, && \longleftarrow\ st \in A \text{ のときのみ書く} \\ & z_{ts} \geq -1, && \longleftarrow\ ts \in A \text{ のときのみ書く} \end{aligned}$$

最大流問題の双対問題 (2)

$$\text{min.} \quad \sum_{a \in A} u_a z_a$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \\ \text{s.t.} \quad & A_{11}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & z_{uv} - y_u + y_v \geq 0 && (\forall\, uv \in A, u \notin \{s,t\}, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{sv} + y_v \geq 1 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{vs} - y_v \geq -1 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{tv} + y_v \geq 0 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{vt} - y_v \geq 0 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}), \\ & z_{st} \geq 1, && \longleftarrow \ st \in A \text{ のときのみ書く} \\ & z_{ts} \geq -1, && \longleftarrow \ ts \in A \text{ のときのみ書く} \\ & z_a \geq 0 && (\forall\, a \in A) \end{aligned}$$

最大流問題の双対問題 (3)

min. $\displaystyle\sum_{a \in A} u_a z_a$

s.t.

$$
\begin{aligned}
z_{uv} &\geq y_u - y_v && (\forall\, uv \in A, u \notin \{s,t\}, v \notin \{s,t\}),\\
z_{sv} &\geq 1 - y_v && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}),\\
z_{vs} &\geq y_v - 1 && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}),\\
z_{tv} &\geq 0 - y_v && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}),\\
z_{vt} &\geq 0 + y_v && (\forall\, v \in V, v \notin \{s,t\}),\\
z_{st} &\geq 1 - 0, && \longleftarrow\ st \in A \text{ のときのみ書く}\\
z_{ts} &\geq 0 - 1, && \longleftarrow\ ts \in A \text{ のときのみ書く}\\
z_a &\geq 0 && (\forall\, a \in A)
\end{aligned}
$$

最大流問題の双対問題 (4)

$$\text{min.}\quad \sum_{a\in A} u_a z_a$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & z_{uv} \geq y_u - y_v && (\forall\, uv \in A),\\
& y_s = 1, y_t = 0, && \\
& z_a \geq 0 && (\forall\, a \in A)
\end{aligned}$$

最大流問題と双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \le u_a \quad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0 \\
& \qquad\qquad \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

最大流問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \ge y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題

最大流問題と双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \le u_a \quad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0 \\
& \qquad \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

最大流問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \ge y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題

次の f は最大流問題の許容解

$f_a = 0$ $(\forall\, a \in A)$

最大流問題と双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a \\ \text{s.t.} & f_a \le u_a \quad \forall\, a \in A, \\ & \displaystyle\sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \\ & \qquad \forall\, v \in V - \{s,t\}, \\ & f_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A \end{array}$$

最大流問題

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \displaystyle\sum_{a\in A} u_a z_a & \\ \text{s.t.} & z_{uv} \ge y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, & \\ & z_a \ge 0 & \forall\, a \in A \end{array}$$

双対問題

次の f は最大流問題の許容解

$f_a = 0\ (\forall\, a \in A)$

双対問題に許容解はあるか？

[復習] 強双対定理

主問題と双対問題に許容解が存在 $\Rightarrow$ 両者に最適解が存在

双対問題と s-t カット

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

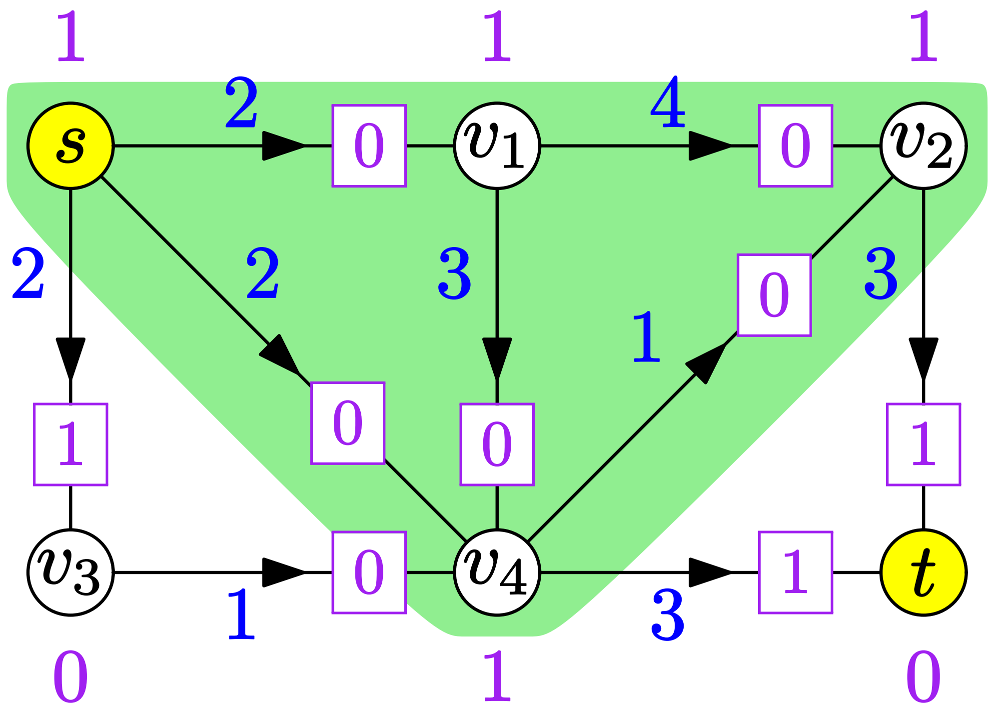
性質：s-t カットは双対問題の許容解

次のようにして作られる y, z は双対問題の許容解

- 任意の s-t カット $S \subseteq V$ を考える $(s \in S, t \notin S)$
- このとき，任意の $v \in V$，任意の $a \in A$ に対して

$$
y_v = \begin{cases} 1 & (v \in S), \\ 0 & (v \notin S), \end{cases} \qquad z_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(S)), \\ 0 & (a \notin \delta^+(S)) \end{cases}
$$

双対問題と s-t カット



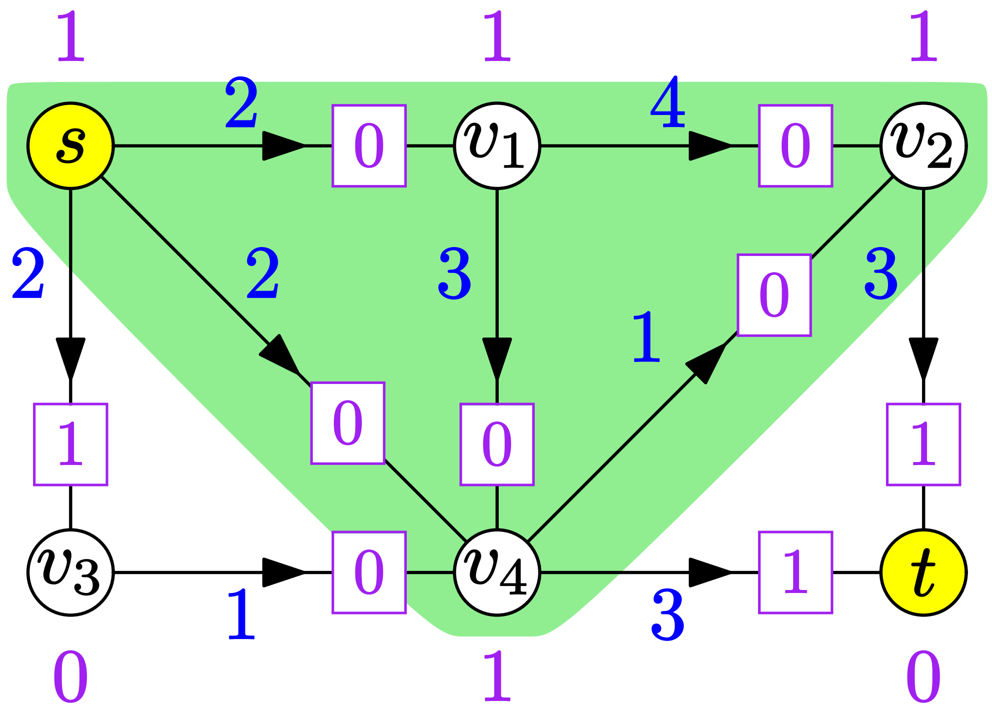
$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

性質：s-t カットは双対問題の許容解

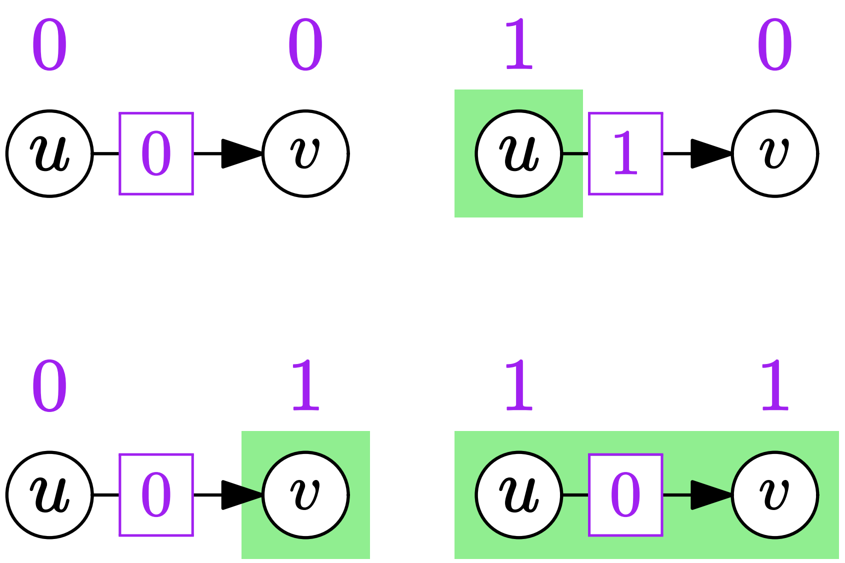
次のようにして作られる y, z は双対問題の許容解

- 任意の s-t カット $S \subseteq V$ を考える ($s \in S, t \notin S$)
- このとき，任意の $v \in V$，任意の $a \in A$ に対して

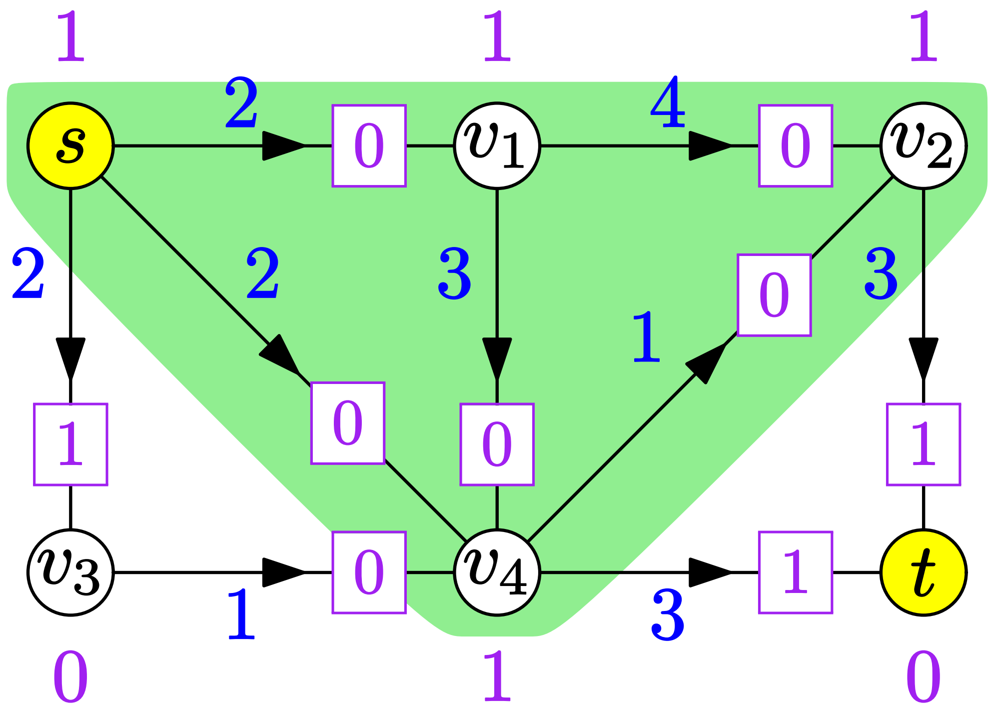
$$y_v = \begin{cases} 1 & (v \in S), \\ 0 & (v \notin S), \end{cases} \qquad z_a = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(S)), \\ 0 & (a \notin \delta^+(S)) \end{cases}$$



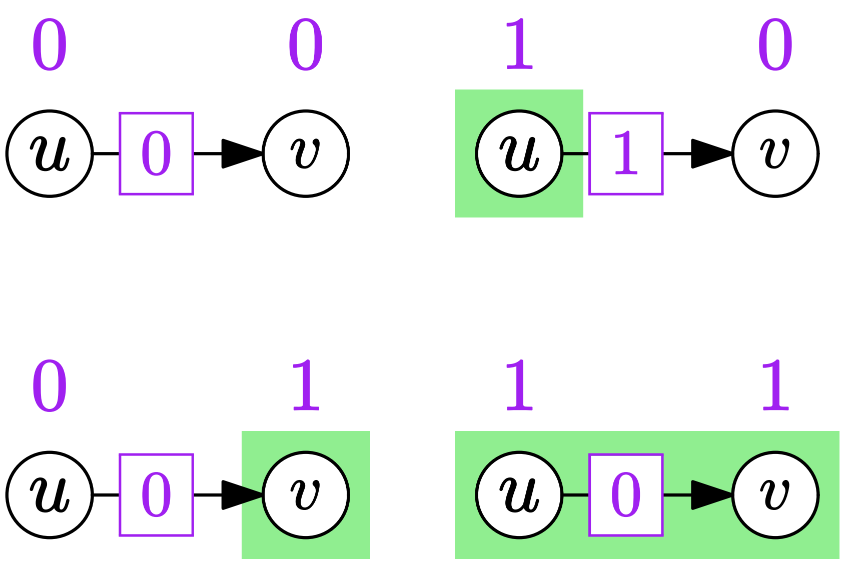
$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.}\quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \qquad\qquad\quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$



双対問題と s-t カット：証明の考え方

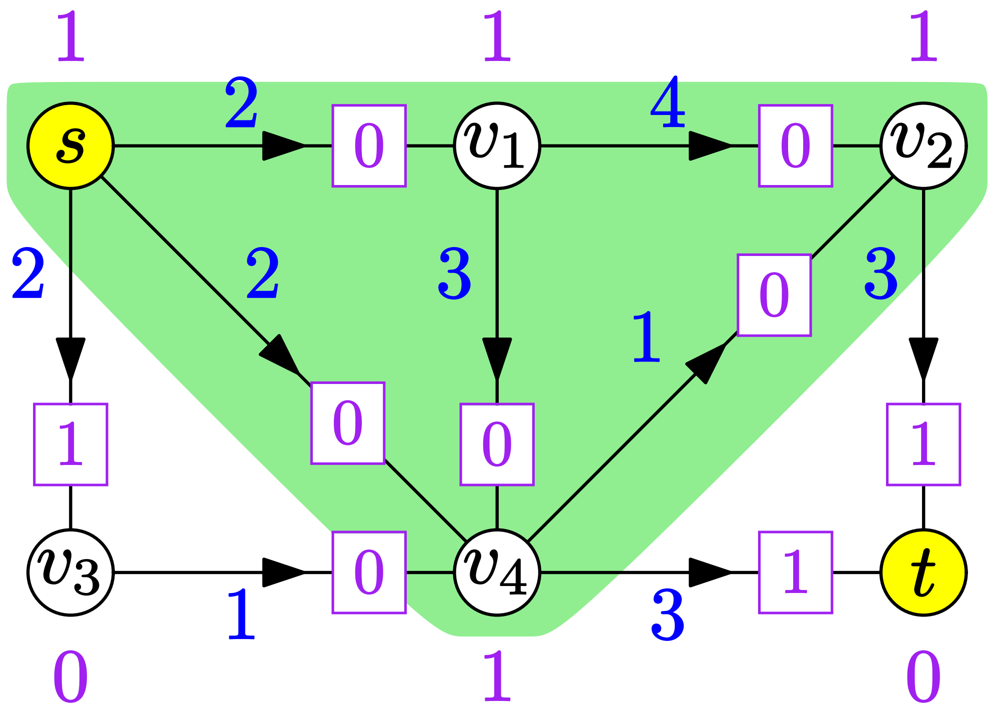


$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

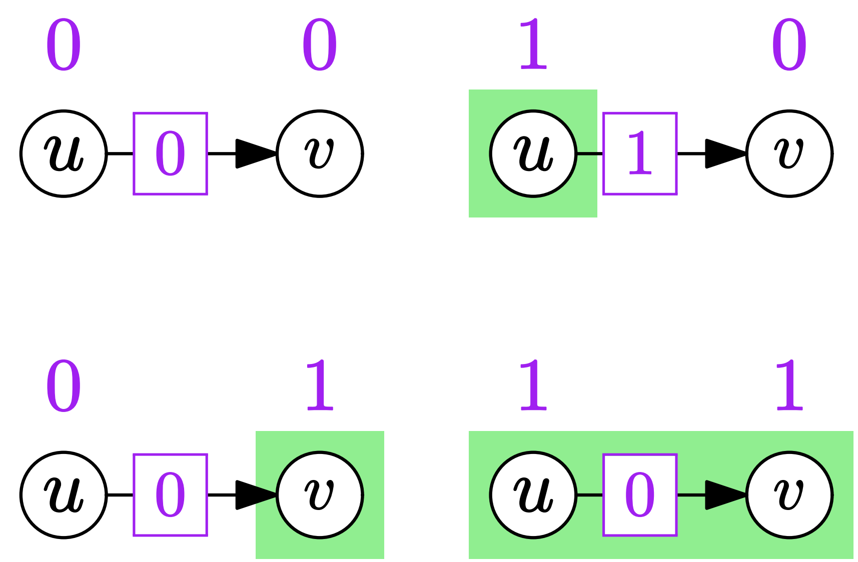


これを書き下せば証明になる

双対問題と s-t カット：証明の考え方



$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a\in A} u_a z_a & \\
\text{s.t.} & z_{uv} \ge y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, & \\
& z_a \ge 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$



特に，このとき，

$$\sum_{a\in A} u_a z_a = \mathsf{cap}(S)$$

これを書き下せば証明になる

最大流問題と双対問題：続

$$\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \leq u_a \qquad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0 \\
& \qquad\qquad \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \geq 0 \qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}$$

最大流問題

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \qquad \forall\, a \in A
\end{aligned}$$

双対問題

最大流問題に許容解はある

双対問題に許容解はある

したがって，強双対定理より

両者に最適解が存在 (特に，最大 s-t 流は存在)

1. 最大流問題と線形計画法
2. 最大流問題と双対定理
3. **双対問題と s-t カット**

$$\boldsymbol{z} + \begin{array}{c} \\ a \end{array}\!\!\begin{array}{cc} u & v \\ \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array} \boldsymbol{y} \geq \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] & \begin{array}{l} a \in \delta^{+}(s) \\ a \in \delta^{-}(s) \\ \\ \end{array} \end{array}$$

最大流問題の双対問題

最大流問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(s)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \le u_a \quad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a = 0 \\
& \qquad \forall\, v \in V - \{s, t\}, \\
& f_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題

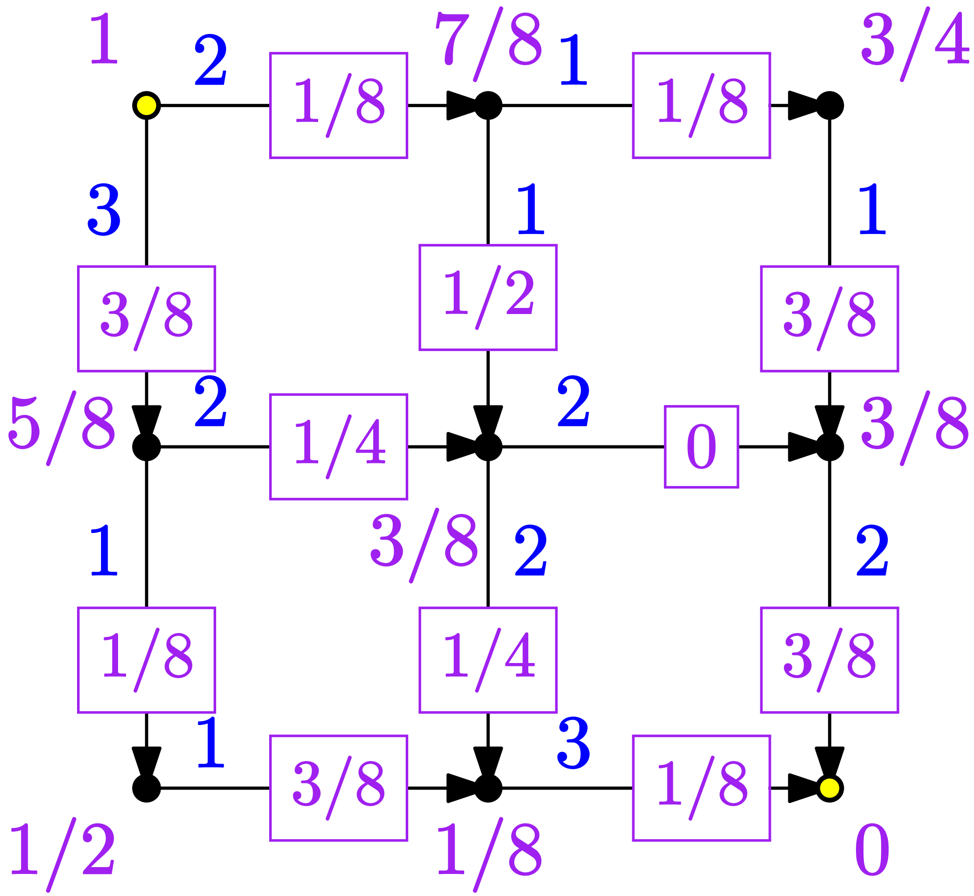
$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \ge y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

疑問

最大流問題の双対問題は 何を求めているのか？

ネタばれ：容量が最小の s-t カットを求めている

双対問題の最適解：例 (1)

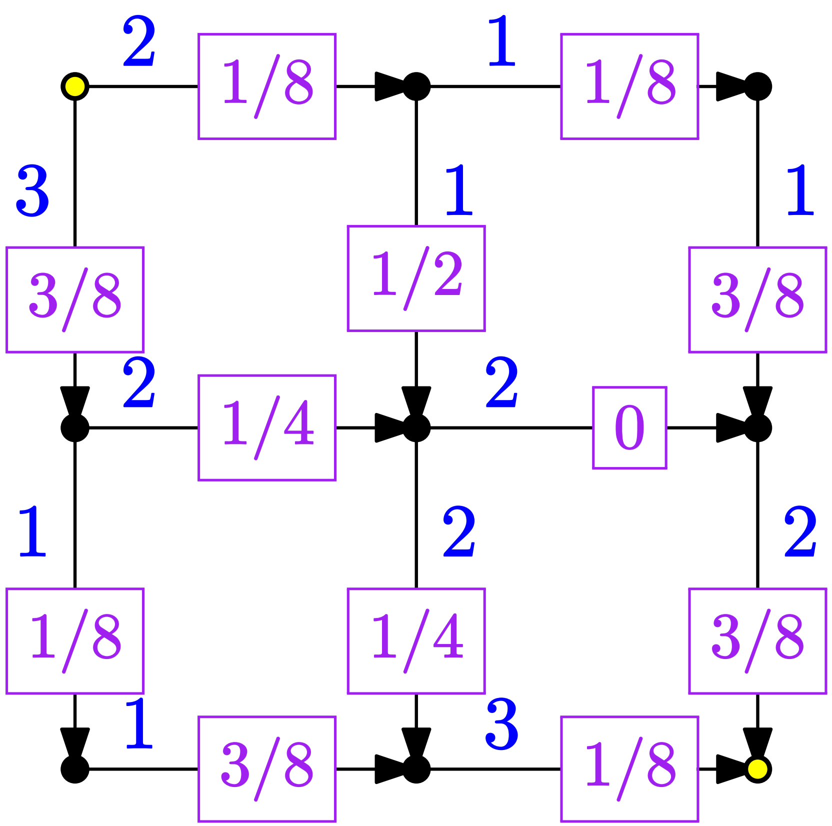


双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

双対問題の最適解 (の１つ)

双対問題の最適解：例 (1)



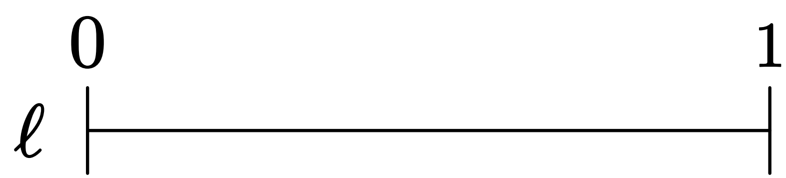
双対問題

$$\min. \sum_{a \in A} u_a z_a$$

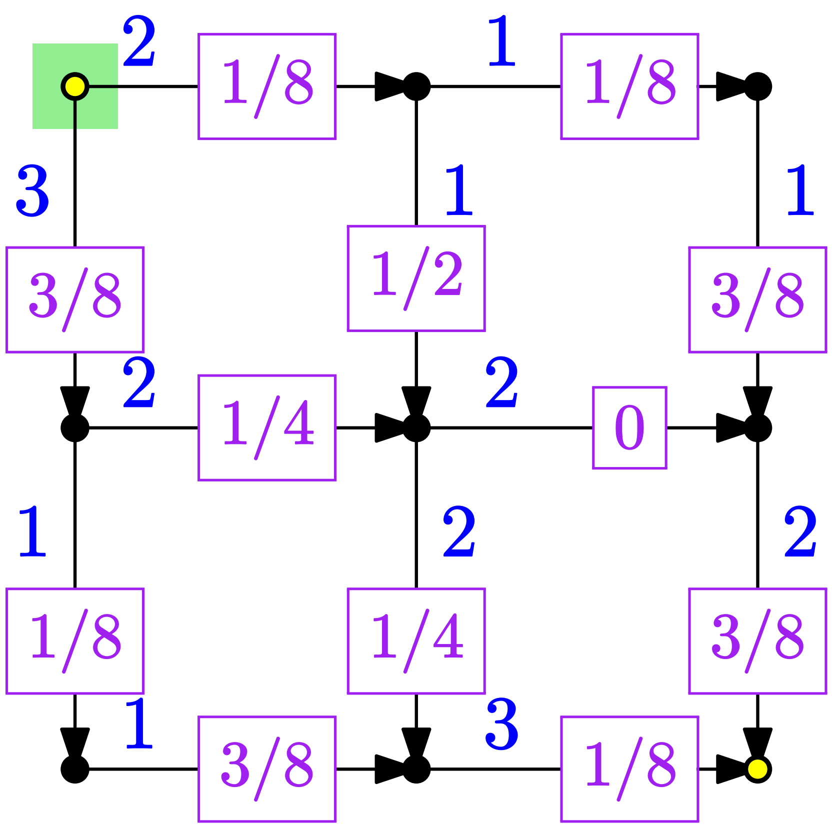
$$\text{s.t.} \quad z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A,$$

$$y_s = 1, y_t = 0,$$

$$z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A$$

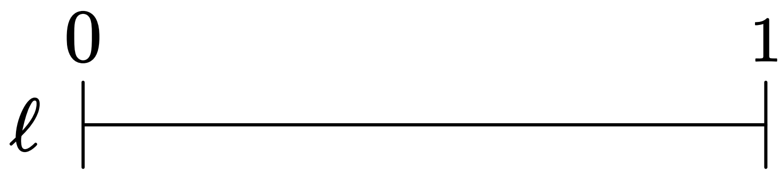


双対問題の最適解：例 (1)

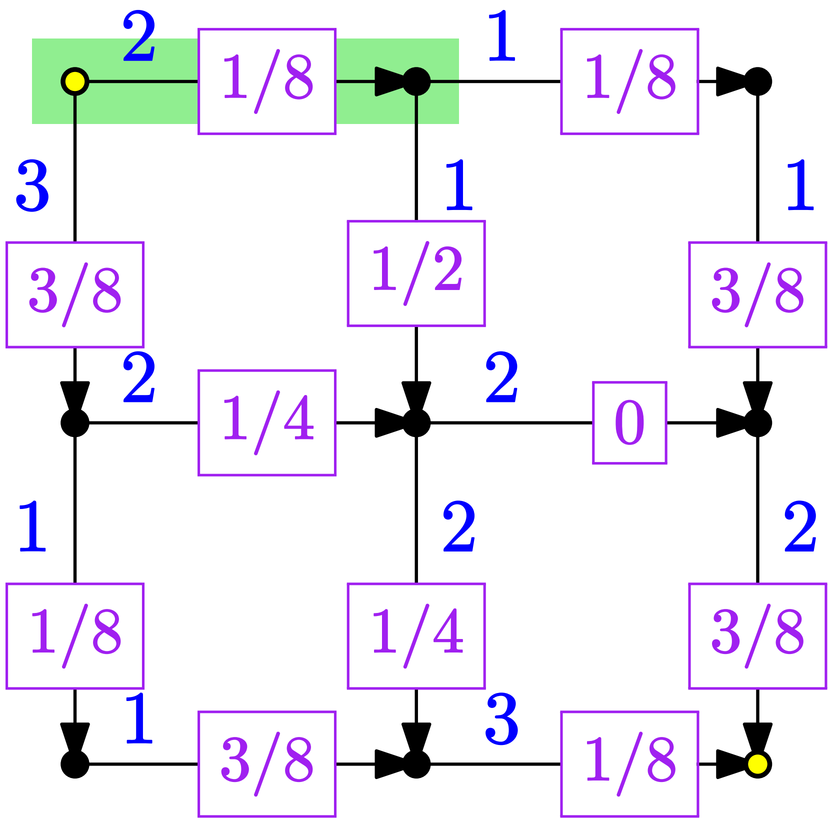


双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} {\color{blue}u_a} z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \qquad\qquad\quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

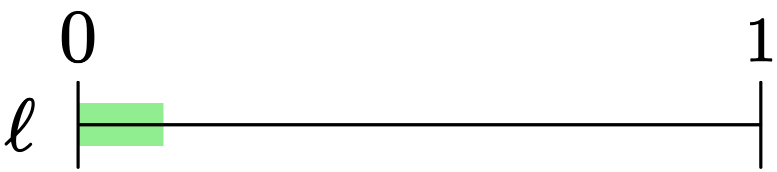


双対問題の最適解：例 (1)

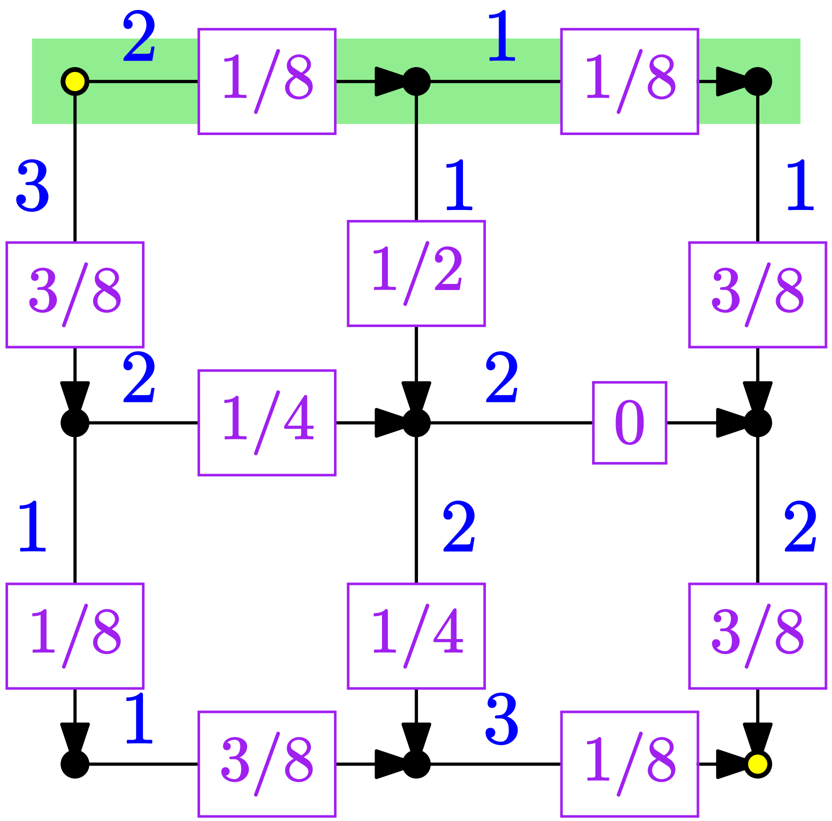


双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

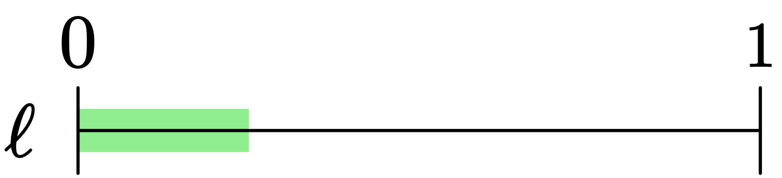


双対問題の最適解：例 (1)

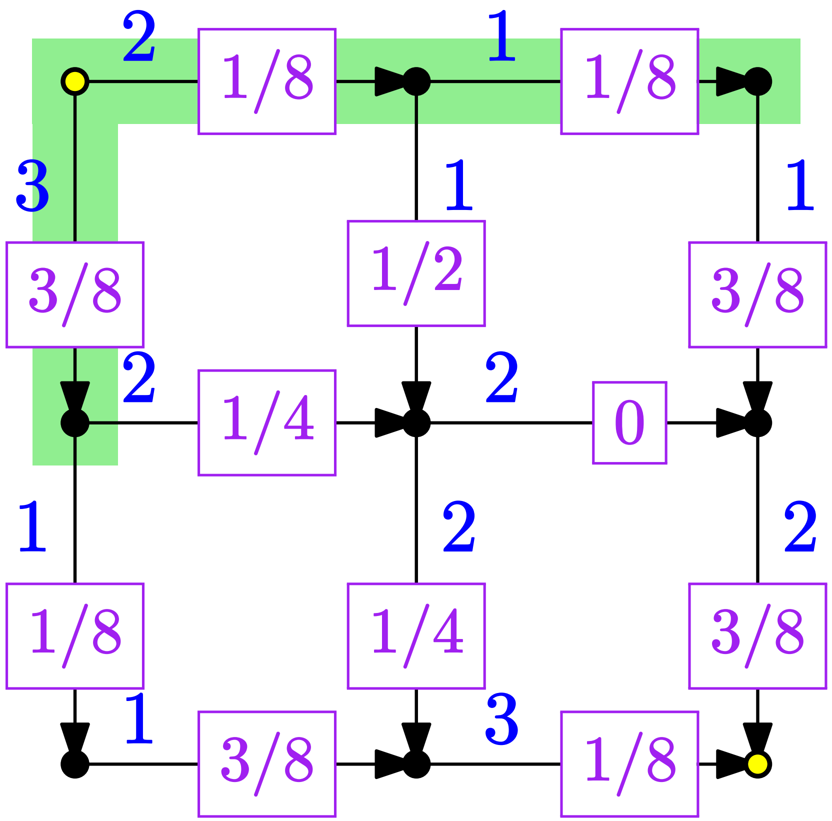


双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \quad\quad\quad\quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

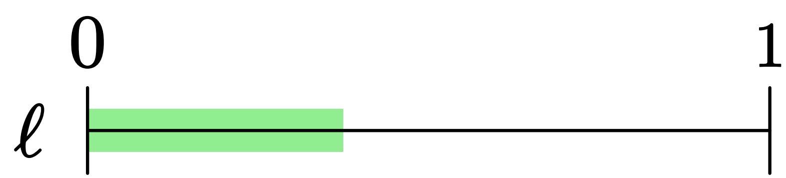


双対問題の最適解：例 (1)

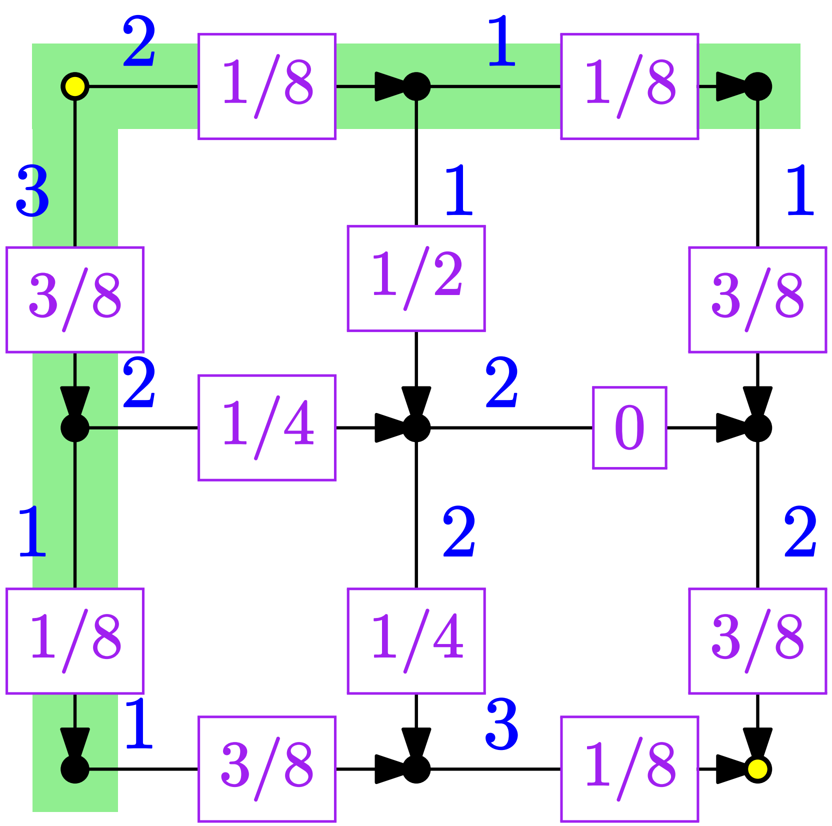


双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

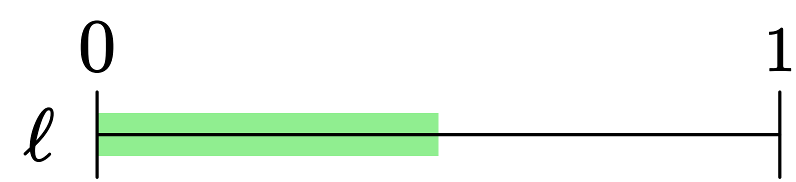


双対問題の最適解：例 (1)

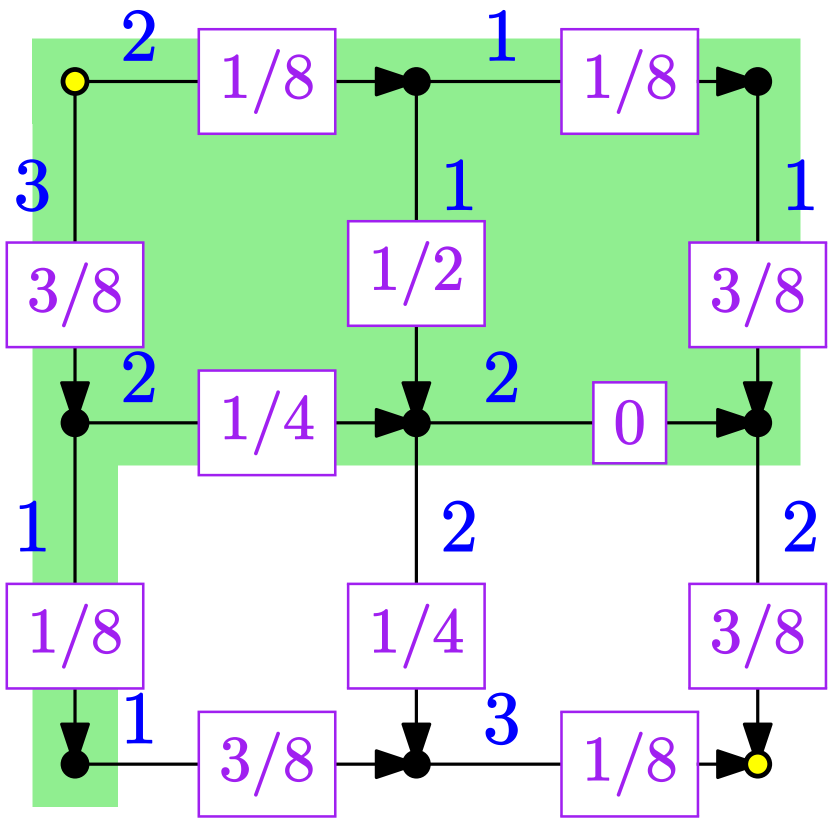


双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{a\in A} u_a z_a \\
\text{s.t.}\quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \quad\quad\quad\quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

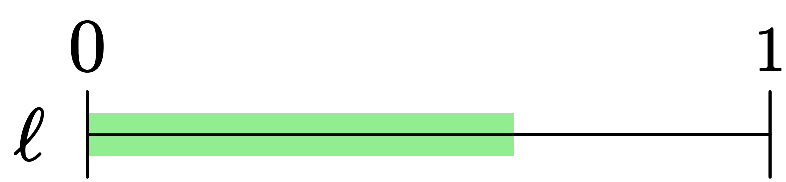


双対問題の最適解：例 (1)

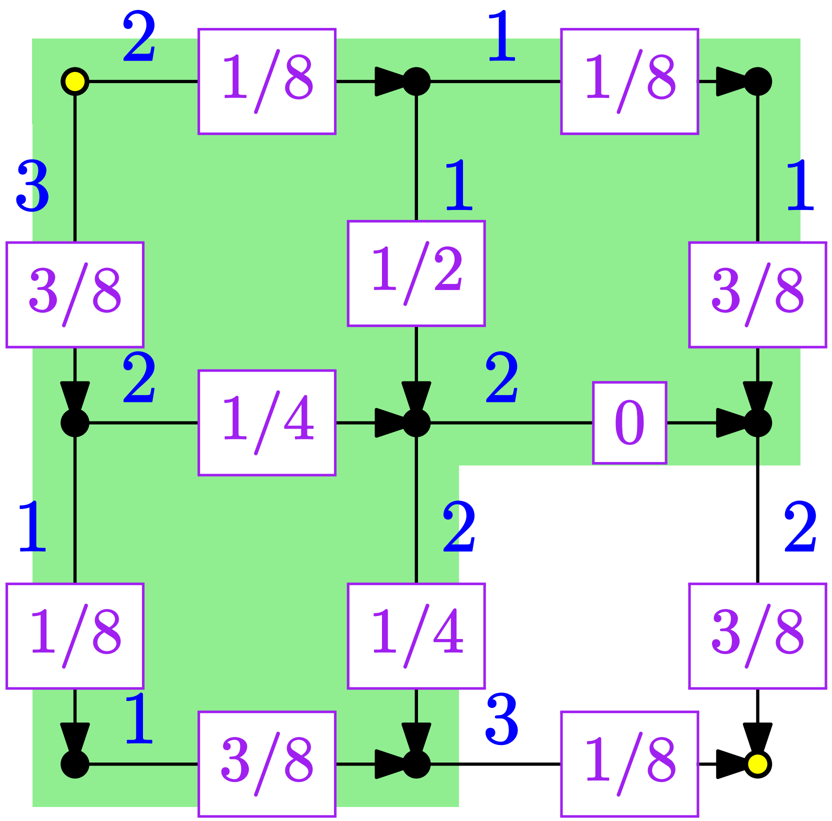


双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \qquad\qquad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

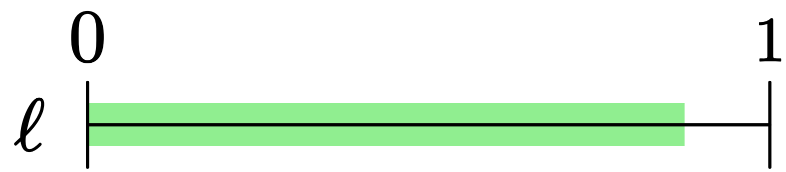


双対問題の最適解：例 (1)

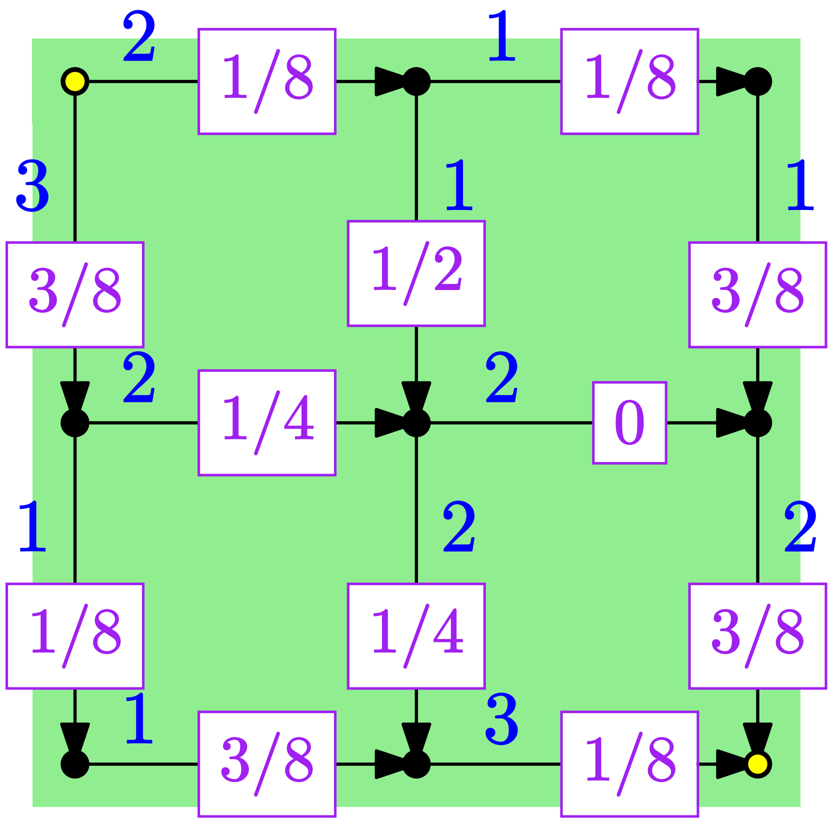


双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

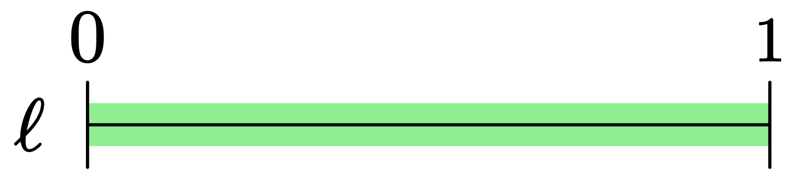


双対問題の最適解：例 (1)

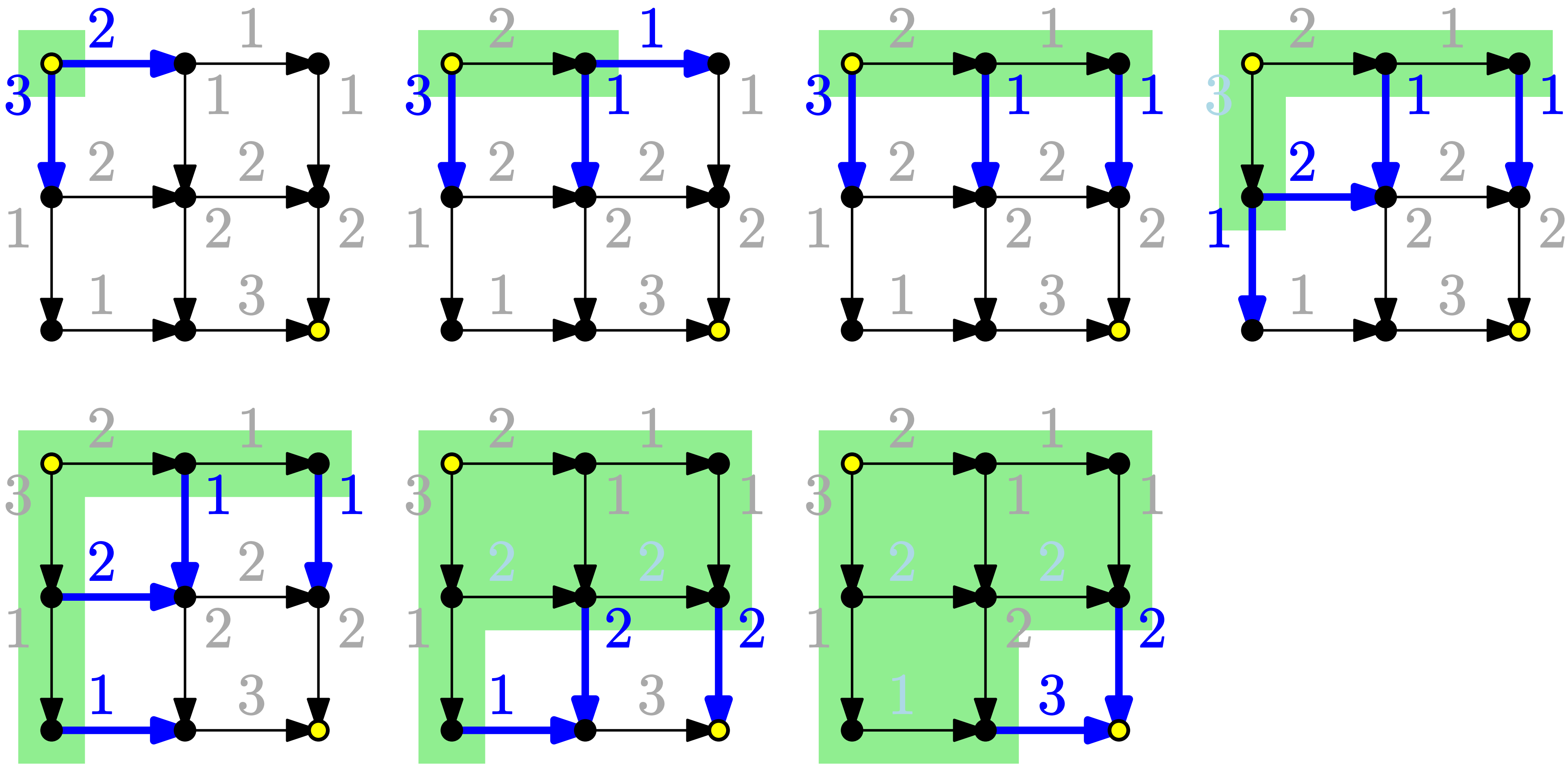


双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \geq 0 \quad\quad\quad\quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$



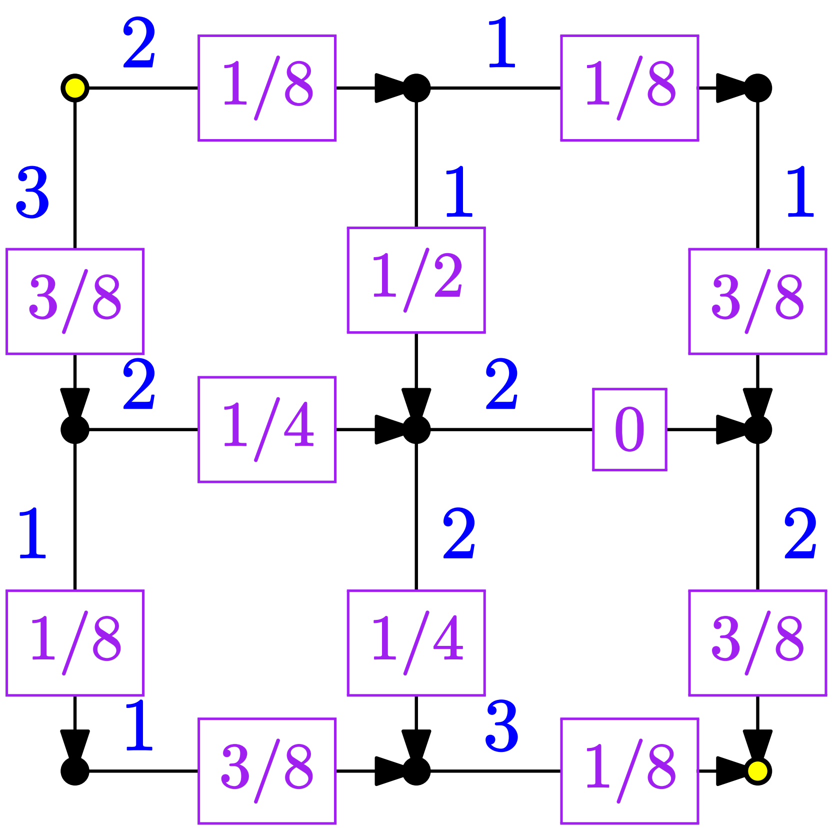
双対問題の最適解：例 (2)



このプロセスで得られた s-t カットの容量はどれも 5

(これらはどれも 容量が最小の s-t カット)

$\boldsymbol{y}^*, \boxed{\boldsymbol{z}^*}$: 双対問題の最適解



双対問題

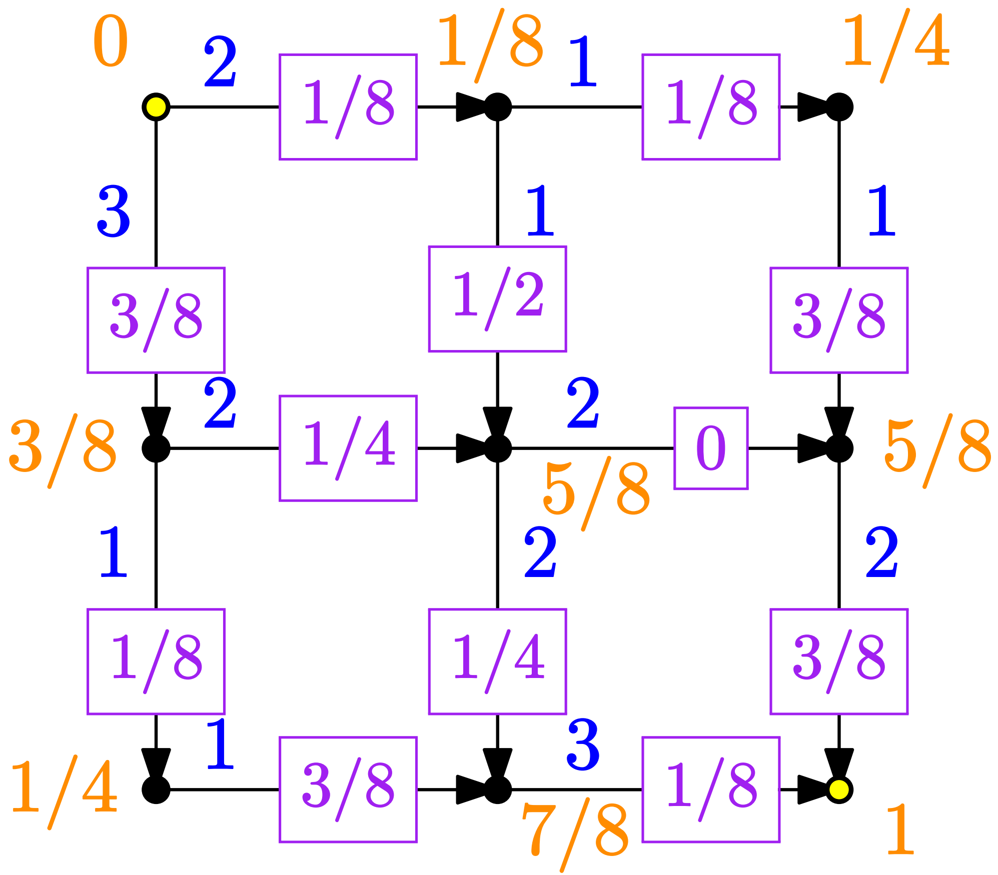
$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} u_a z_a & \\
\text{s.t.} & z_{uv} \geq y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\
 & y_s = 1, y_t = 0, & \\
 & z_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

$\boldsymbol{y}^*, \boxed{\boldsymbol{z}^*}$: 双対問題の最適解

任意の頂点 $v \in V$ に対して

$\boxed{d_v} = s$ から v への最短路長

(弧 a の長さ $= z_a^*$)



双対問題

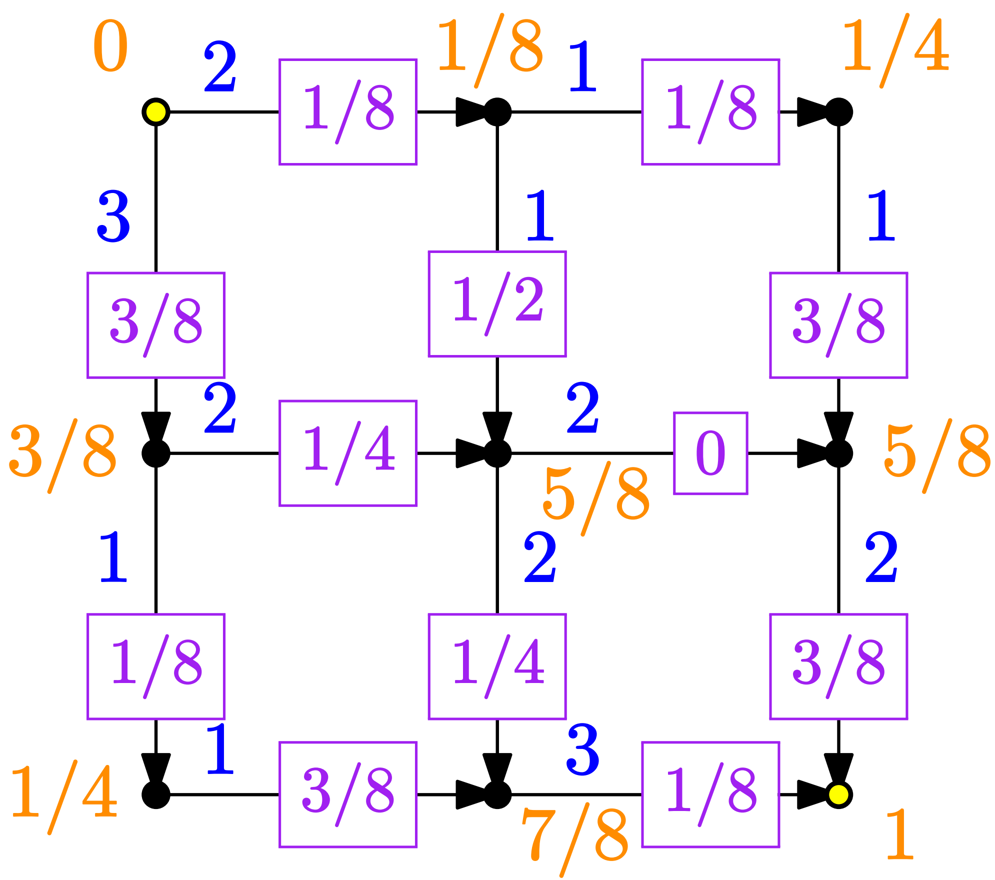
$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} u_a z_a & \\
\text{s.t.} & z_{uv} \geq y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, & \\
& z_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

$y^*, \boxed{z^*}$: 双対問題の最適解

任意の頂点 $v \in V$ に対して

$\boxed{d_v} = s$ から v への最短路長

(弧 a の長さ $= z^*_a$)



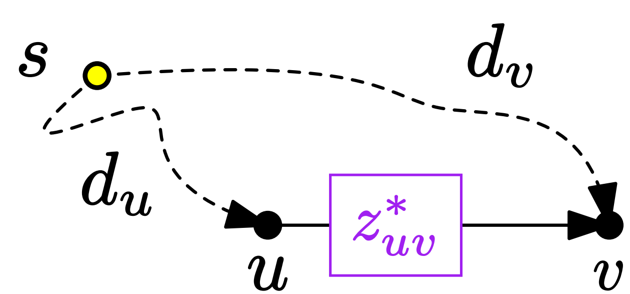
双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} u_a z_a & \\
\text{s.t.} & z_{uv} \geq y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\
 & y_s = 1, y_t = 0, & \\
 & z_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

<u>性質 1</u>：

任意の $uv \in A$ に対して

$d_v \leq d_u + z^*_{uv}$



双対問題の最適解：準備 (2)

$y^*, \boxed{z^*}$: 双対問題の最適解

任意の頂点 $v \in V$ に対して

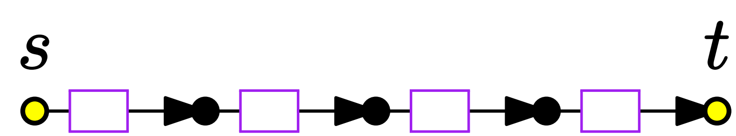
$\boxed{d_v} = s$ から v への最短路長

(弧 a の長さ $= z_a^*$)

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{a \in A} u_a z_a \\ \text{s.t.} \quad & z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, \\ & z_a \geq 0 \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

性質 2：$d_t \geq 1$



証明：

$(s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = t)$ を s から t への最短路とする

$$\begin{aligned} d_t &= z^*_{v_0 v_1} + z^*_{v_1 v_2} + \cdots + z^*_{v_{k-1} v_k} \\ &\geq (y^*_{v_0} - y^*_{v_1}) + (y^*_{v_1} - y^*_{v_2}) + \cdots + (y^*_{v_{k-1}} - y^*_{v_k}) \\ &= y^*_{v_0} - y^*_{v_k} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

□

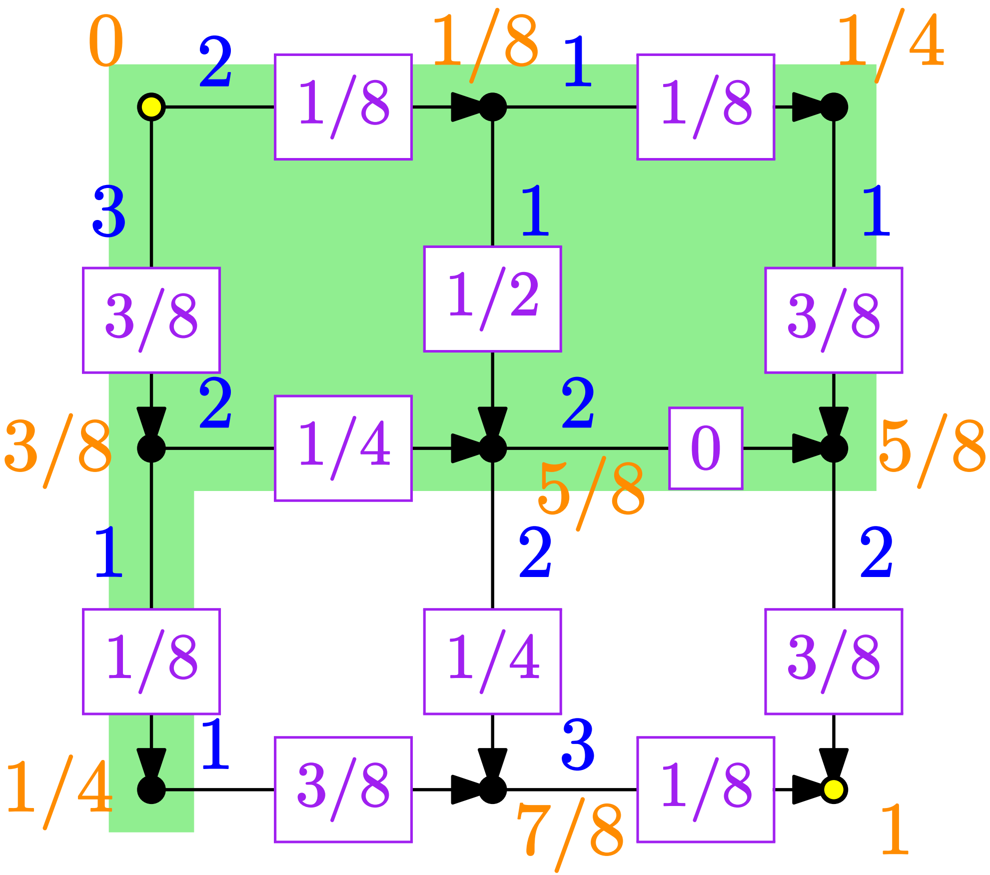
双対問題の最適解：s-t カットの構成

$y^*, \boxed{z^*}$: 双対問題の最適解

任意の頂点 $v \in V$ に対して

$\boxed{d_v} = s$ から v への最短路長

(弧 a の長さ $= z^*_a$)



双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} u_a z_a & \\
\text{s.t.} & z_{uv} \geq y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\
 & y_s = 1, y_t = 0, & \\
 & z_a \geq 0 & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

任意の $\ell \in [0, 1)$ に対して

$\boxed{S^{(\ell)}} = \{v \in V \mid \boxed{d_v} \leq \ell\}$

これは s-t カット ($\because$ 性質 2)

$\ell = 5/8$

双対問題の最適解：許容解の構成

$\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*$：双対問題の最適解

s-t カット $S^{(\ell)}$ から
許容解 $\boldsymbol{y}^{(\ell)}, \boldsymbol{z}^{(\ell)}$ を作る

$$y_v^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & (v \in S^{(\ell)}), \\ 0 & (v \notin S^{(\ell)}), \end{cases}$$

$$z_a^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(S^{(\ell)})), \\ 0 & (a \notin \delta^+(S^{(\ell)})) \end{cases}$$

双対問題

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \sum_{a \in A} u_a z_a & \\ \text{s.t.} & z_{uv} \geq y_u - y_v & \forall\, uv \in A, \\ & y_s = 1, y_t = 0, & \\ & z_a \geq 0 & \forall\, a \in A \end{array}$$

双対問題の最適解：乱択丸め (1)

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

<u>性質 3</u>：任意の $uv \in A$ に対して，$\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) \le z^*_{uv}$

双対問題の最適解：乱択丸め (1)

手法：乱択丸め (randomized rounding)

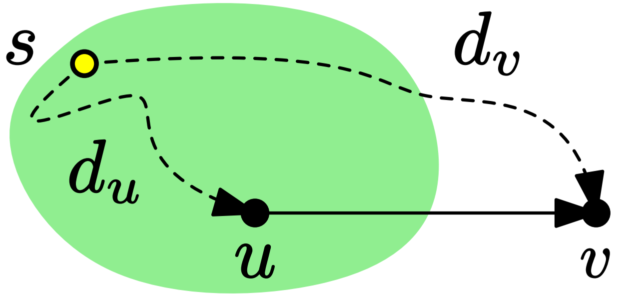
$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

<u>性質 3</u>：任意の $uv \in A$ に対して，$\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) \leq z^*_{uv}$

<u>証明</u>：

$$\begin{aligned}\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) &= \Pr(u \in S^{(\ell)} \text{ かつ } v \notin S^{(\ell)}) \\ &= \Pr(d_u \leq \ell < d_v)\end{aligned}$$

$\square$



双対問題の最適解：乱択丸め (1)

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

<u>性質 3</u>：任意の $uv \in A$ に対して，$\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) \leq z^*_{uv}$

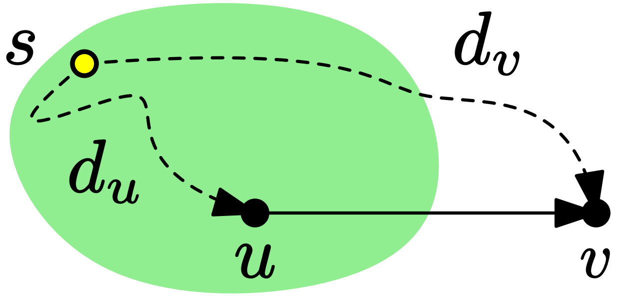
<u>証明</u>：

$$\begin{aligned} \Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) &= \Pr(u \in S^{(\ell)} \text{ かつ } v \notin S^{(\ell)}) \\ &= \Pr(d_u \leq \ell < d_v) \\ &= 0 \leq z^*_{uv} \end{aligned}$$

$d_u > d_v$ のとき，

双対問題の非負制約

$\square$



双対問題の最適解：乱択丸め (1)

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

<u>性質 3</u>：任意の $uv \in A$ に対して，$\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) \le z^*_{uv}$

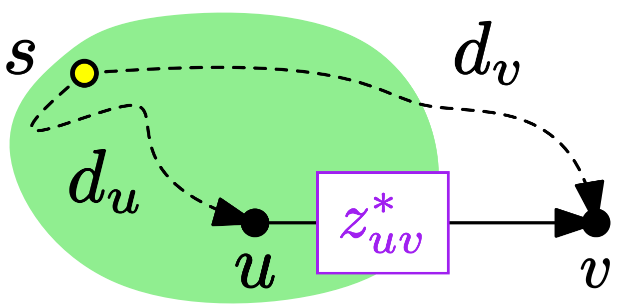
<u>証明</u>：

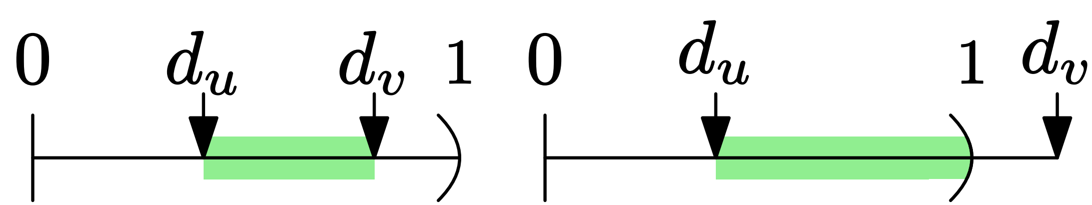
$$\begin{aligned}
\Pr(uv \in \delta^+(S^{(\ell)})) &= \Pr(u \in S^{(\ell)} \text{ かつ } v \notin S^{(\ell)}) \\
&= \Pr(d_u \le \ell < d_v) \\
&= \min\{d_v, 1\} - d_u \\
&\le d_v - d_u \\
&\le z^*_{uv}
\end{aligned}$$

$d_u \le d_v$ のとき，

性質 1

□





手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

性質 4：$\mathbb{E}\left[\sum_{a \in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] \leq \sum_{a \in A} u_a z_a^{*}$ = 双対問題の最適値

双対問題の最適解：乱択丸め (2)

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

性質 4：$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] \le \sum_{a\in A} u_a z_a^*$ = 双対問題の最適値

証明：

期待値の線形性

$$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] = \sum_{a\in A} u_a \mathbb{E}\left[z_a^{(\ell)}\right]$$

$\square$

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

性質 4：$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] \leq \sum_{a\in A} u_a z_a^*$ = 双対問題の最適値

証明：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] = \sum_{a\in A} u_a \mathbb{E}\left[z_a^{(\ell)}\right]$$

$$= \sum_{a\in A} u_a \Pr(a \in \delta^+(S^{(\ell)}))$$

$$z_a^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & (a \in \delta^+(S^{(\ell)})), \\ 0 & (a \notin \delta^+(S^{(\ell)})) \end{cases}$$

$\square$

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

性質 4：$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] \le \sum_{a\in A} u_a z_a^*$ = 双対問題の最適値

証明：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}\right] = \sum_{a\in A} u_a \mathbb{E}\left[z_a^{(\ell)}\right]$$

$$= \sum_{a\in A} u_a \Pr(a \in \delta^+(S^{(\ell)}))$$

$$\le \sum_{a\in A} u_a z_a^* \qquad \square$$

性質 3

手法：乱択丸め (randomized rounding)

$\ell \in [0,1)$ を一様分布に従って選び，$S^{(\ell)}$ を構成する

<u>性質 4</u>：$\mathbb{E}\left[\underbrace{\sum_{a\in A} u_a z_a^{(\ell)}}_{=\mathsf{cap}(S^{(\ell)})}\right] \leq \sum_{a\in A} u_a z_a^* =$ 双対問題の最適値

つまり

ある $\ell \in [0,1)$ に対して，$\boldsymbol{y}^{(\ell)}, \boldsymbol{z}^{(\ell)}$ は最適解

双対問題の最適解の中に，

s-t カットから作られるものがあり，

双対問題の最適値は s-t カットの容量の最小値

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a \\
\text{s.t.} \quad & f_a \le u_a \quad \forall\, a \in A, \\
& \sum_{a\in\delta^-(v)} f_a - \sum_{a\in\delta^+(v)} f_a = 0 \\
& \qquad\qquad \forall\, v \in V - \{s,t\}, \\
& f_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{a\in A} u_a z_a \\
\text{s.t.} \quad & z_{uv} \ge y_u - y_v \quad \forall\, uv \in A, \\
& y_s = 1, y_t = 0, \\
& z_a \ge 0 \quad \forall\, a \in A
\end{aligned}
$$

最適値：s-t 流の値の最大値　　s-t カットの容量の最小値

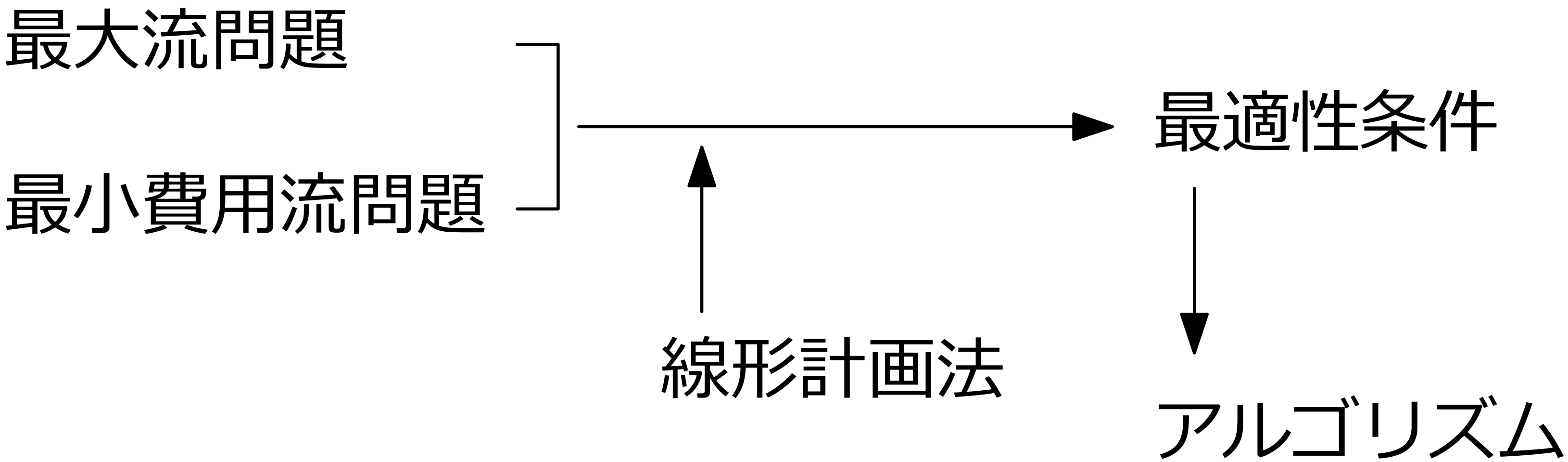
定理：最大流最小カット定理

ある s-t 流 f，s-t カット S が存在し，次が成立

$$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$$

今までの議論と強双対定理から，正しいことが分かる

まとめ

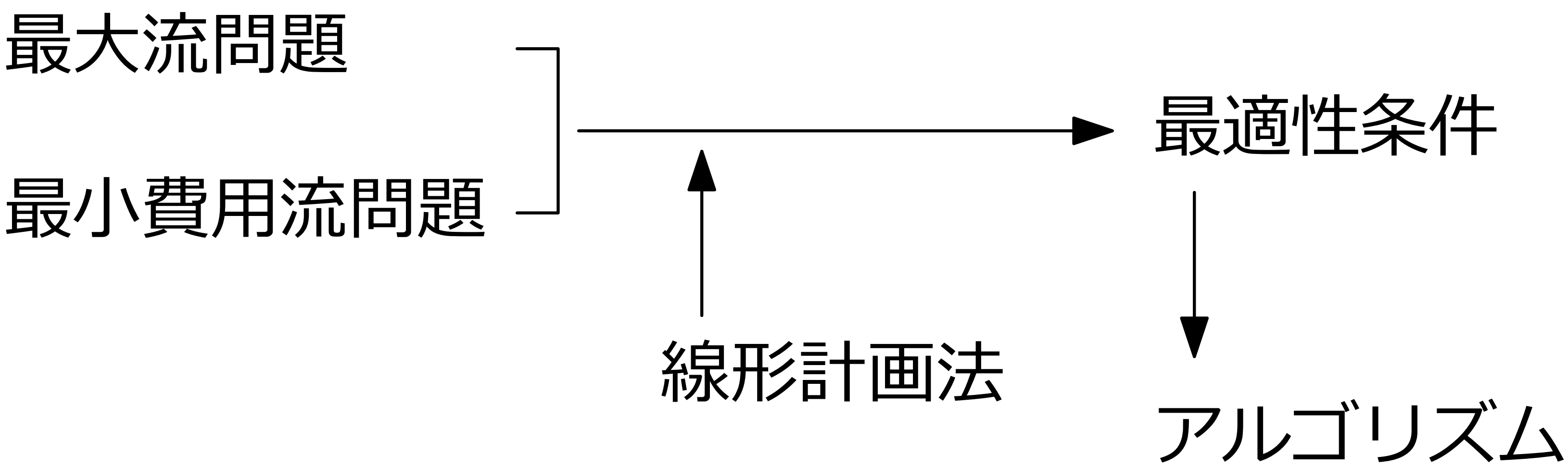


まとめ

- **線形計画問題** として，最大流問題は書ける
- その **双対問題** は 最小容量の s-t カットを見つける
- そこから，**最大流最小カット定理** が導かれる

注：線形計画法の強双対定理はこの授業で証明していないので，
最大流最小カット定理の証明はこの授業だけで完結していない

次回予告



次回の予告

増加道法を停止させる工夫
- 増加道法で最大流最小カット定理を証明
- 増加道法の効率 (計算量) の算定