離散最適化基礎論
第 2 回
最大流問題：増加道法

岡本 吉央 (電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 10 月 10 日

最終更新：2023 年 10 月 11 日 08:44

スケジュール (前半)

1.	最大流と最小費用流：定義	(10/3)
2.	最大流問題：増加道法	(10/10)
*	休み	(10/17)
3.	線形計画法の復習	(10/24)
4.	最大流と最小費用流：線形計画問題として	(10/31)
5.	最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム	(11/7)
6.	最大流問題：容量スケーリング法	(11/14)
7.	最大流問題：Push-Relabel 法 (概要)	(11/21)
8.	最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価)	(11/28)

スケジュール (後半)

∗	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：最適性条件	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
∗	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
∗	休み	(1/30)

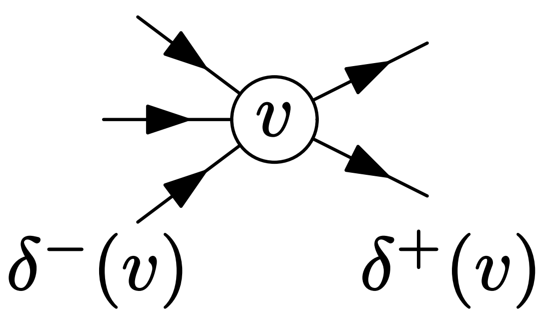
[復習] 流：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流 (flow)

ネットワーク (G, u) における s-t **流** とは
次の 2 条件を満たす関数 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して
$$0 \leq f(a) \leq u(a)$$
2. 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して
$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$



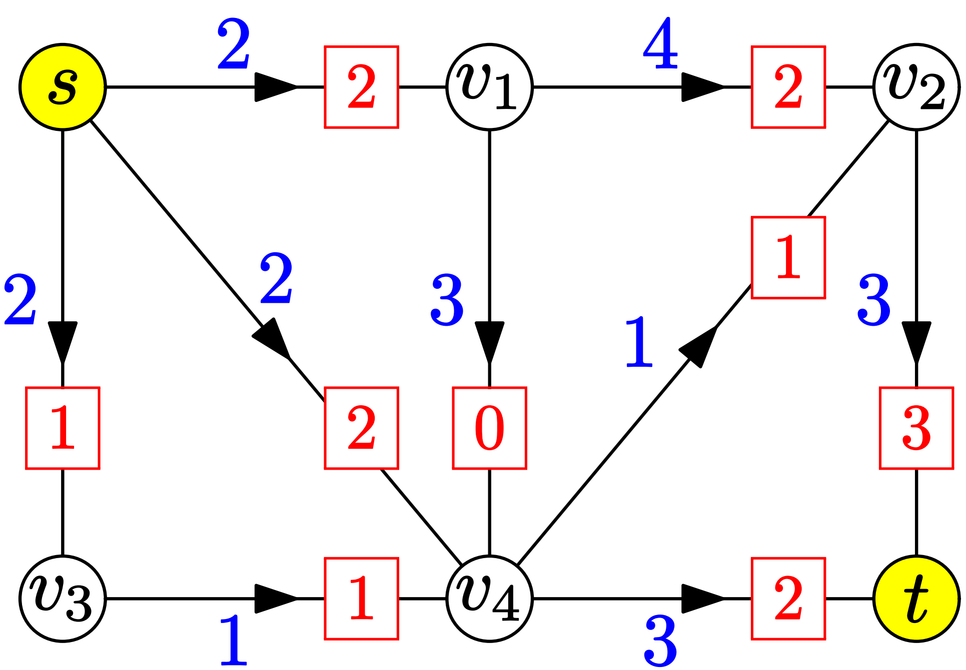
[復習] 流の値：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流の値 (value)

s-t 流 f の **値** とは次の量のこと

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$



$$\mathrm{val}(f) = (2 + 1 + 2) - 0 = 5$$

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：最大流 (maximum flow)

f がネットワーク (G, u) の **最大 s-t 流** であるとは，
次を満たすこと

任意の s-t 流 f' に対して，$\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$

注　最大 s-t 流が存在することは 当然ではない
$\leadsto$ 最大 s-t 流が必ず存在することを後の講義で証明する

[復習] 最大流問題：定義

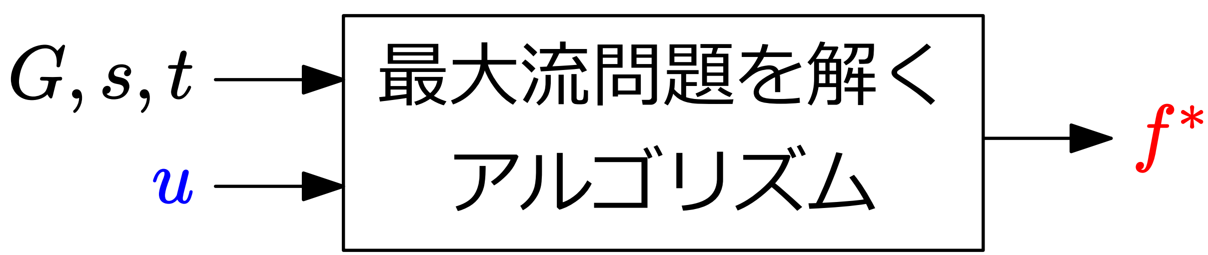
定義：最大流問題 (maximum flow problem)

入力

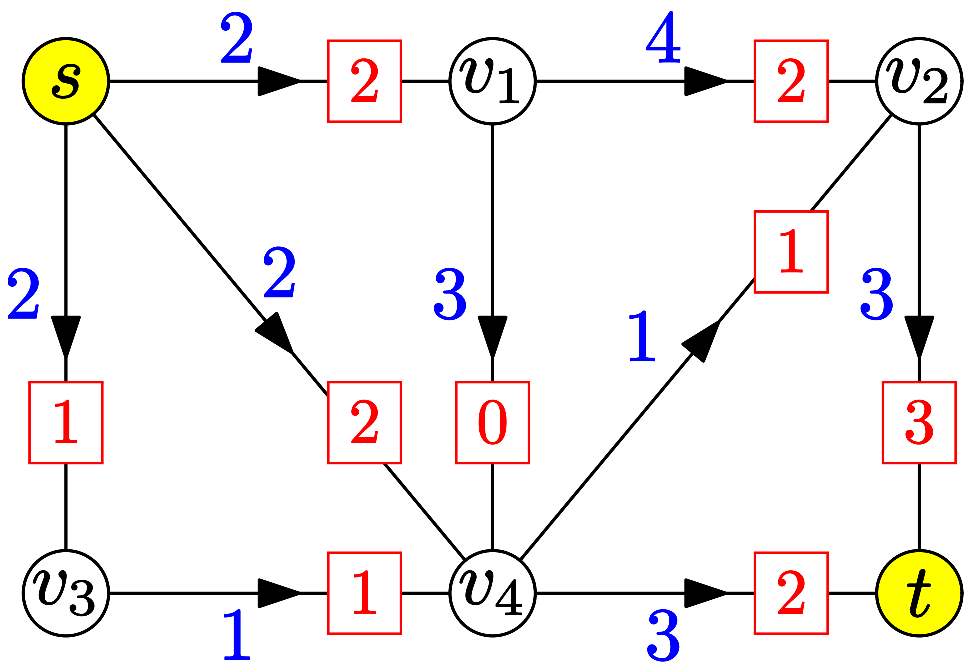
- 有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$
- 弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$

出力

- ネットワーク (G, u) に対する最大 s-t 流 f^*



[復習] 最大流問題：最適性？



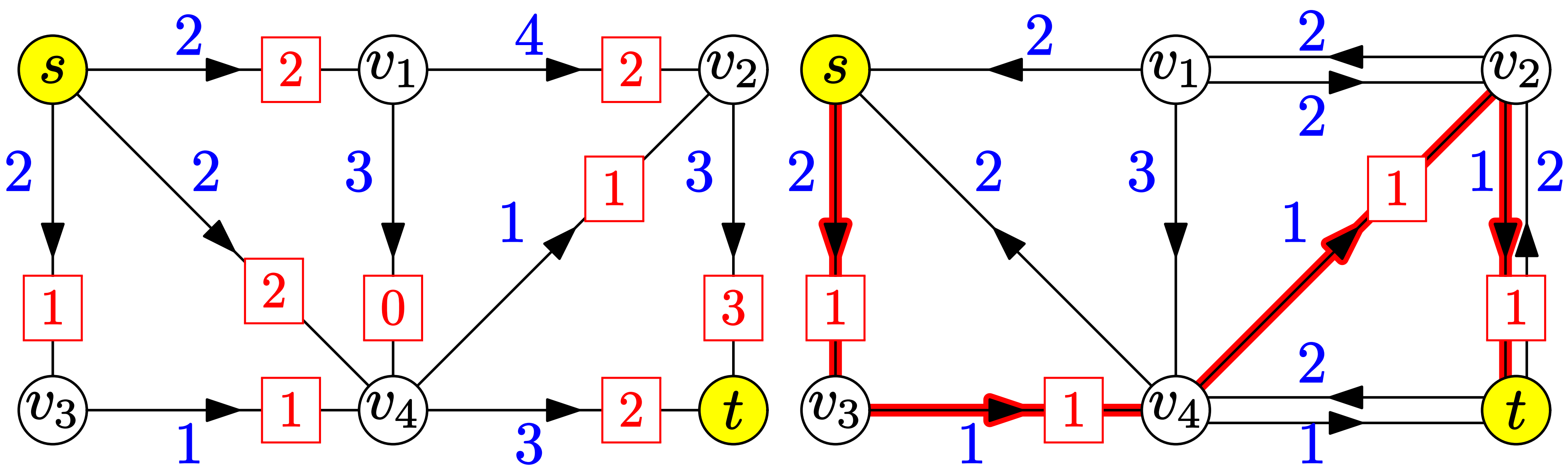
$\mathrm{val}(f) = (2 + 1 + 2) - 0 = 5$

疑問

s-t 流で，f より値の大きいものはあるか？

$\rightsquigarrow$ 最適性条件

1. **準備**
2. 補助ネットワークと増加道
3. s-t カット
4. 増加道法



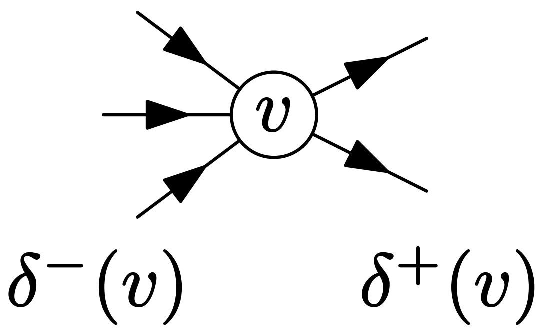
流入と流出：記法

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

記法

頂点 $v \in V$ に対して

$$f^-(v) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a), \quad f^+(v) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$



流量保存制約の書き換え：

任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して

$$f^-(v) = f^+(v)$$

流の値の書き換え：

$$\mathrm{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$$

流入和と流出和：性質

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：流入和と流出和の関係

$$\sum_{v \in V} f^-(v) = \sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v)$$

証明：レポート問題

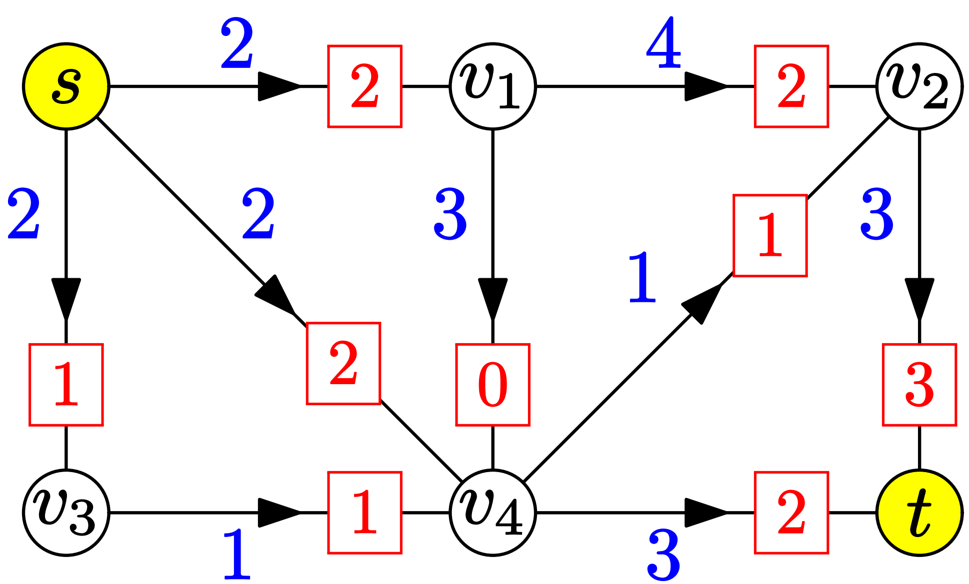
流入和と流出和：性質

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：流入和と流出和の関係

$$\sum_{v \in V} f^-(v) = \sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v)$$

証明：レポート問題



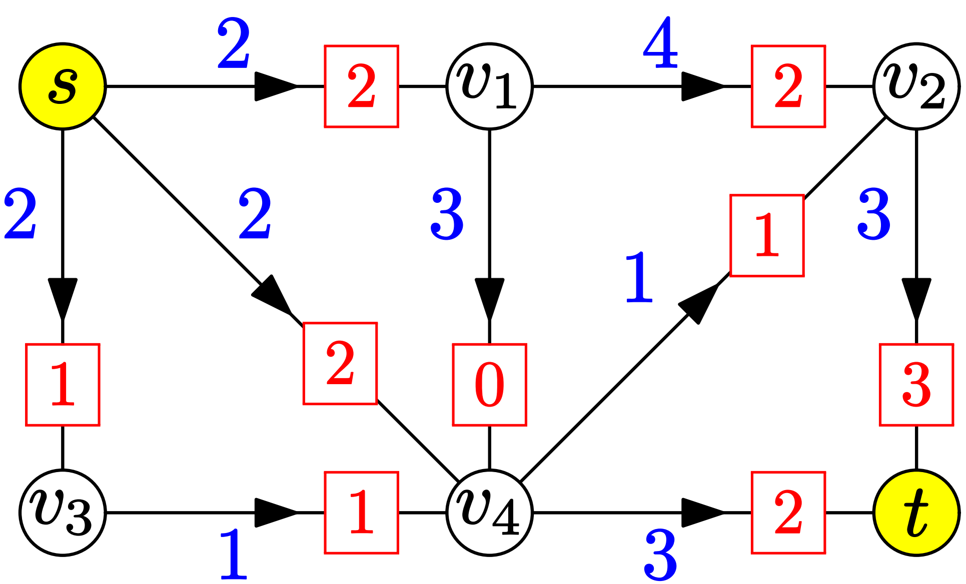
	f^-	f^+
s	0	$2+1+2$
v_1	2	$2+0$
v_2	$2+1$	3
v_3	1	1
v_4	$2+0+1$	$1+2$
t	$3+2$	0
Σ	14	14

流の値と t への純流入

設定：有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$，
弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$，s-t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

性質：s からの純流出 $=t$ への純流入

$$f^+(s)-f^-(s)=f^-(t)-f^+(t)$$



証明：流入和と流出和の関係より

$$\sum_{v \in V} f^{-}(v) = \sum_{v \in V} f^{+}(v). \tag{1}$$

流量保存制約より

$$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^{-}(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^{+}(v). \tag{2}$$

流の値と t への純流入：証明

証明：流入和と流出和の関係より

$$\sum_{v \in V} f^-(v) = \sum_{v \in V} f^+(v). \tag{1}$$

流量保存制約より

$$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v). \tag{2}$$

式 (1) から 式 (2) を引くと

$$f^-(s) + f^-(t) = f^+(s) + f^+(t).$$

証明：流入和と流出和の関係より

$$\sum_{v \in V} f^-(v) = \sum_{v \in V} f^+(v). \tag{1}$$

流量保存制約より

$$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v). \tag{2}$$

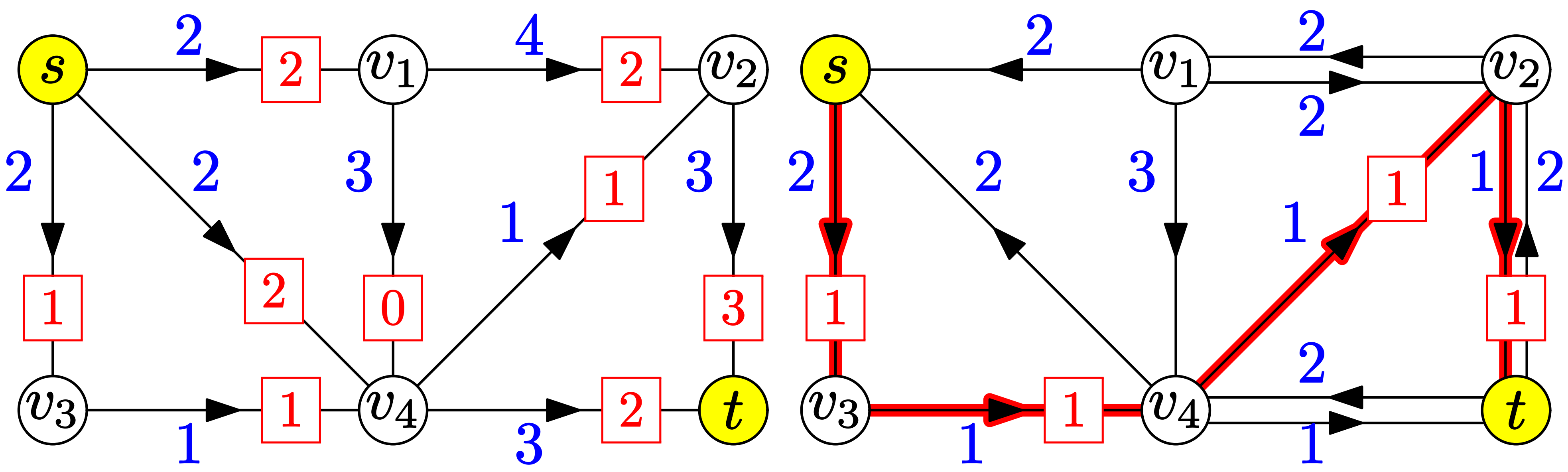
式 (1) から 式 (2) を引くと

$$f^-(s) + f^-(t) = f^+(s) + f^+(t).$$

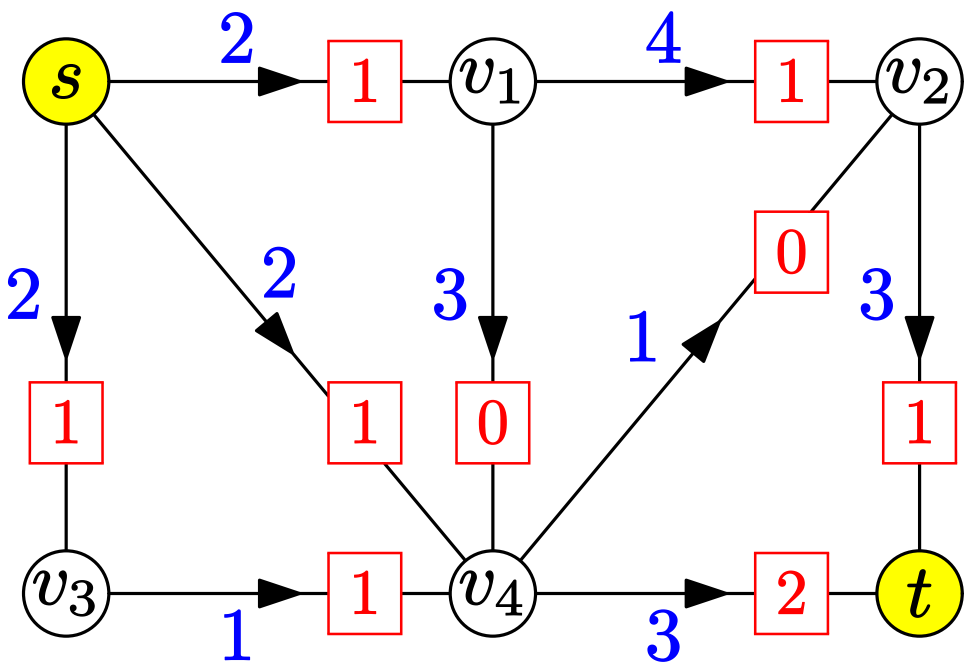
整理すると

$$f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t). \qquad \square$$

1. 準備
2. **補助ネットワークと増加道**
3. s-t カット
4. 増加道法



質問：これは最大 s-t 流か？



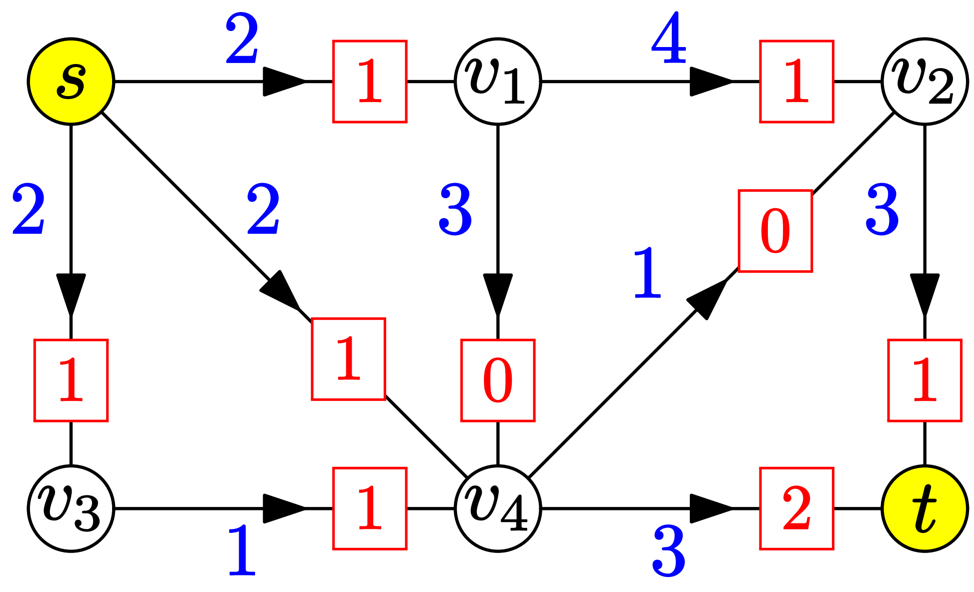
疑問

s-t 流で，この f より値の大きいものはあるか？

$\rightsquigarrow$ **補助ネットワーク** (auxiliary network) を使って考える

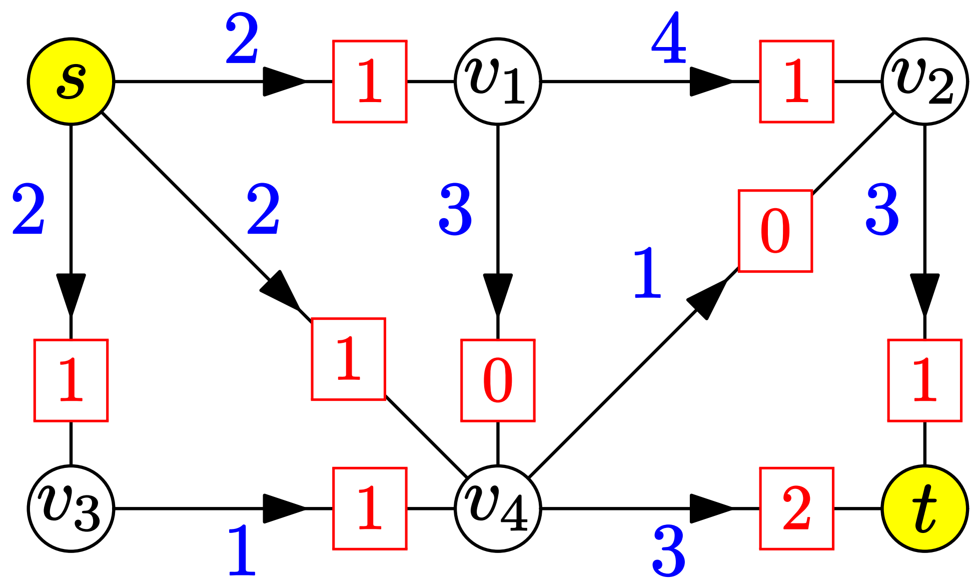
(残余ネットワーク (residual network) と呼ぶこともある)

補助ネットワーク：例

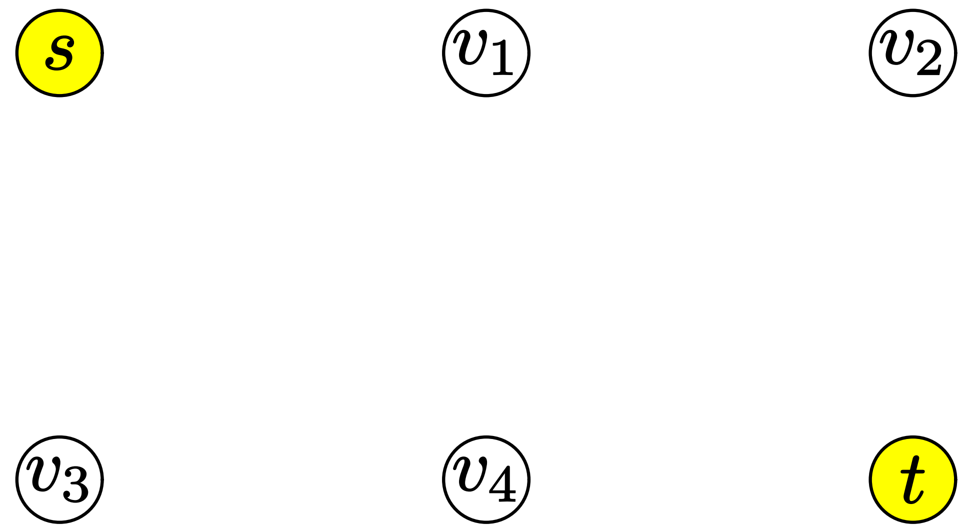


$(G, u), f$

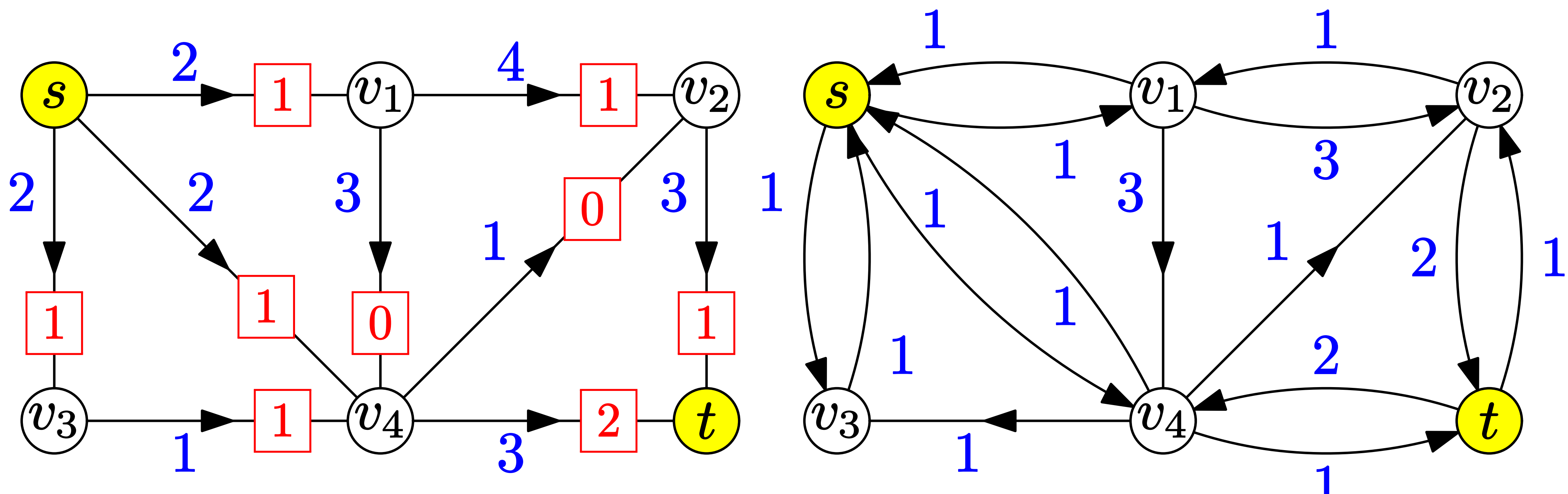
補助ネットワーク：例



$(G, u), f$

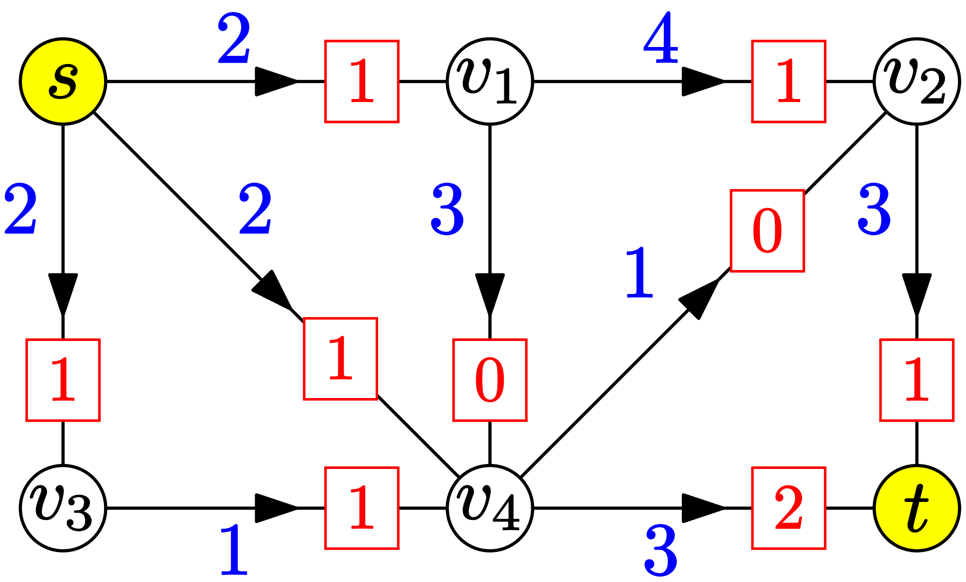


補助ネットワーク：例

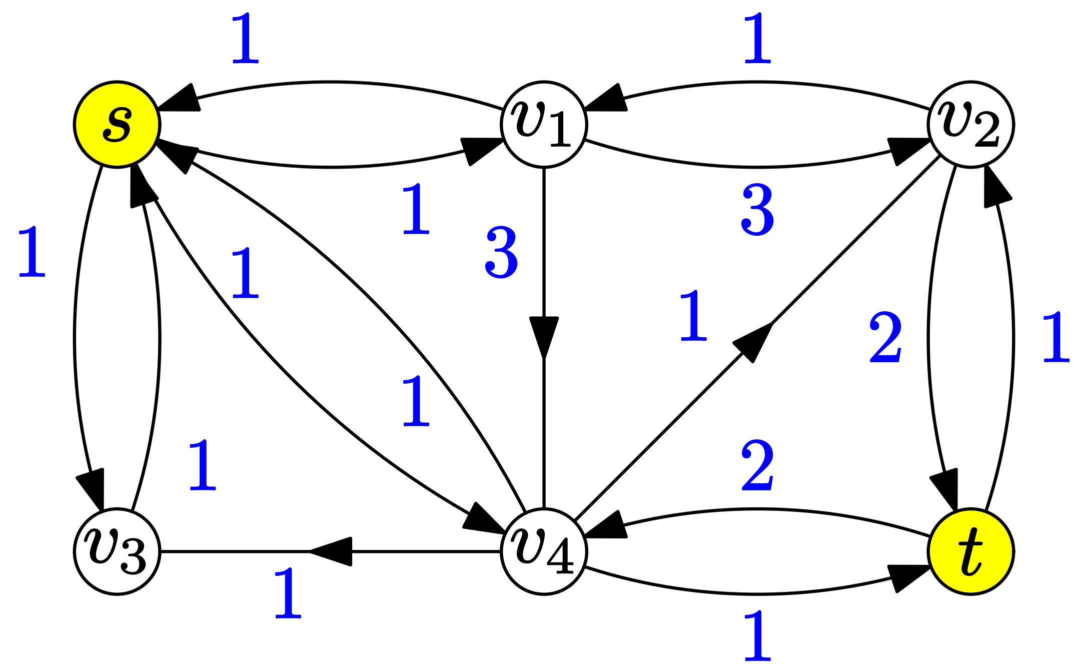


$(G, u), f$ $\qquad$ (G_f, u_f)

補助ネットワーク：例

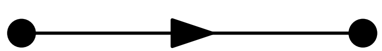


$(G, u), f$



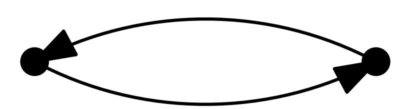
(G_f, u_f)

流 $\boxed{f(a)}$



容量 $u(a)$

逆向き 容量 $f(a)$



順向き 容量 $u(a) - f(a)$

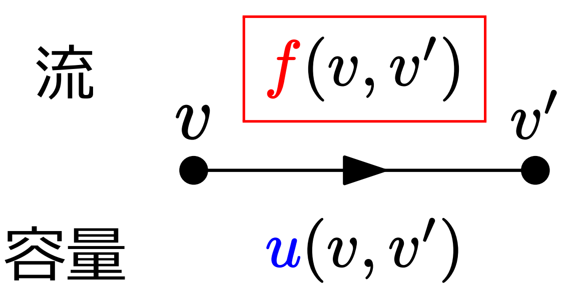
補助ネットワーク：定義 (1/2)

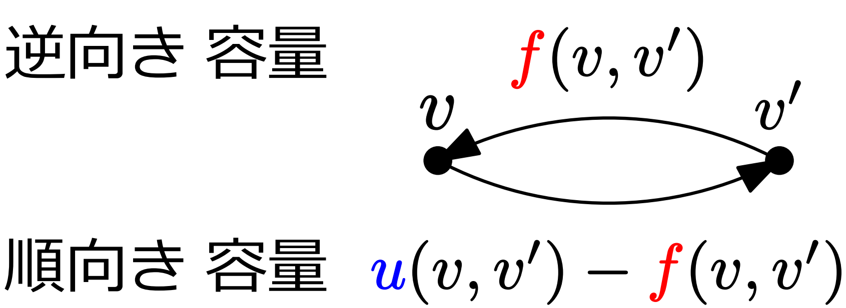
<u>設定</u>：有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$，
弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$，s-t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

定義：補助ネットワーク (auxiliary network)

f に対する **補助ネットワーク** (G_f,u_f) を次で定義する

- G_f の頂点集合 $=V$
- G_f の弧集合 $=A_f^{\mathrm{F}}\cup A_f^{\mathrm{B}}$
  - $A_f^{\mathrm{F}}=\{(v,v')\mid(v,v')\in A,\ f(v,v')<u(v,v')\}$
  - $A_f^{\mathrm{B}}=\{(v',v)\mid(v,v')\in A,\ f(v,v')>0\}$





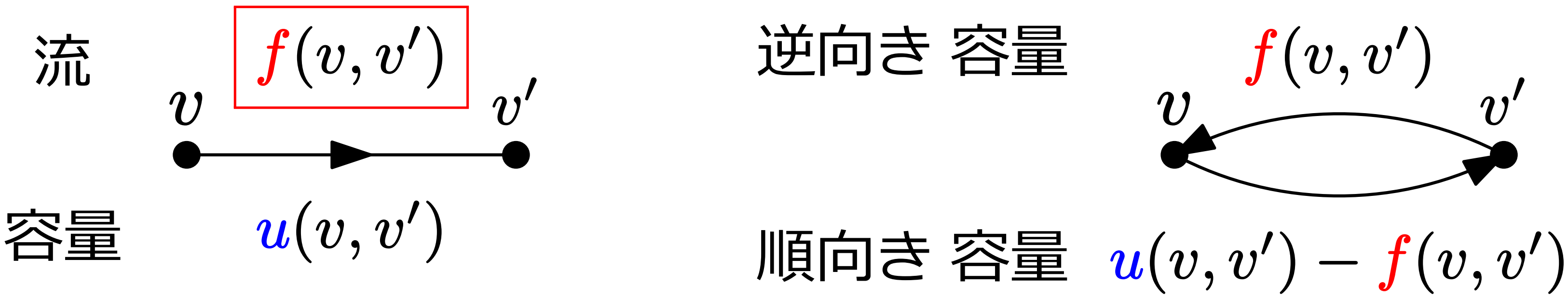
補助ネットワーク：定義 (2/2)

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

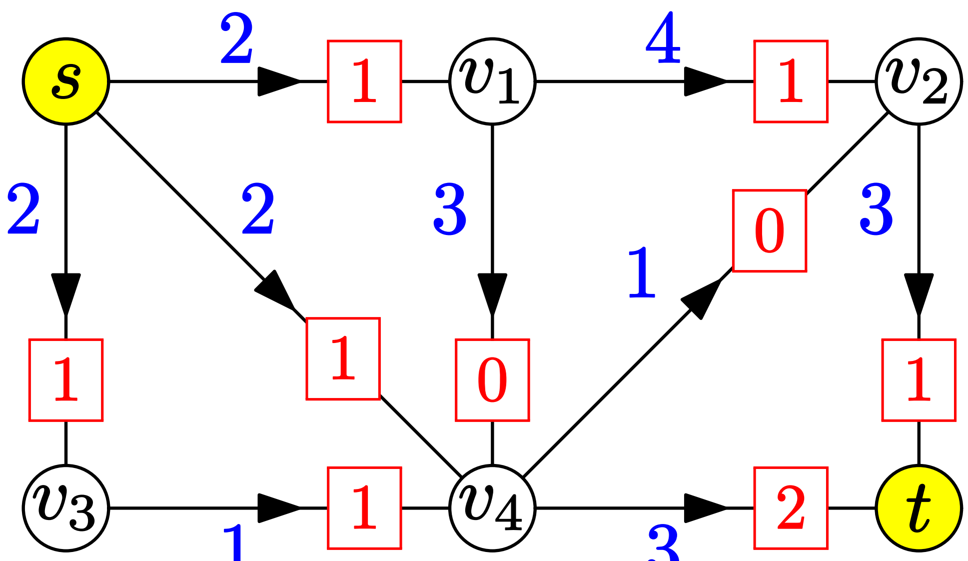
定義：補助ネットワーク (auxiliary network)

f に対する **補助ネットワーク** (G_f, u_f) を次で定義する

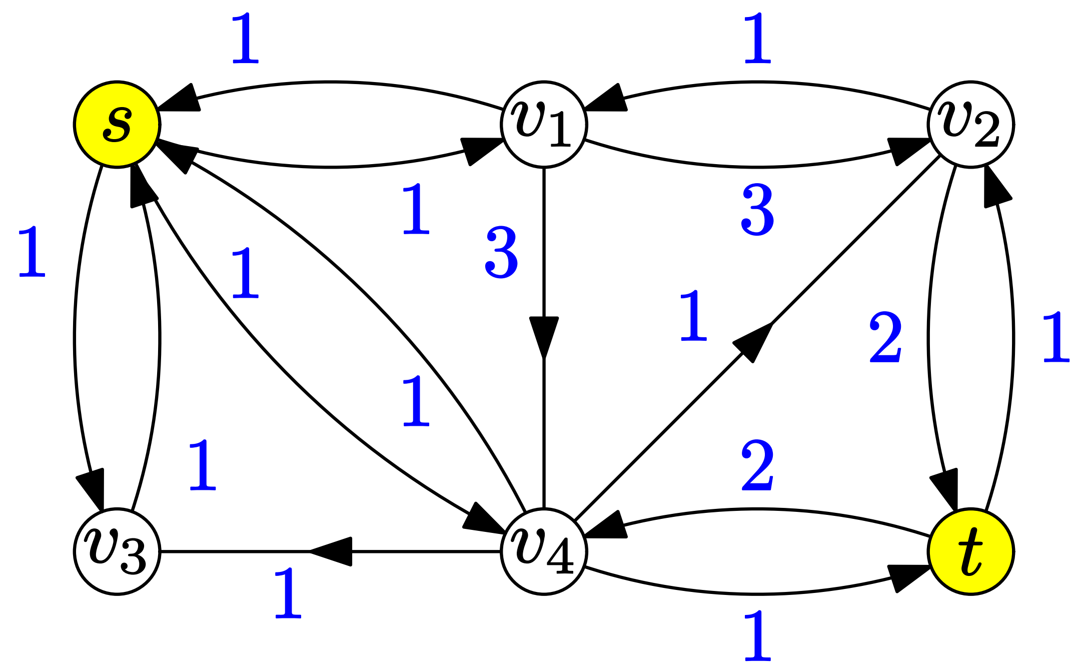
- 弧容量関数 $u_f\colon A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}} \to \mathbb{R}_+$ は次で定義
  - $(v, v') \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$u_f(v, v') = u(v, v') - f(v, v')$
  - $(v', v) \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$u_f(v', v) = f(v, v')$



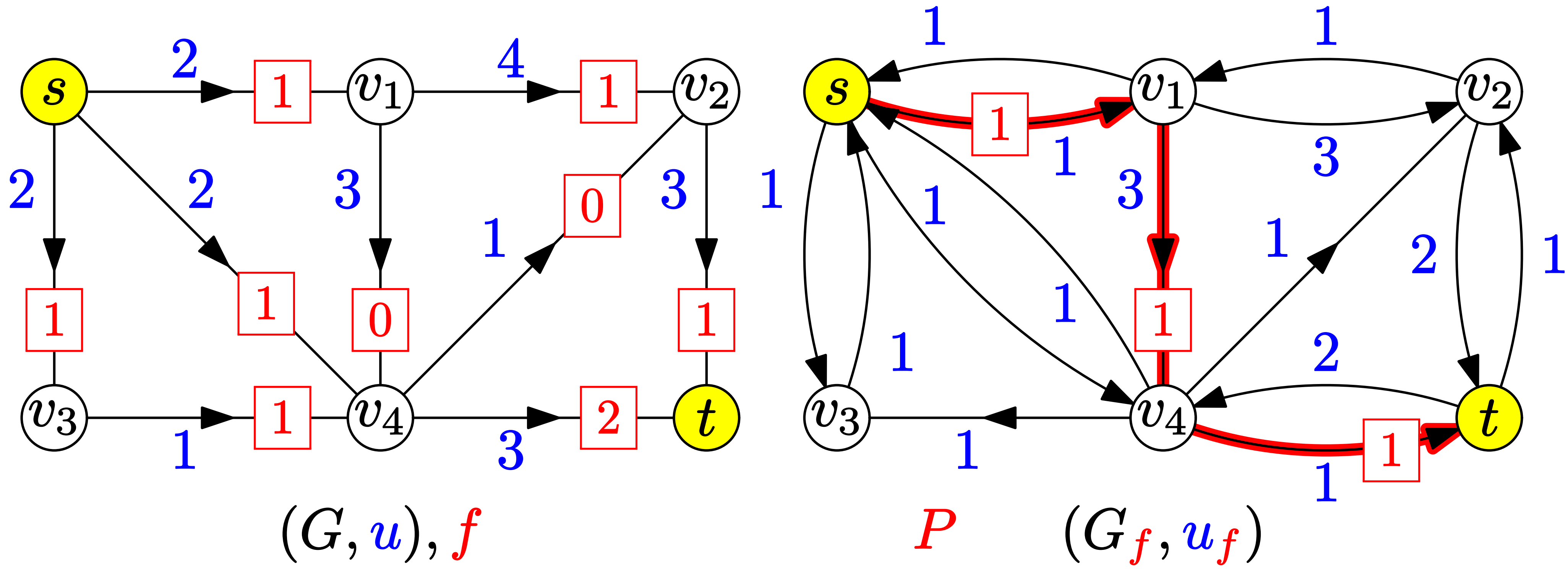
增加道：例



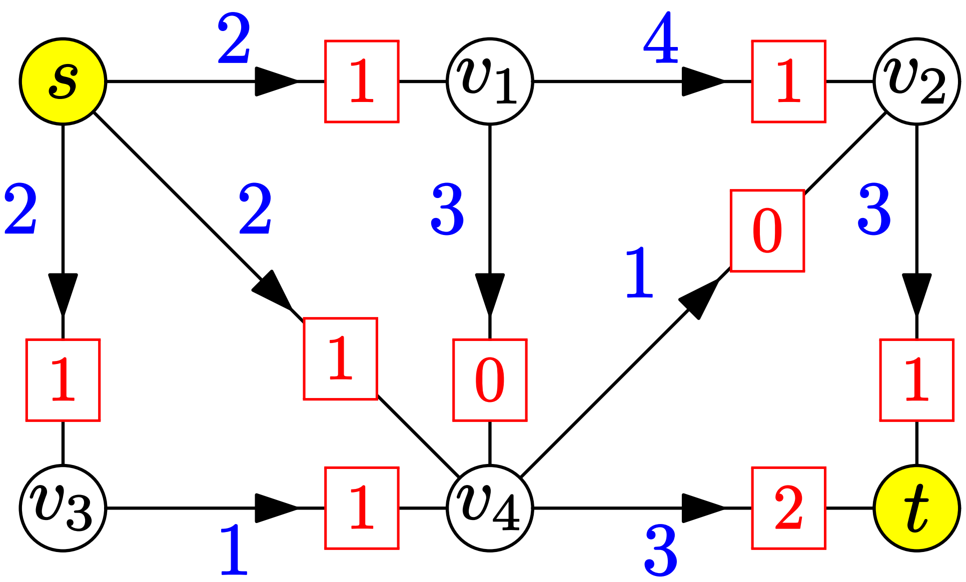
$(G, u), f$



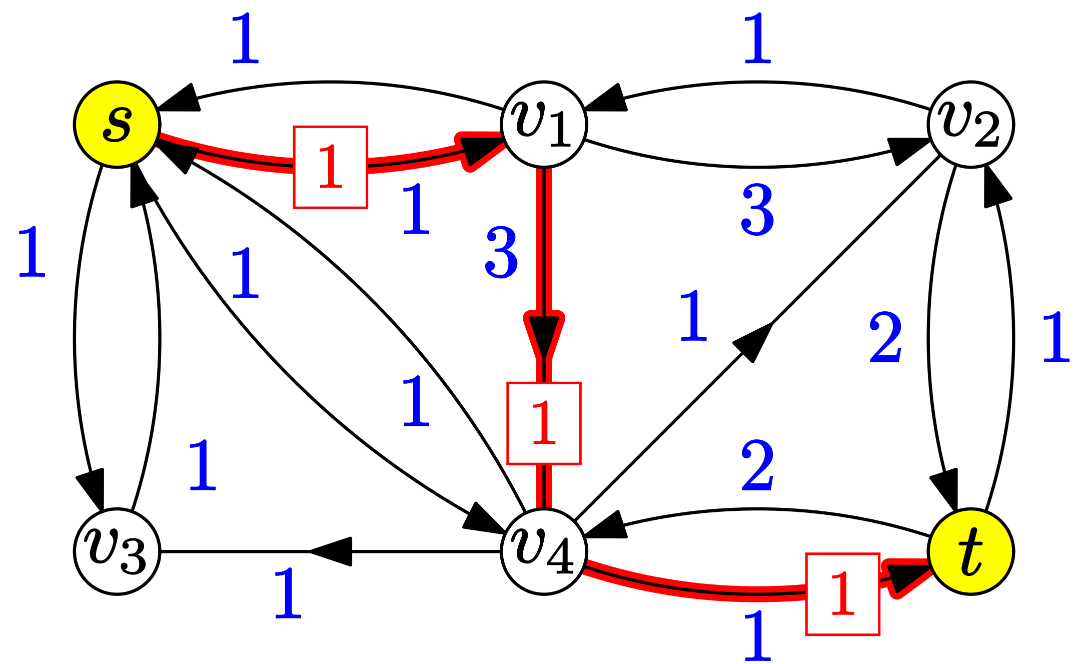
(G_f, u_f)



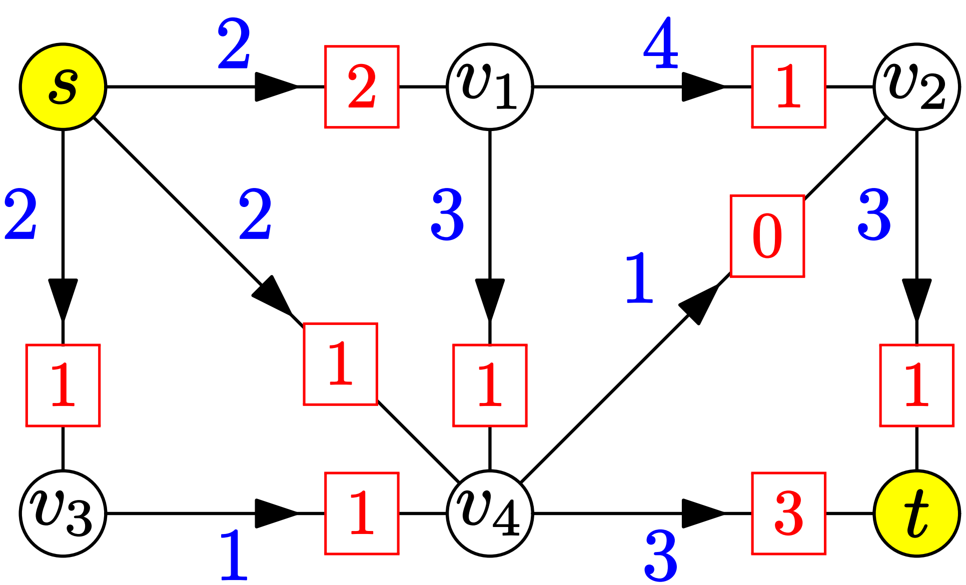
$(G, u), f$
P
(G_f, u_f)



$(G, u), f$

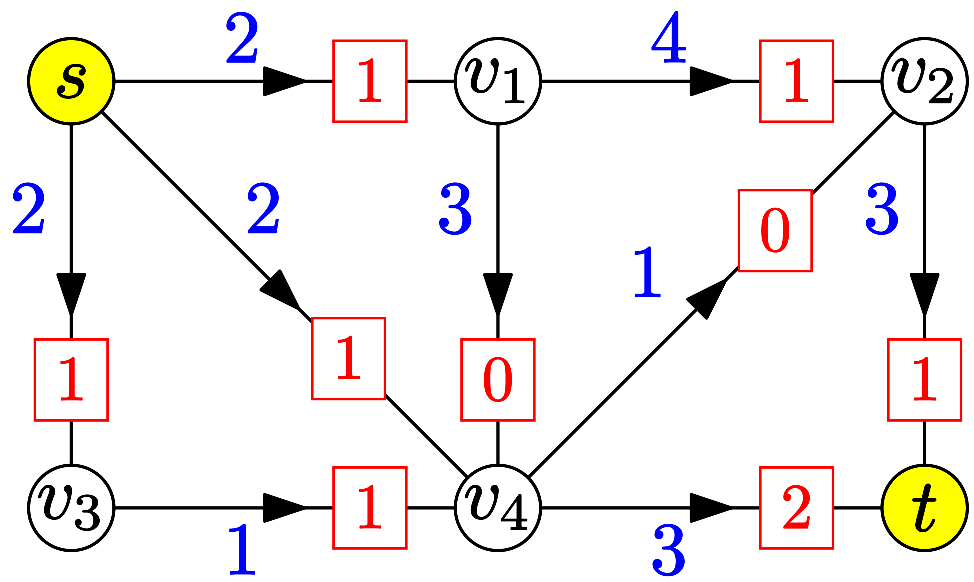


P (G_f, u_f)

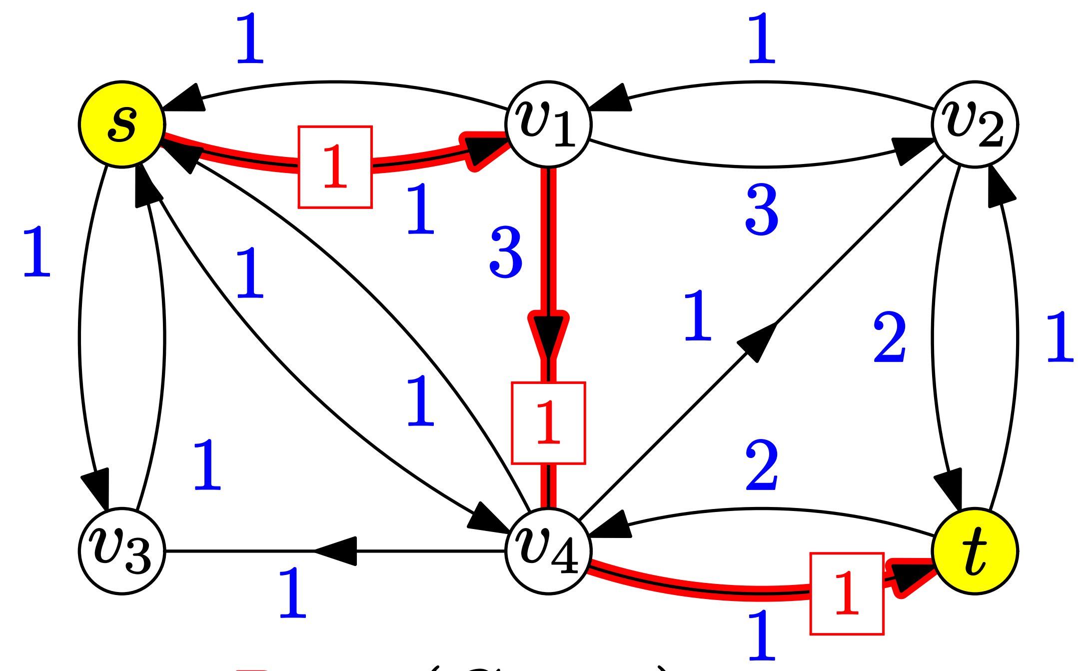


P に沿って f を増加

増加道：例

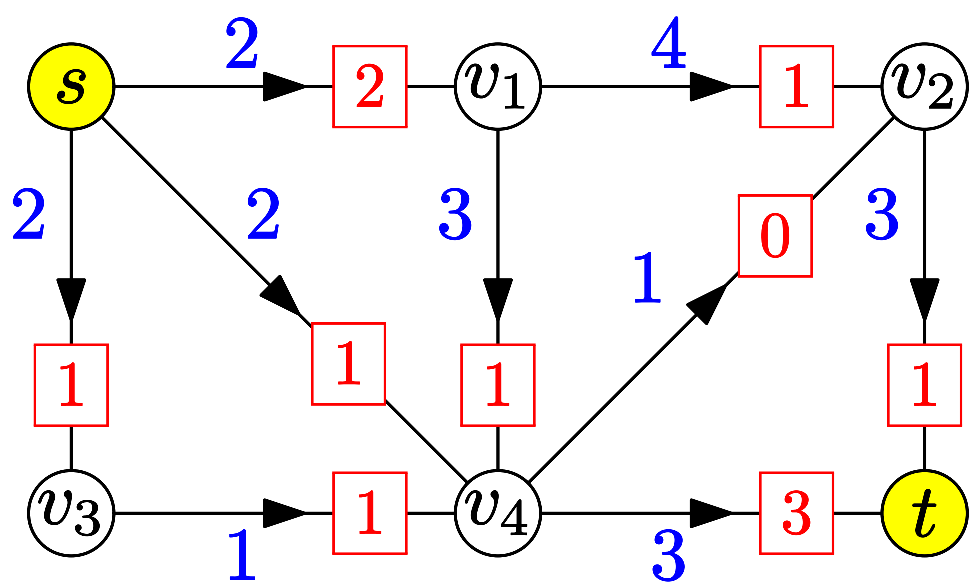


$(G, u), f$



P (G_f, u_f)

P に沿って f を増加



$\therefore$ f は最大 s-t 流ではない

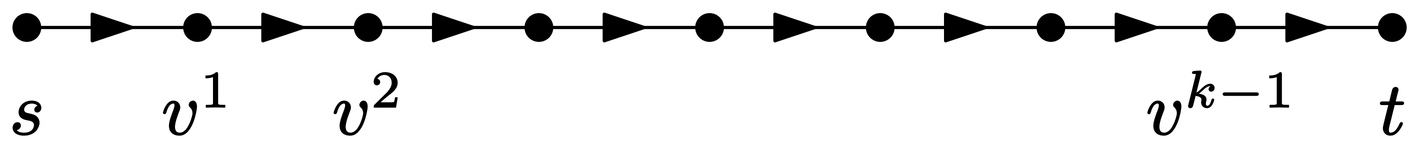
増加道：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$
f に対する補助ネットワーク (G_f, u_f)

定義：増加道 (augmenting path，増加路)

f に対する **増加道** とは，G_f における s-t 道のこと

s-t 道：頂点列 $(v^0, v^1, v^2, \ldots, v^{k-1}, v^k)$ で，
(v^i, v^{i+1}) が弧であり ($i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$)，
$v^0 = s$，$v^k = t$ であるもの



流の増加：定義

設定：f に対する増加道 $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t)$

定義：流の増加

P に沿って f を増加する操作は，次の f' を得ること

- $\delta = \min\{u_f(v_i, v_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$ とする
- このとき，$(v, v') \in A$ に対して

$$f'(v, v') = \begin{cases} f(v, v') + \delta & ((v, v') \in P \cap A_f^{\mathrm{F}}), \\ f(v, v') - \delta & ((v', v) \in P \cap A_f^{\mathrm{B}}), \\ f(v, v') & (\text{その他}) \end{cases}$$

P の連続する 2 頂点を P の弧と見なしている

設定：f に対する増加道 $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t)$
P に沿って f を増加して得られた f'

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流
2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

証明：補足動画にて □

流の増加：性質

設定：f に対する増加道 $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t)$
P に沿って f を増加して得られた f'

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流
2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

証明：補足動画にて □

系

f に対する増加道が存在 $\Rightarrow$ f は最大 s-t 流ではない

系の対偶

f は最大 s-t 流 $\Rightarrow$ f に対する増加道が存在しない

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

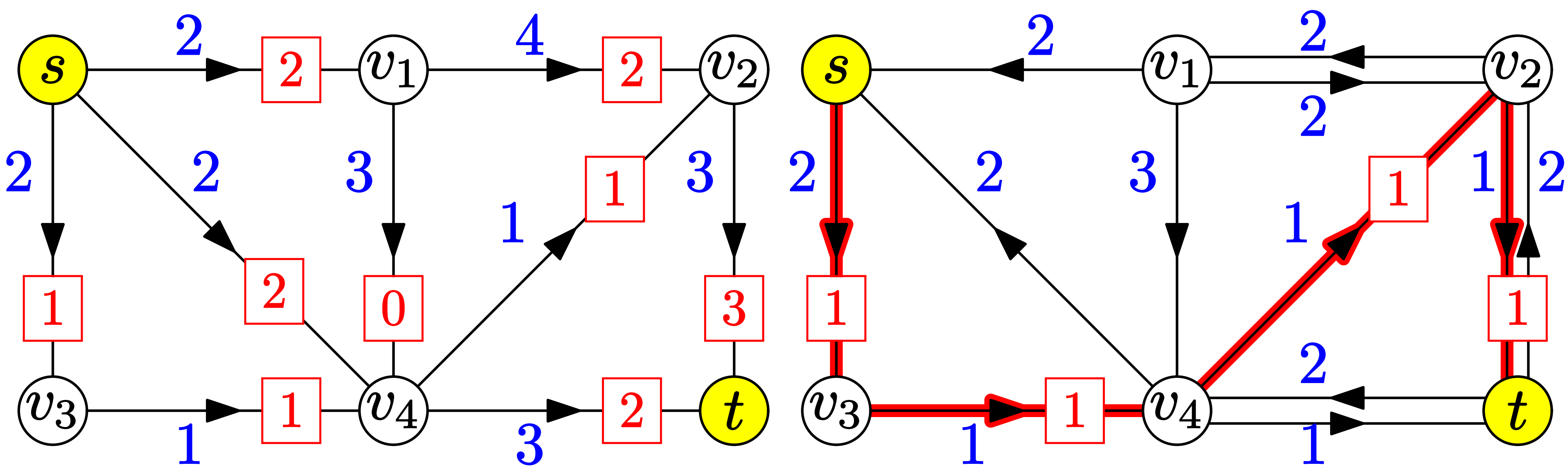
性質：最大流問題の最適性条件

f が最大 s-t 流 $\Leftrightarrow$ f に対する増加道が存在しない

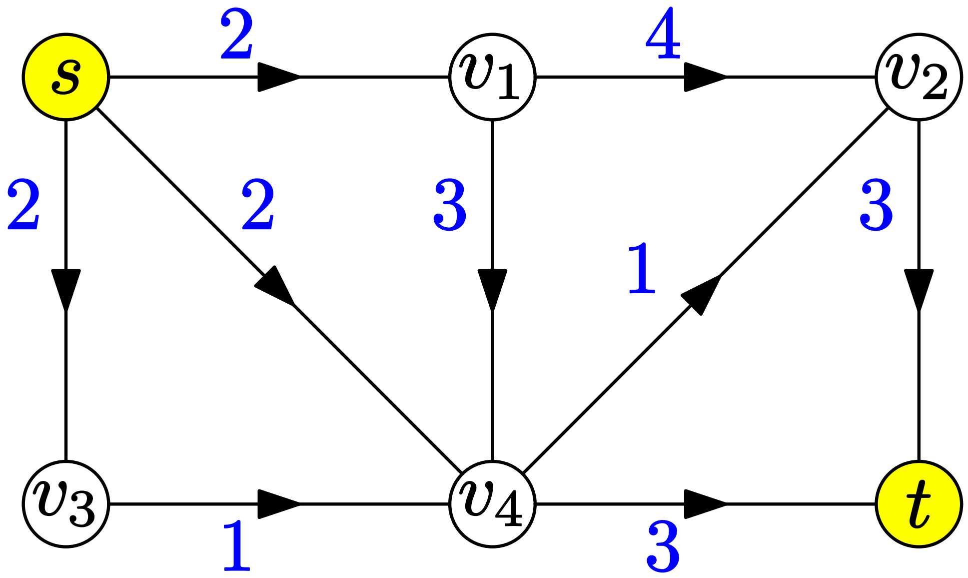
「$\Rightarrow$」の証明：前頁で済

「$\Leftarrow$」の証明：次の話題

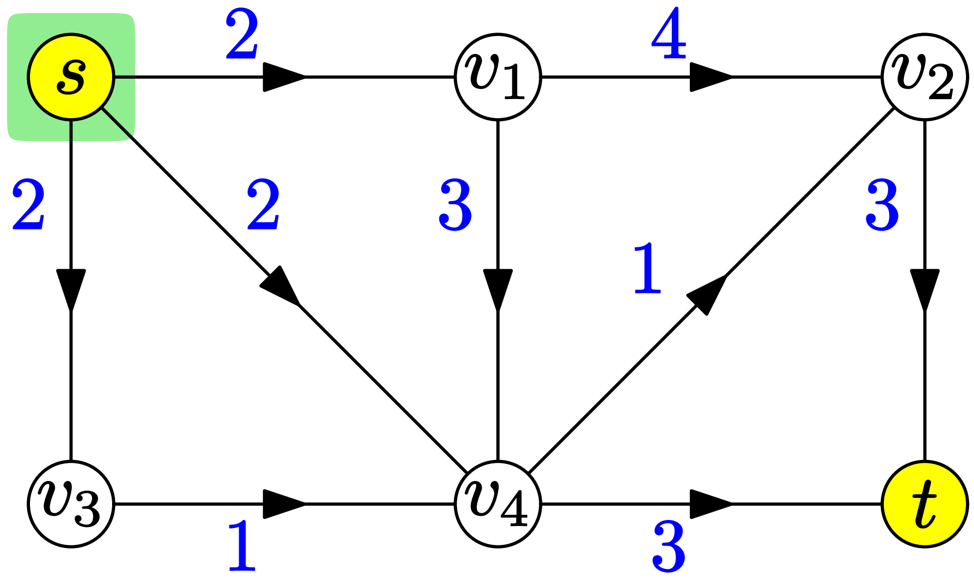
1. 準備
2. 補助ネットワークと増加道
3. **s-t カット**
4. 増加道法



s-t カット：例

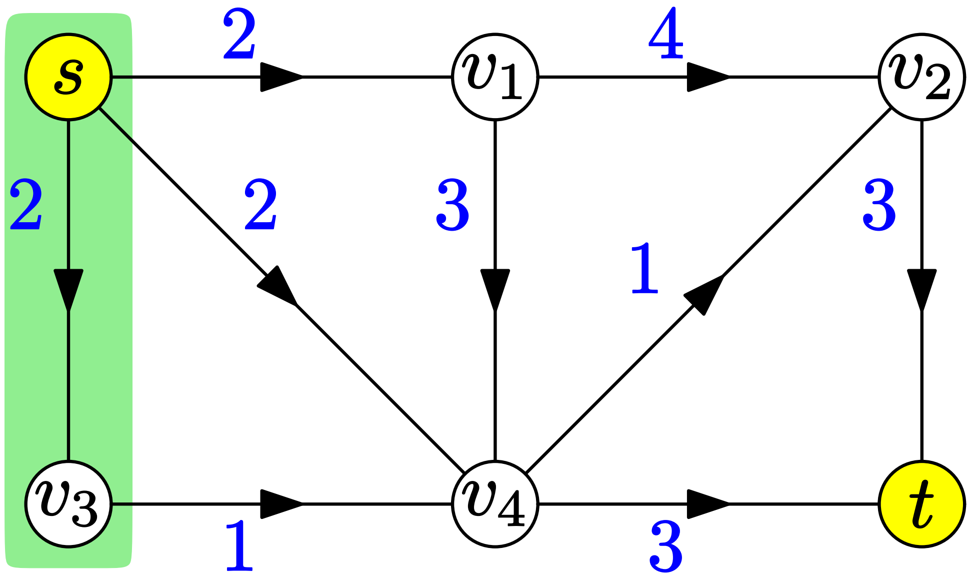


s-t カット：例



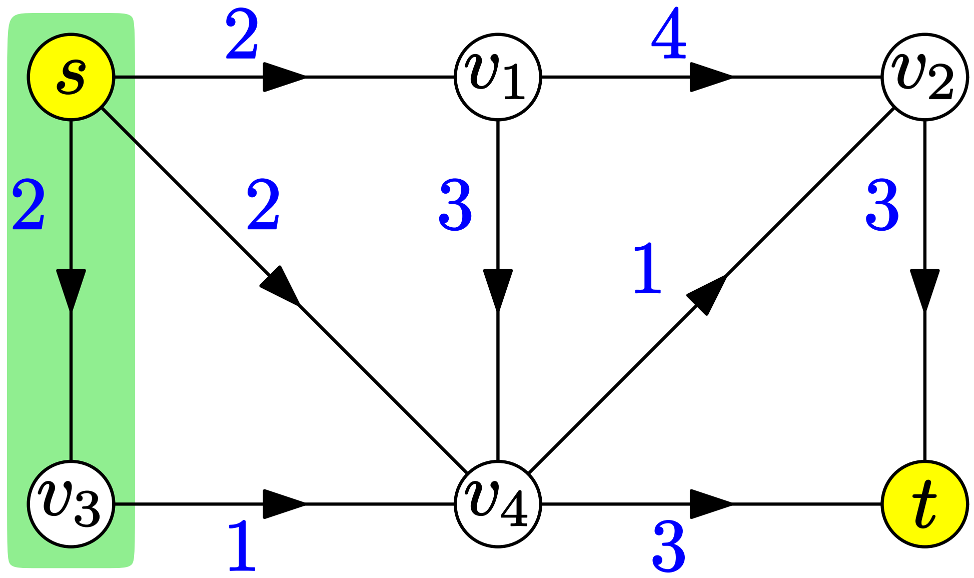
任意の s-t 流の値 ≤ 6

s-t カット：例

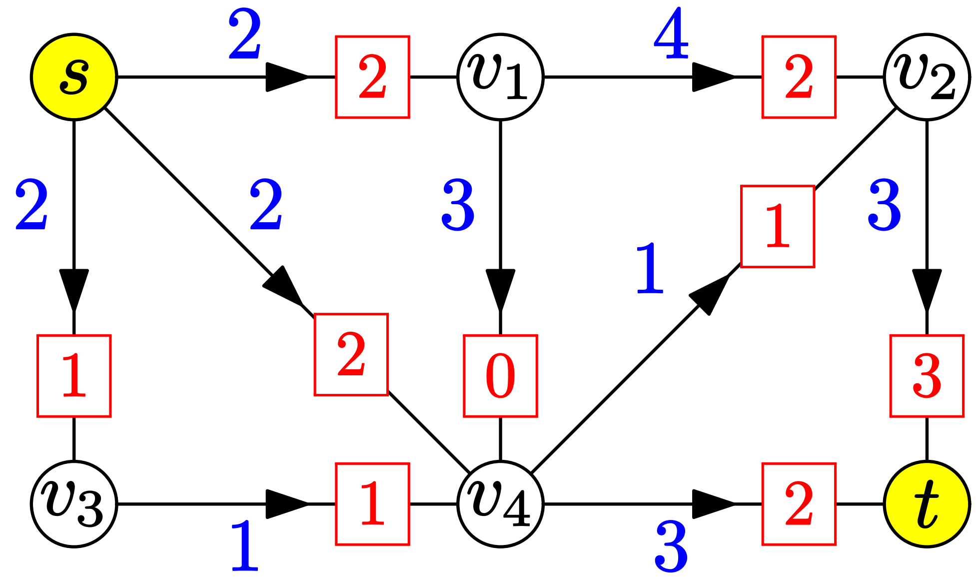


任意の s-t 流の値 ≤ 5

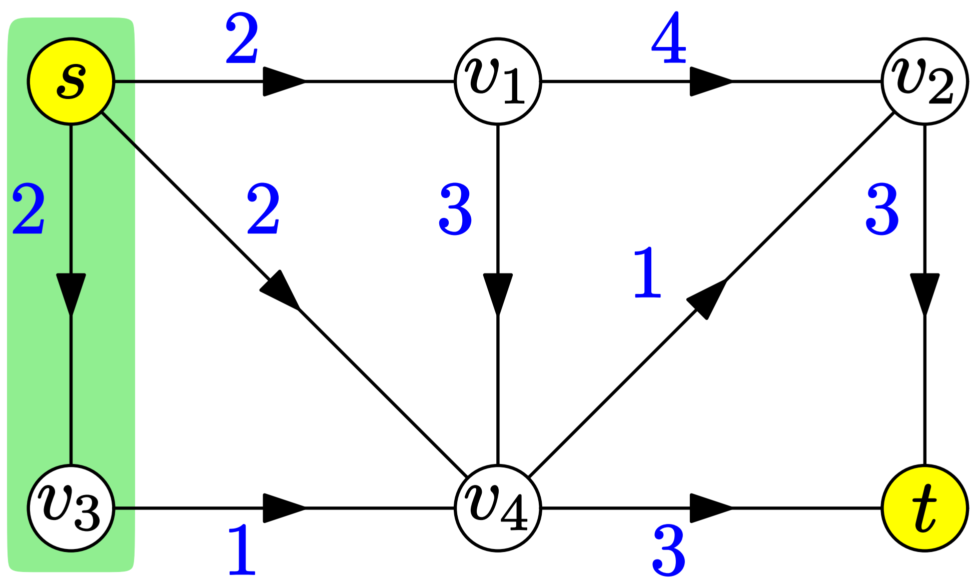
s-t カット：例

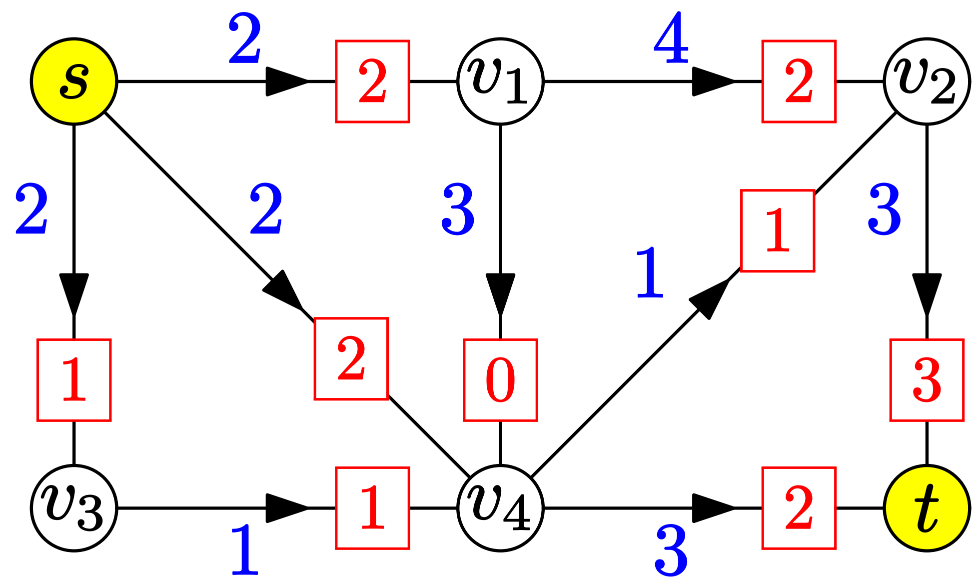


任意の s-t 流の値 ≤ 5



最大 s-t 流の値 ≥ 5

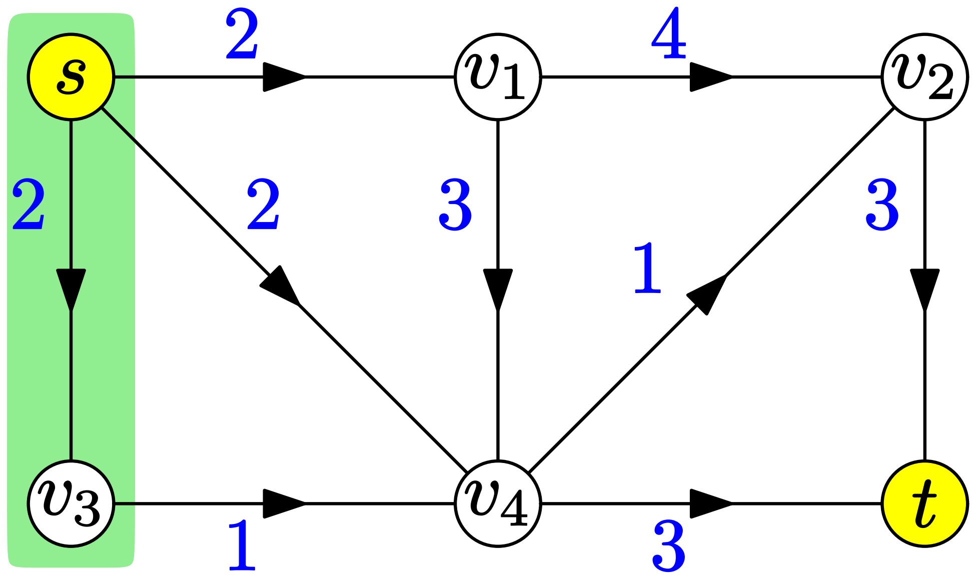




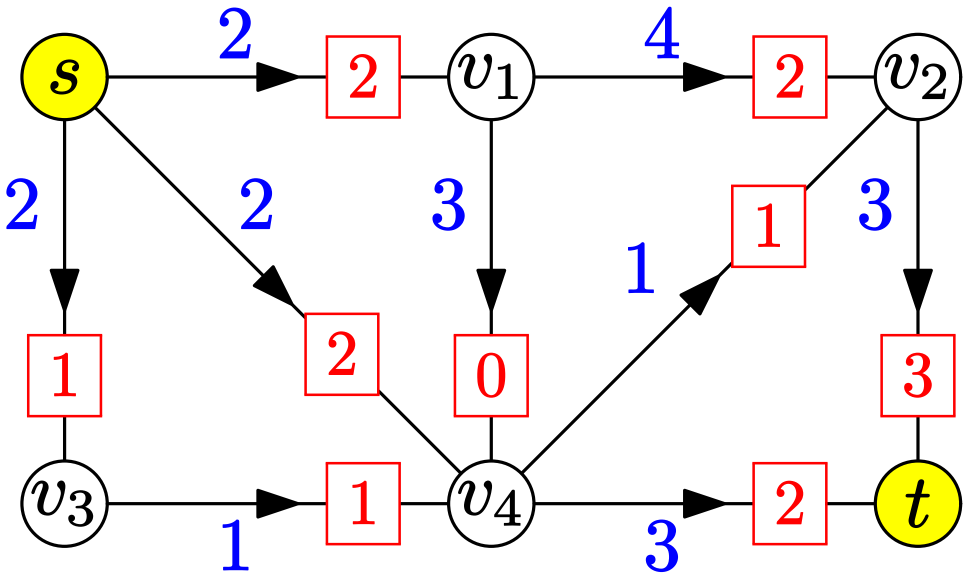
任意の s-t 流の値 ≤ 5

最大 s-t 流の値 ≥ 5

$\therefore$ 最大 s-t 流の値 $= 5$

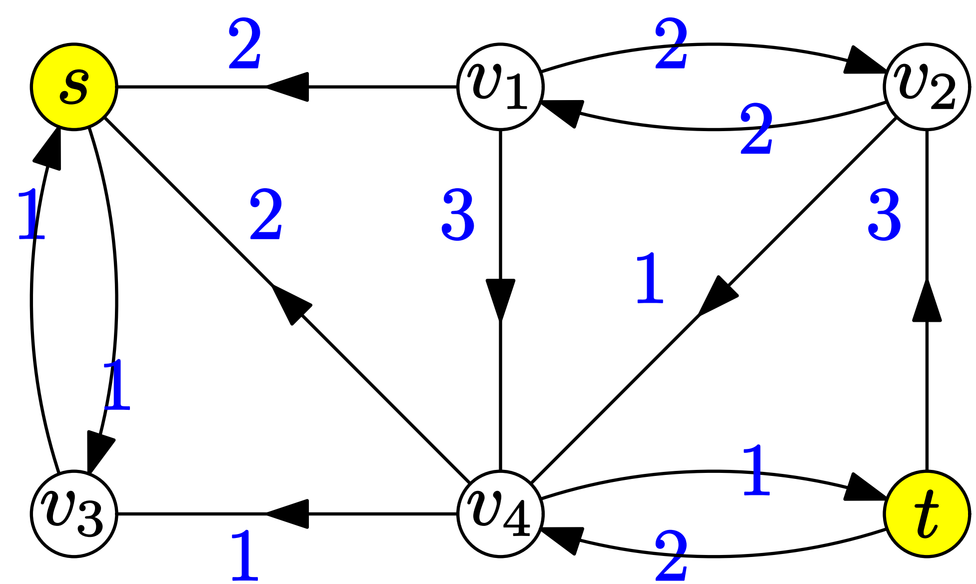


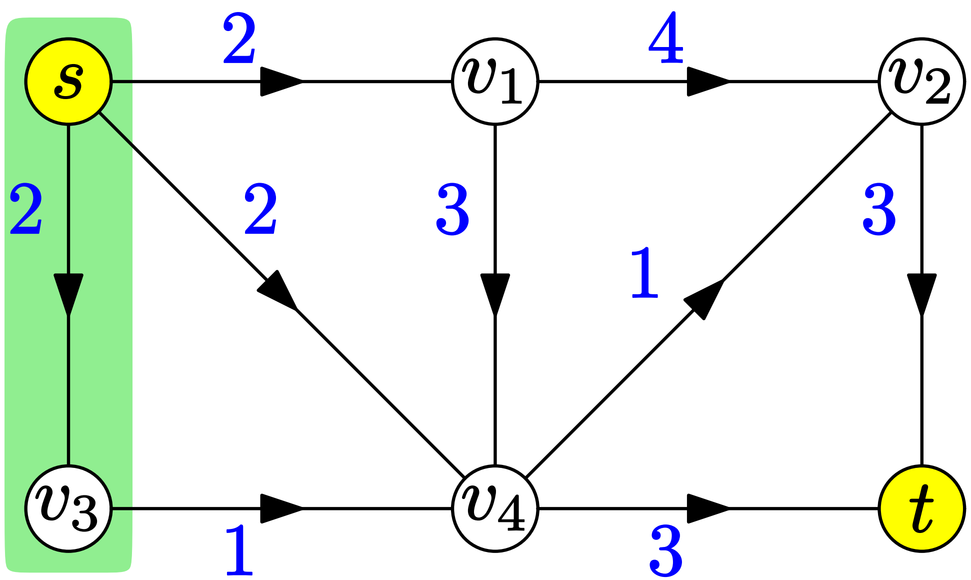
任意の s-t 流の値 ≤ 5

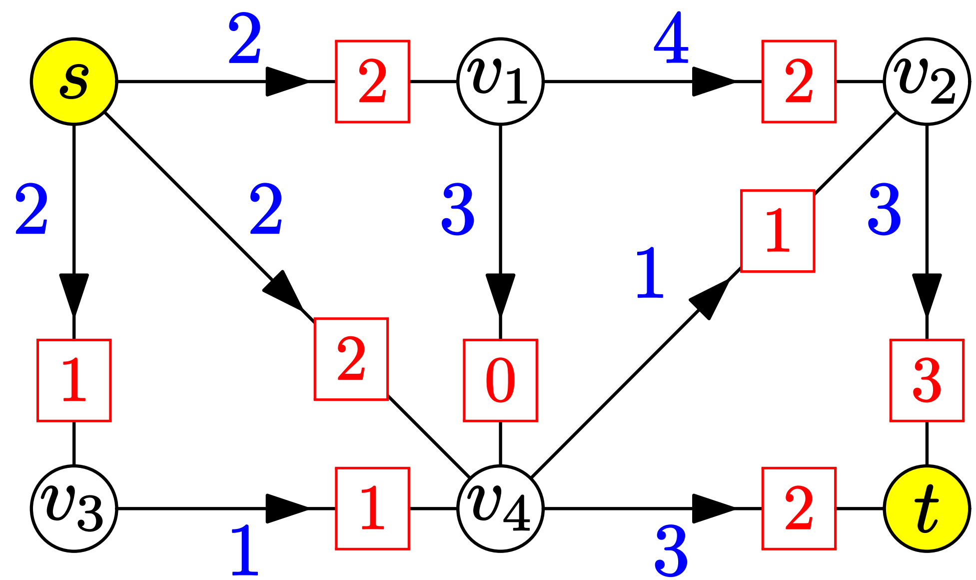


最大 s-t 流の値 ≥ 5

$\therefore$ 最大 s-t 流の値 $= 5$





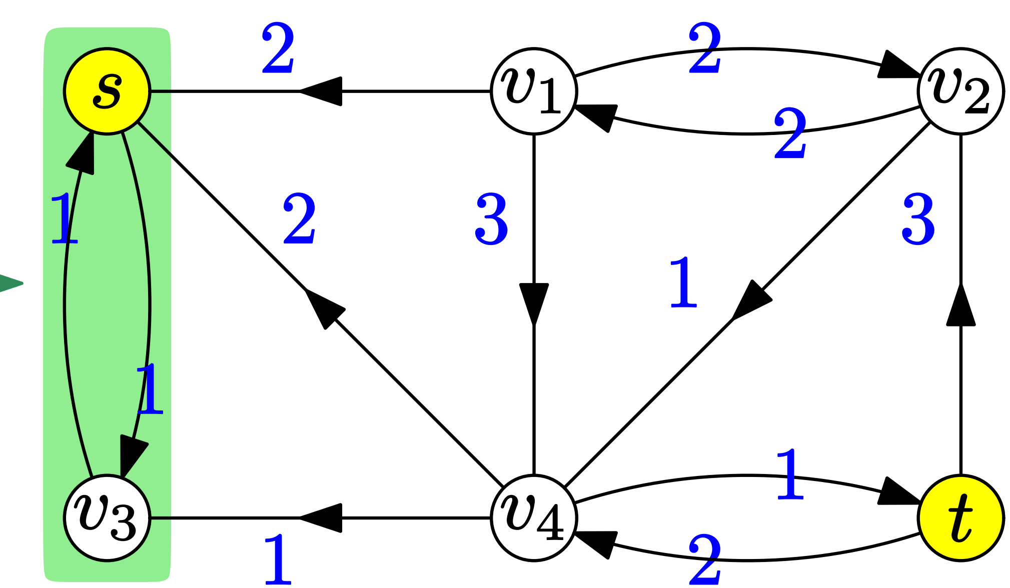


任意の s-t 流の値 $\leq$ 5

最大 s-t 流の値 $\geq$ 5

$\therefore$ 最大 s-t 流の値 $=$ 5

s から到達可能な
頂点全体の集合

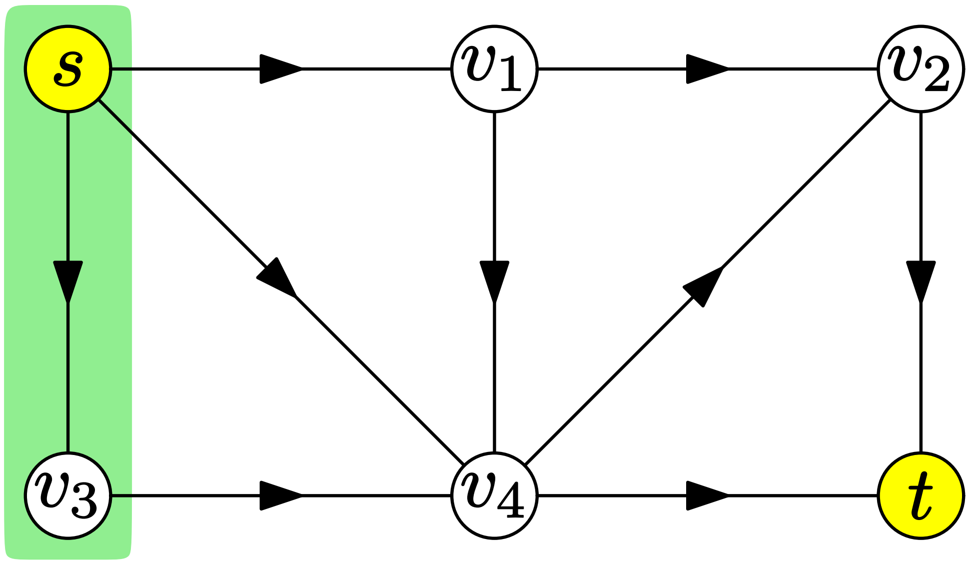


s-t カット：定義

有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$

定義：s-t カット (s-t cut)

G の **s-t カット** とは，頂点部分集合 $S\subseteq V$ で
$s\in S$ と $t\notin S$ を満たすもののこと

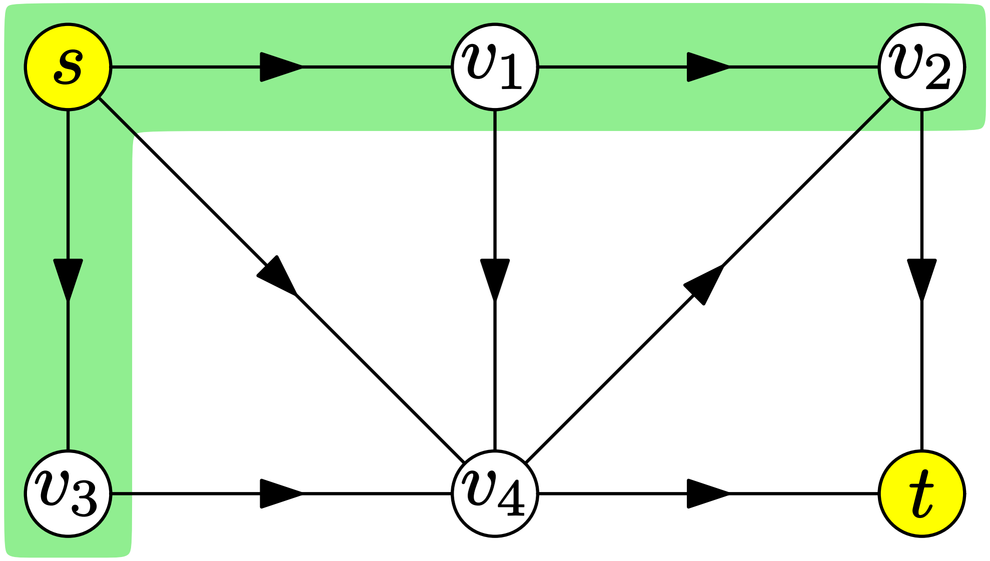


$S=\{s,v_3\}$

有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$

定義：s-t カット (s-t cut)

G の **s-t カット** とは，頂点部分集合 $S \subseteq V$ で
$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



$$S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$$

s-t カットの容量：定義

有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$

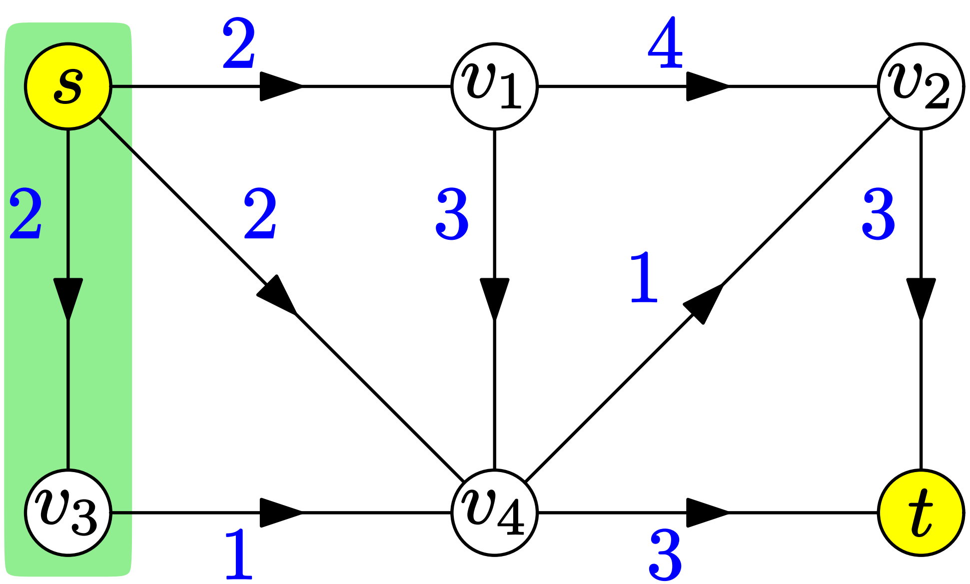
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：s-t カットの容量 (capacity)

s-t カット S の **容量** を次で定義する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a)$$

ここで，$\delta^+(S) = \{(v, v') \in A \mid v \in S, v' \notin S\}$



$S = \{s, v_3\}$

$\mathrm{cap}(S) = 5$

s-t カットの容量：定義

有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$

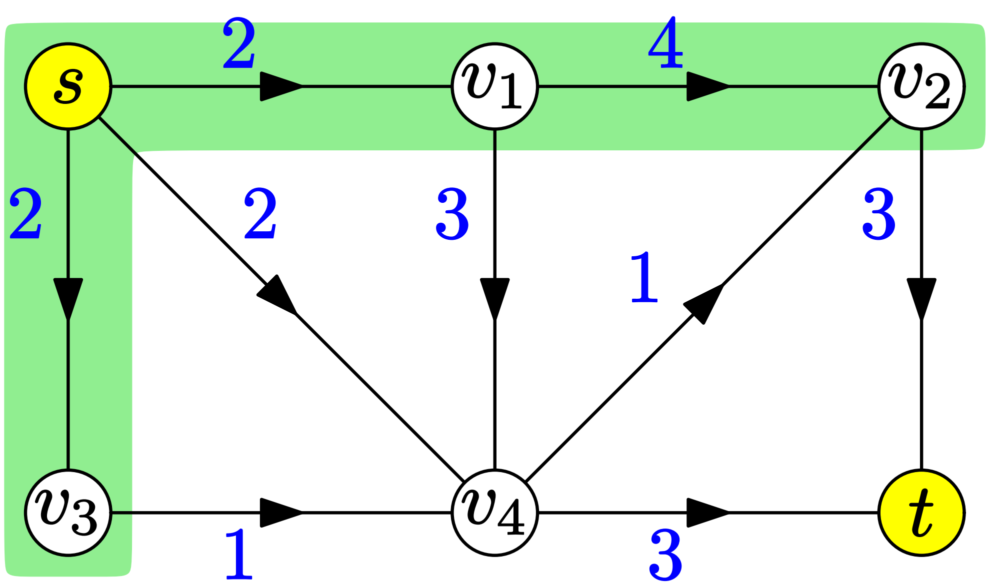
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：s-t カットの容量 (capacity)

s-t カット S の **容量** を次で定義する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a)$$

ここで，$\delta^+(S) = \{(v, v') \in A \mid v \in S, v' \notin S\}$



$S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$

$\mathrm{cap}(S) = 9$

s-t カットと s-t 流の値

有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，s-t カット $S \subseteq V$

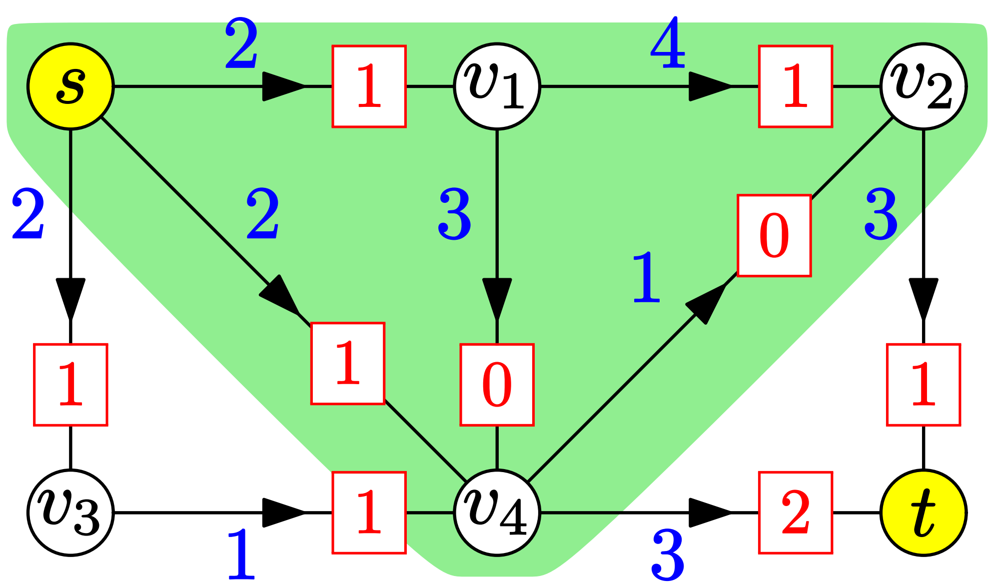
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：s-t カットと s-t 流の値

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} f(a)$$

S の補集合

証明：レポート問題



$S = \{s, v_1, v_2, v_4\}$

$$\sum_{a \in \delta^+(S)} f(a) = 4$$

$$\sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} f(a) = 1$$

$\mathrm{val}(f) = 3$

有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$， s-t カット $S\subseteq V$
弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$， s-t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

性質：s-t 流と s-t カットと弱双対性

$$\mathrm{val}(f)\le \mathrm{cap}(S)$$

証明：

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a\in\delta^+(S)} f(a) - \sum_{a\in\delta^+(\overline{S})} f(a)$$

$\square$

s-t 流と s-t カットの弱双対性

有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$， s-t カット $S\subseteq V$

弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$， s-t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

性質：s-t 流と s-t カットと弱双対性

$$\mathrm{val}(f)\le\mathrm{cap}(S)$$

証明：

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a\in\delta^+(S)} \underbrace{f(a)}_{\le u(a)} - \sum_{a\in\delta^+(\overline{S})} \underbrace{f(a)}_{\ge 0} \quad (\because \text{容量制約})$$

□

有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，s-t カット $S \subseteq V$
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：s-t 流と s-t カットと弱双対性

$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= \sum_{a \in \delta^+(S)} \underbrace{f(a)}_{\leq u(a)} - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} \underbrace{f(a)}_{\geq 0} \qquad (\because \text{容量制約}) \\ &\leq \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a)\end{aligned}$$

$\square$

有向グラフ $G=(V,A)$，2 頂点 $s,t\in V$，s-t カット $S\subseteq V$

弧容量関数 $u\colon A\to\mathbb{R}_+$，s-t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}_+$

性質：s-t 流と s-t カットと弱双対性

$$\mathrm{val}(f)\le\mathrm{cap}(S)$$

<u>証明</u>：

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(f) &= \sum_{a\in\delta^+(S)}\underbrace{f(a)}_{\le u(a)}-\sum_{a\in\delta^+(\overline{S})}\underbrace{f(a)}_{\ge 0} \qquad (\because \text{容量制約})\\
&\le \sum_{a\in\delta^+(S)}u(a)\\
&= \mathrm{cap}(S) \qquad \square
\end{aligned}$$

[再掲] 最適性条件

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：最大流問題の最適性条件

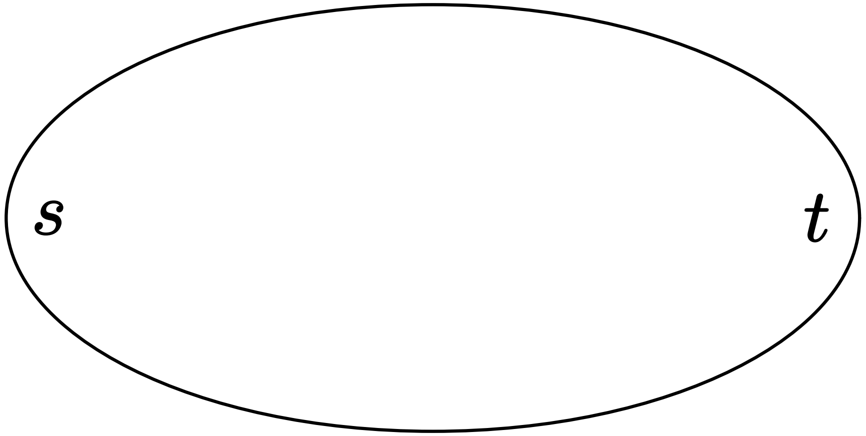
f が最大 s-t 流 $\Leftrightarrow$ f に対する増加道が存在しない

「$\Rightarrow$」の証明：済

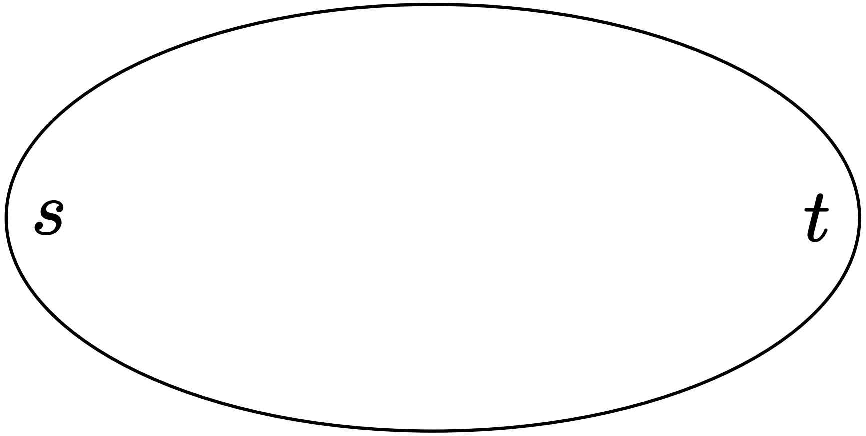
「$\Leftarrow$」の証明：次の話題　$\leftarrow$ s-t カットを使って証明する

「⇐」の証明 (1/2)

<u>「⇐」の証明</u>：f に対する増加道が存在しないと仮定する



元のネットワーク

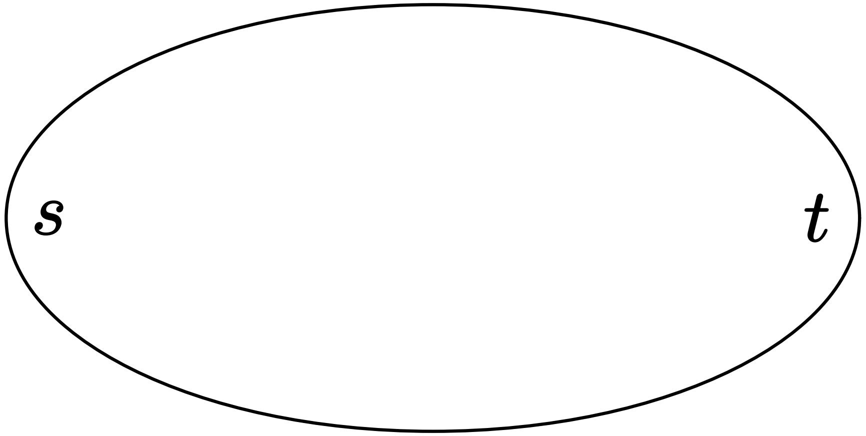


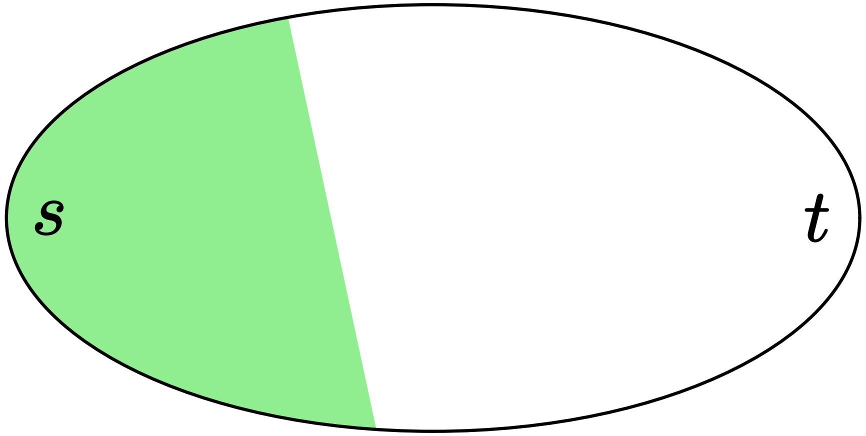
補助ネットワーク

「⇐」の証明 (1/2)

「⇐」の証明：f に対する増加道が存在しないと仮定する

- $S = \{v \in V \mid$ 補助ネットワークで s-v 道が存在$\}$ とする
- このとき，S は s-t カットである　　(なぜ？)

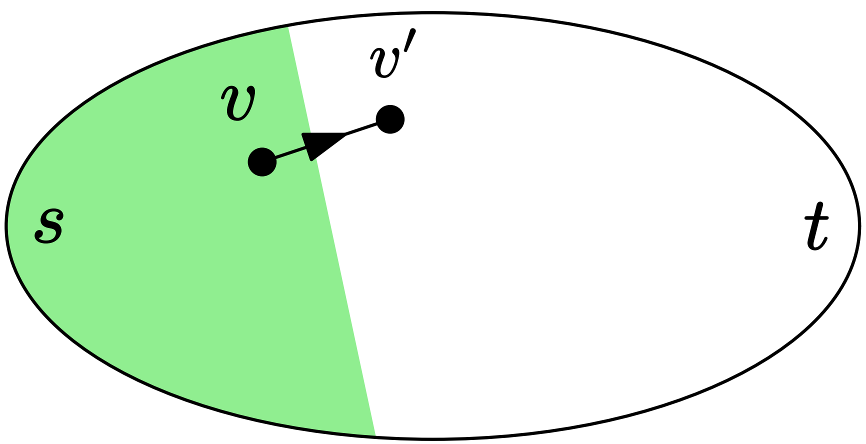




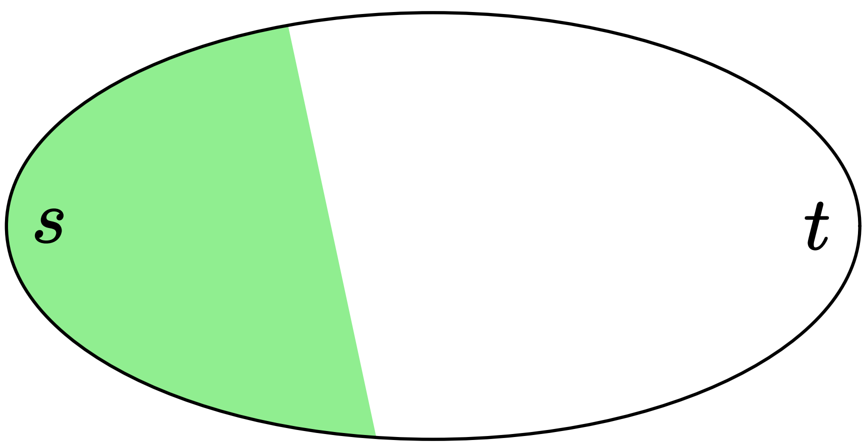
「⇐」の証明 (1/2)

「⇐」の証明：f に対する増加道が存在しないと仮定する

- $S = \{v \in V \mid$ 補助ネットワークで s-v 道が存在$\}$ とする
- このとき，S は s-t カットである （なぜ？）
- $(v, v') \in \delta^+(S)$ を考える



元のネットワーク

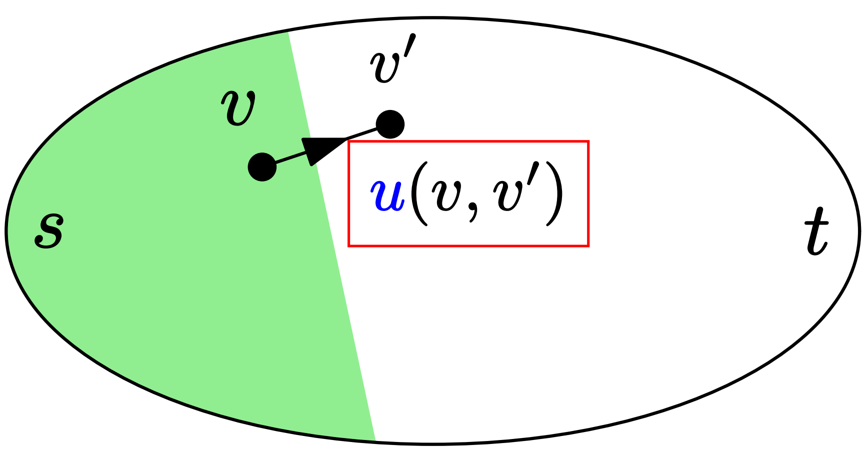


補助ネットワーク

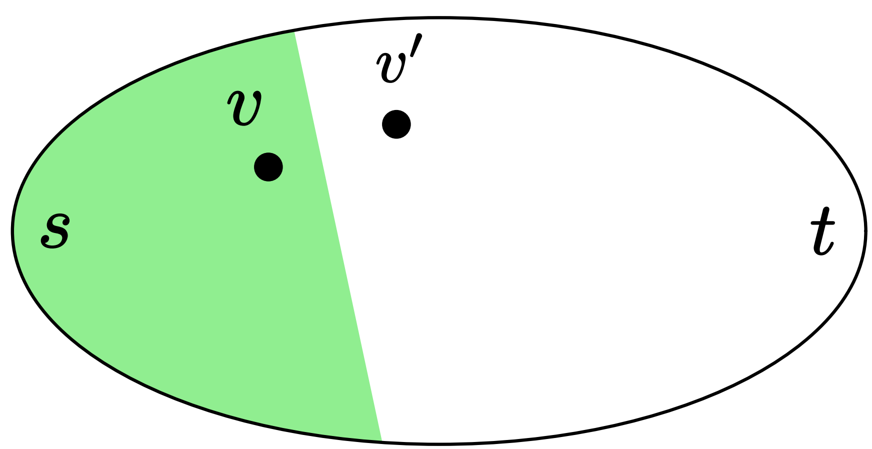
「⇐」の証明 (1/2)

「⇐」の証明：f に対する増加道が存在しないと仮定する

- $S = \{v \in V \mid$ 補助ネットワークで s-v 道が存在$\}$ とする
- このとき，S は s-t カットである　　（なぜ？）
- $(v, v') \in \delta^+(S)$ を考える
- (v, v') は補助ネットワークの弧ではないので，
  $f(v, v') = u(v, v')$



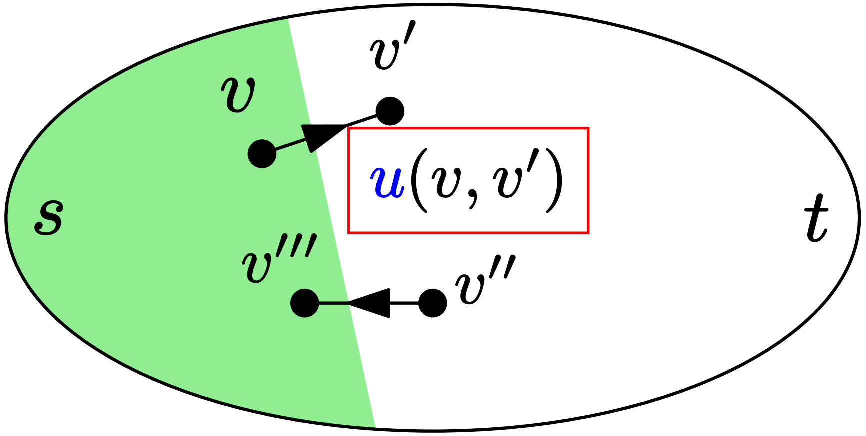
元のネットワーク



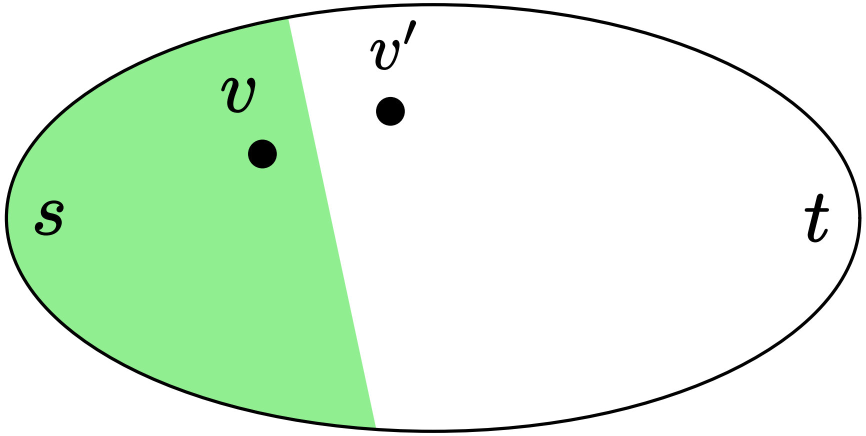
補助ネットワーク

「⇐」の証明 (続き)：

- $(v'', v''') \in \delta^+(\overline{S})$ を考える



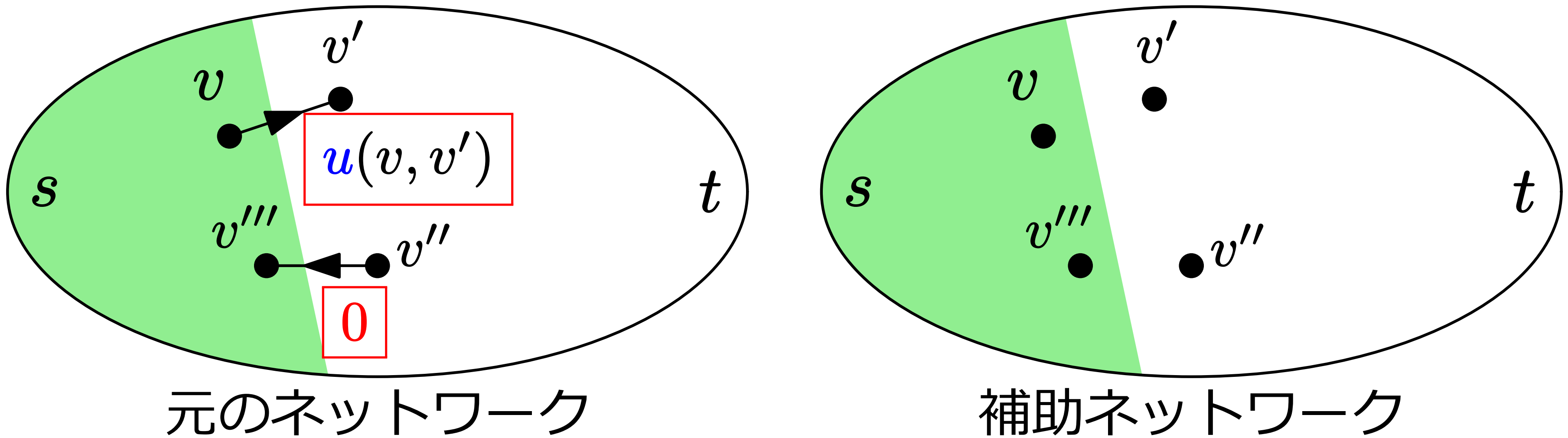
元のネットワーク



補助ネットワーク

「⇐」の証明 (続き)：

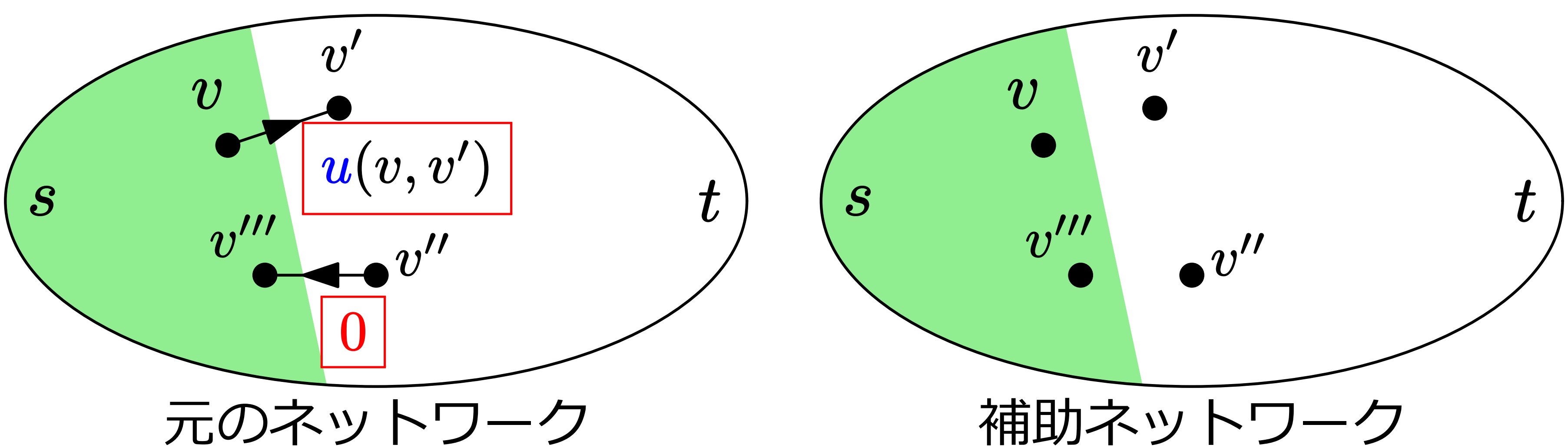
- $(v'', v''') \in \delta^+(\overline{S})$ を考える
- (v''', v'') は補助ネットワークの弧ではないので，$f(v'', v''') = 0$



「⇐」の証明 (続き):

- $(v'', v''') \in \delta^+(\overline{S})$ を考える
- (v''', v'') は補助ネットワークの弧ではないので, $f(v'', v''') = 0$
- $\therefore \mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} f(a)$

$$= \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} 0 \quad = \mathrm{cap}(S)$$



「⇐」の証明 (続き)：

- $(v'', v''') \in \delta^+(\overline{S})$ を考える
- (v''', v'') は補助ネットワークの弧ではないので，$f(v'', v''') = 0$
- $\therefore \mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} f(a)$

$$= \sum_{a \in \delta^+(S)} u(a) - \sum_{a \in \delta^+(\overline{S})} 0 \quad = \mathrm{cap}(S)$$

- 弱双対性より，f は最大 s-t 流である □

[再掲] 性質：s-t 流と s-t カットと弱双対性

$$\mathrm{val}(f) \le \mathrm{cap}(S)$$

最適性条件：まとめ

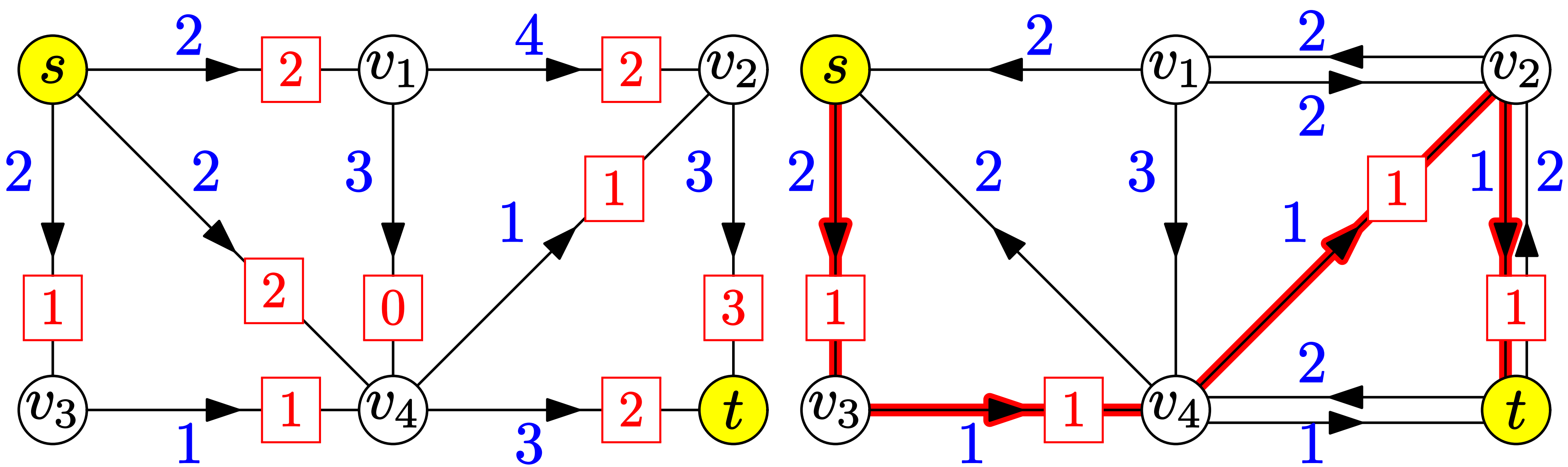
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

性質：最大流問題の最適性条件

f が最大 s-t 流 $\Leftrightarrow$ f に対する増加道が存在しない

最適性条件がアルゴリズムを示唆する $\rightsquigarrow$ 次の話題

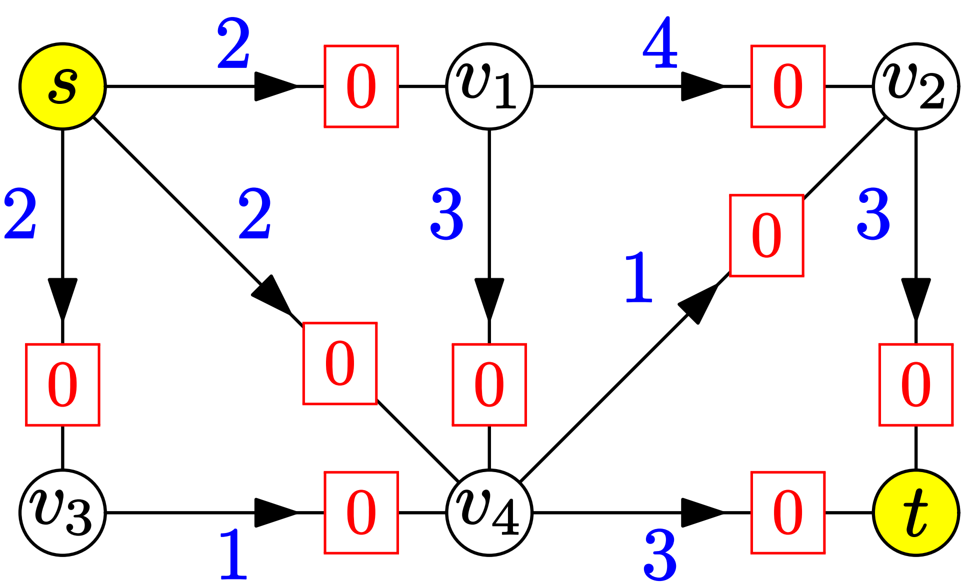
1. 準備
2. 補助ネットワークと増加道
3. s-t カット
4. **増加道法**



増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

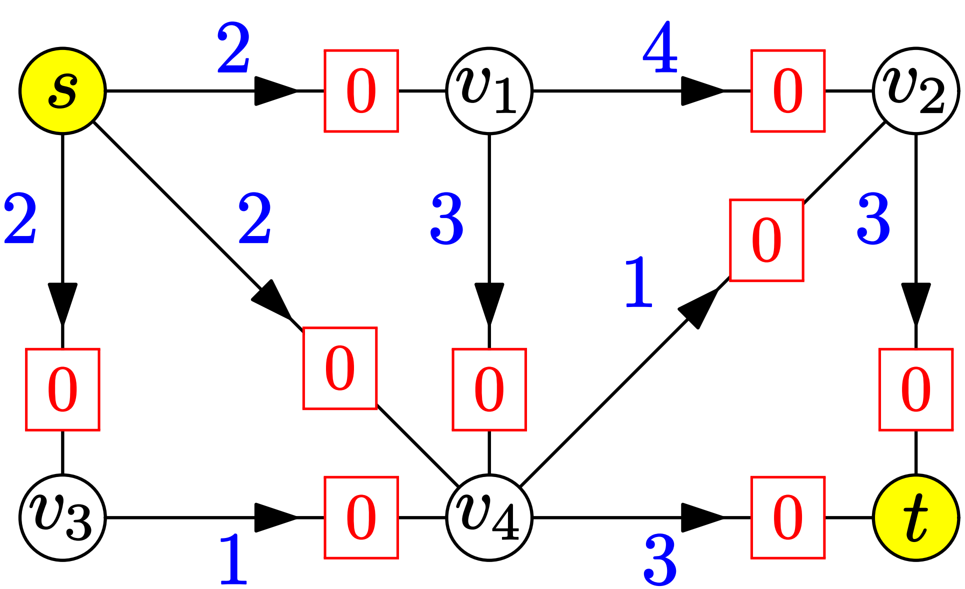
- 初期化：任意の s-t 流 f （例えば，$f = 0$）
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

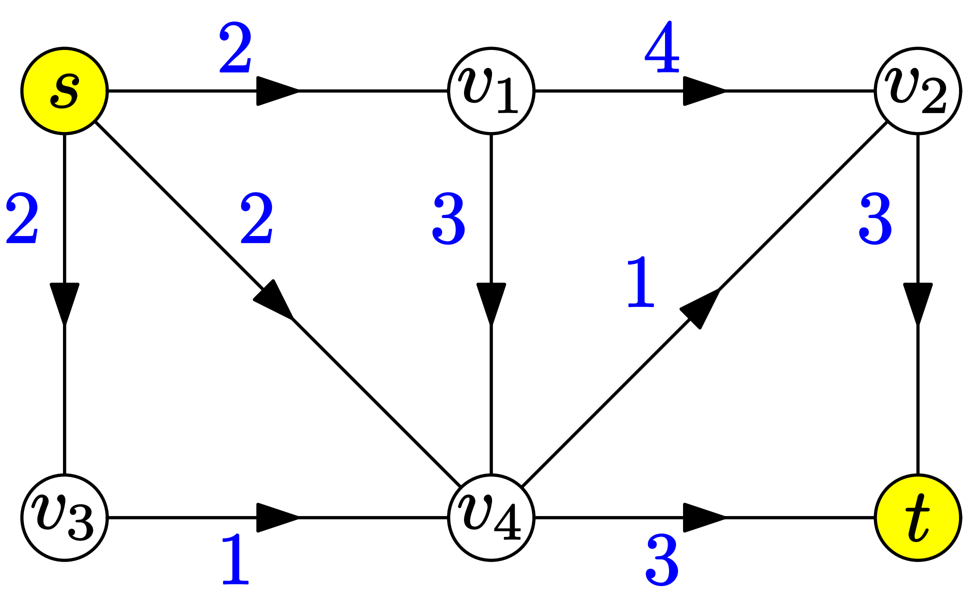


増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

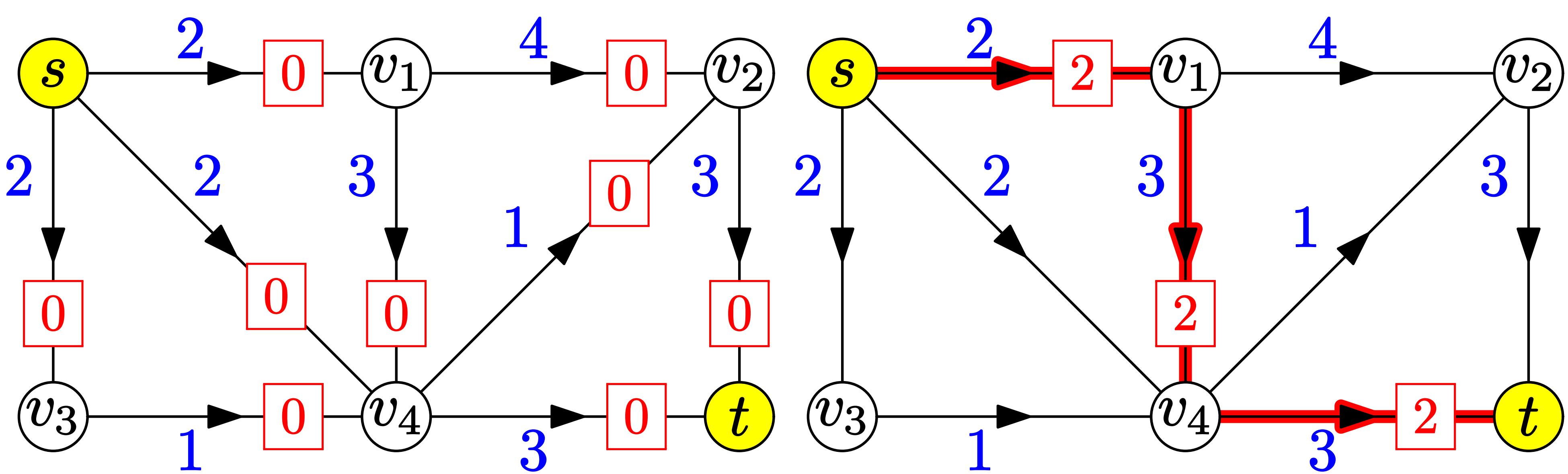
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f=0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f





アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

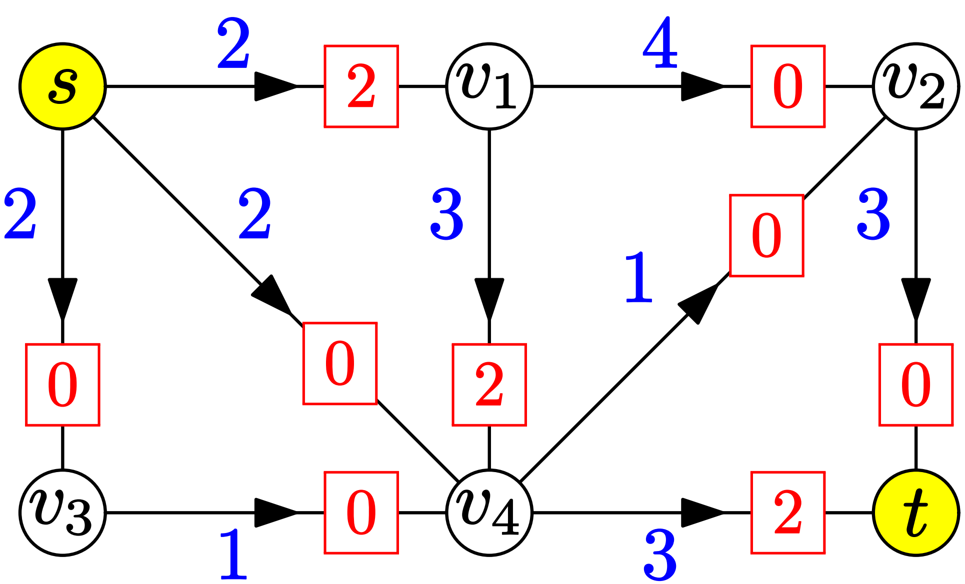
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

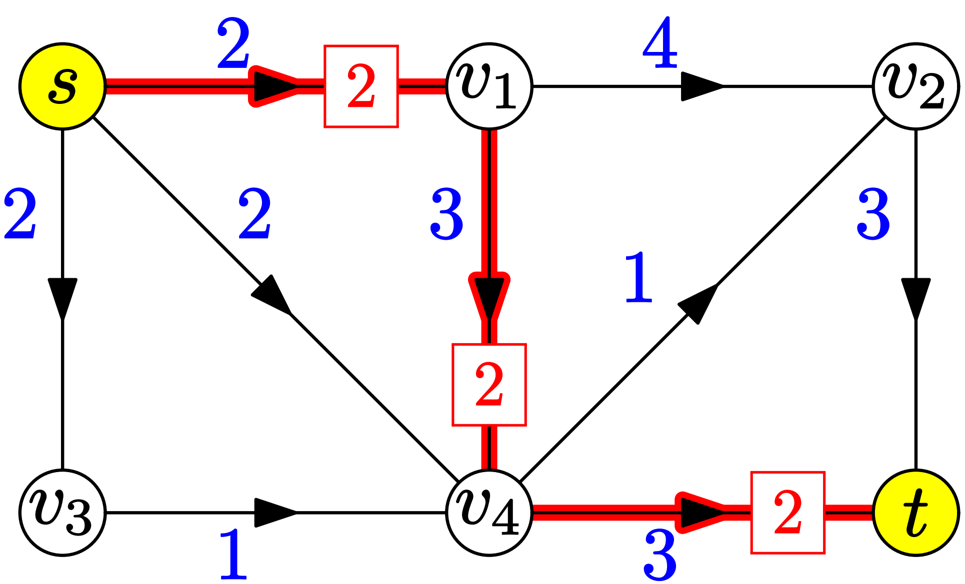


増加道法

アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f

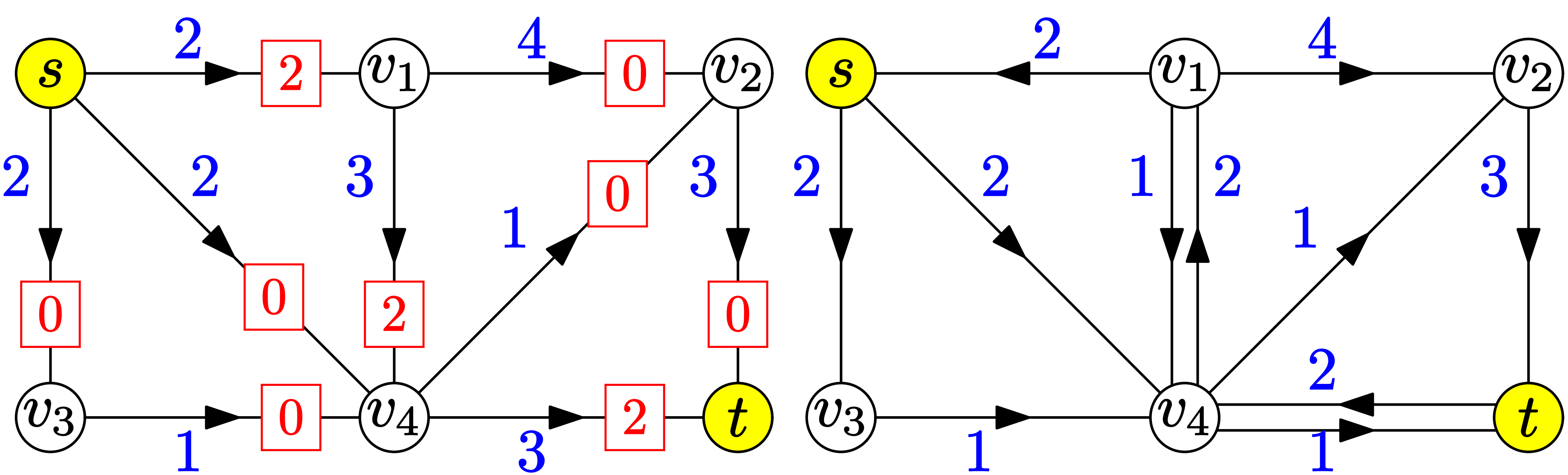




増加道法

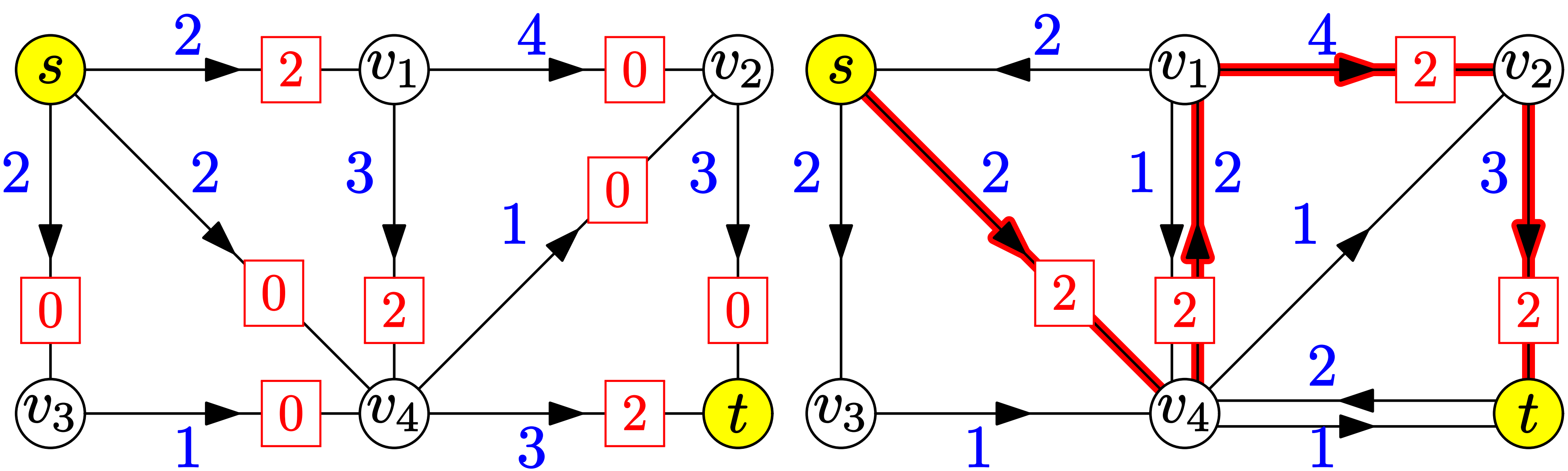
アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



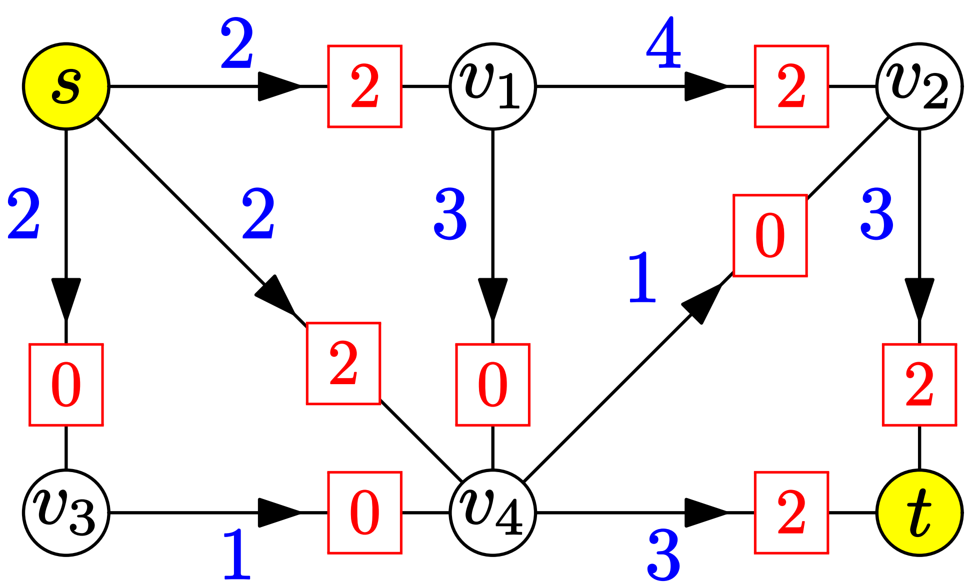
アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

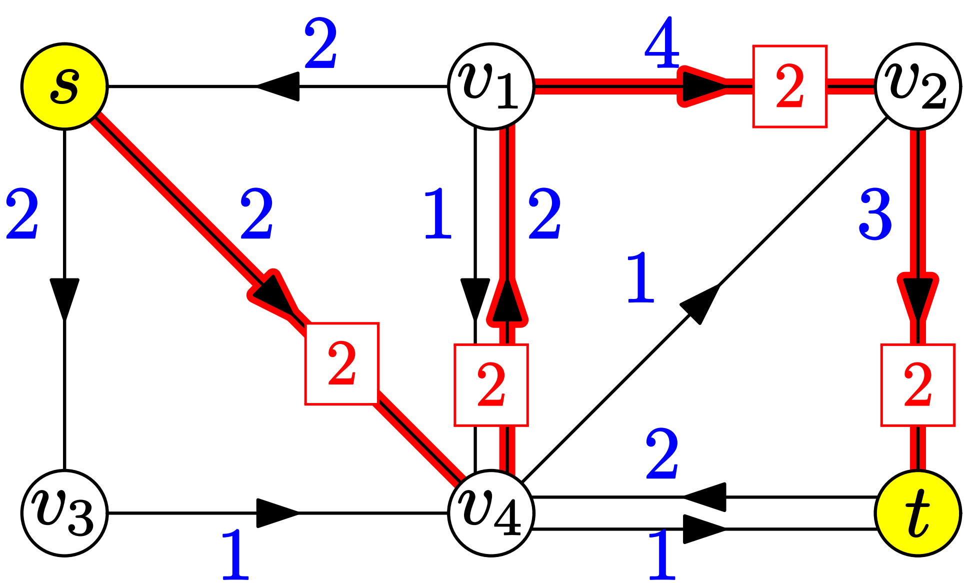
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

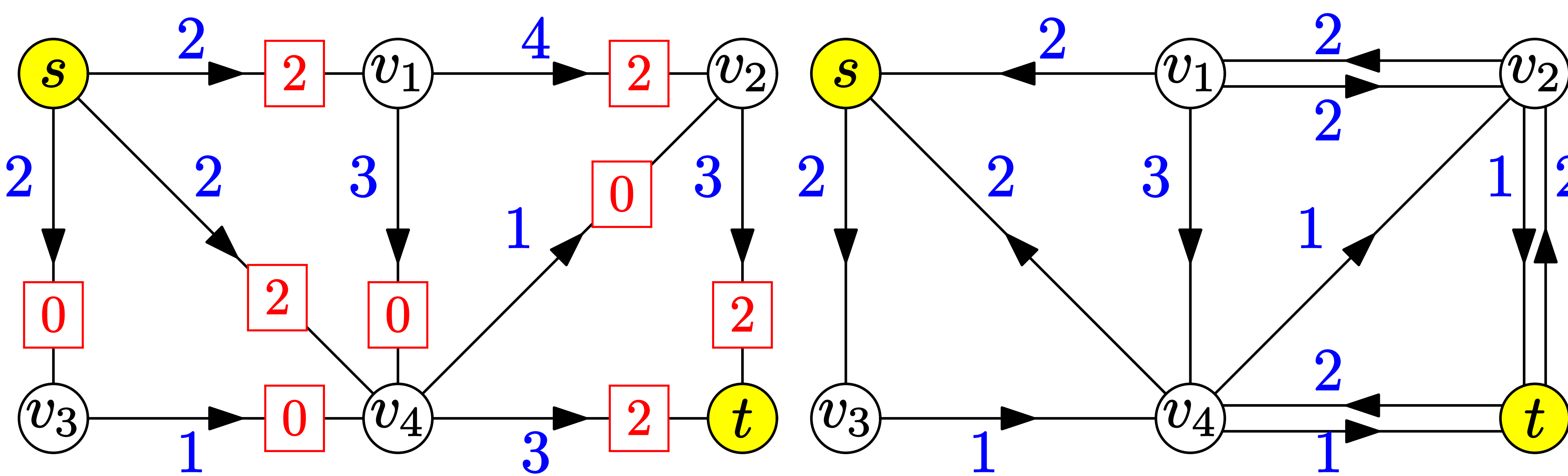
- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f





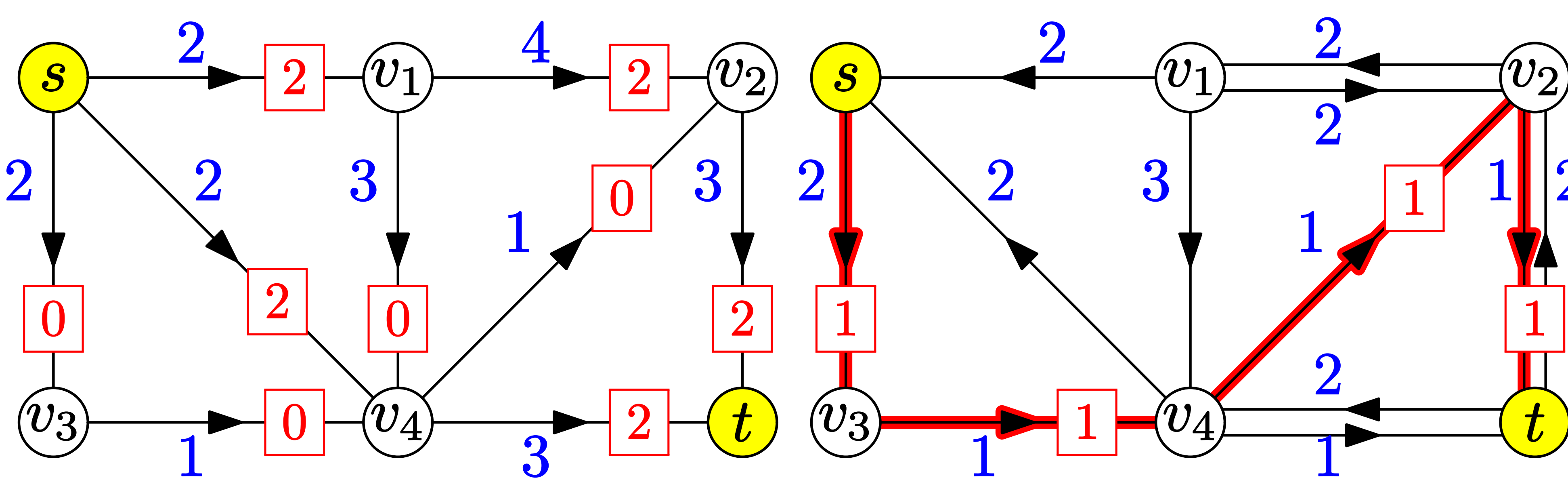
アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f (例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



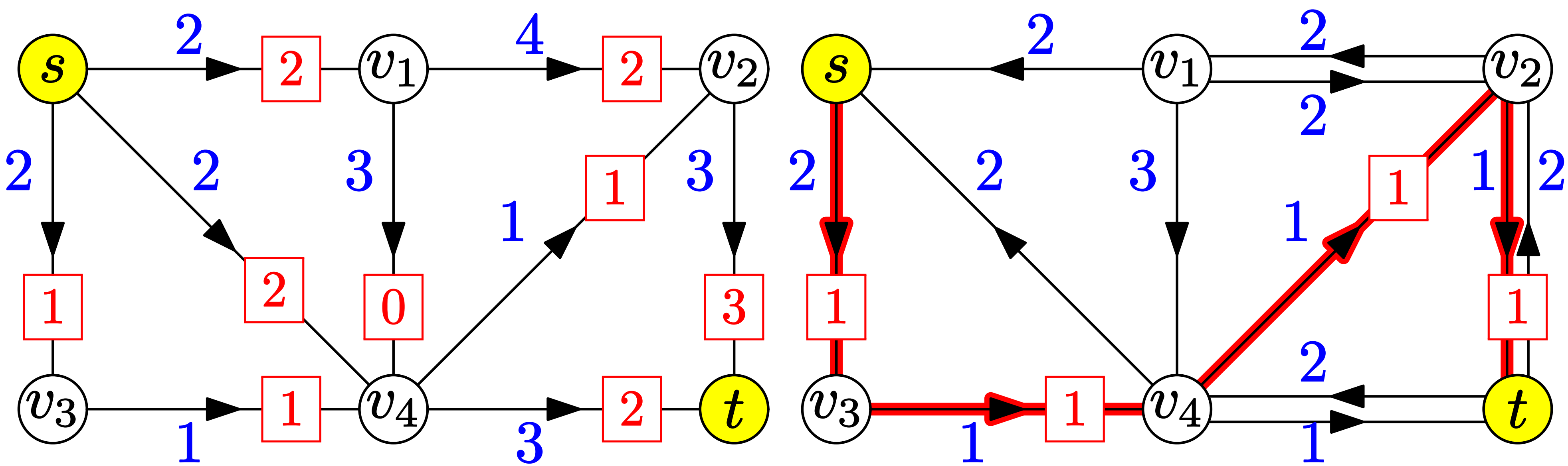
アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f　　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



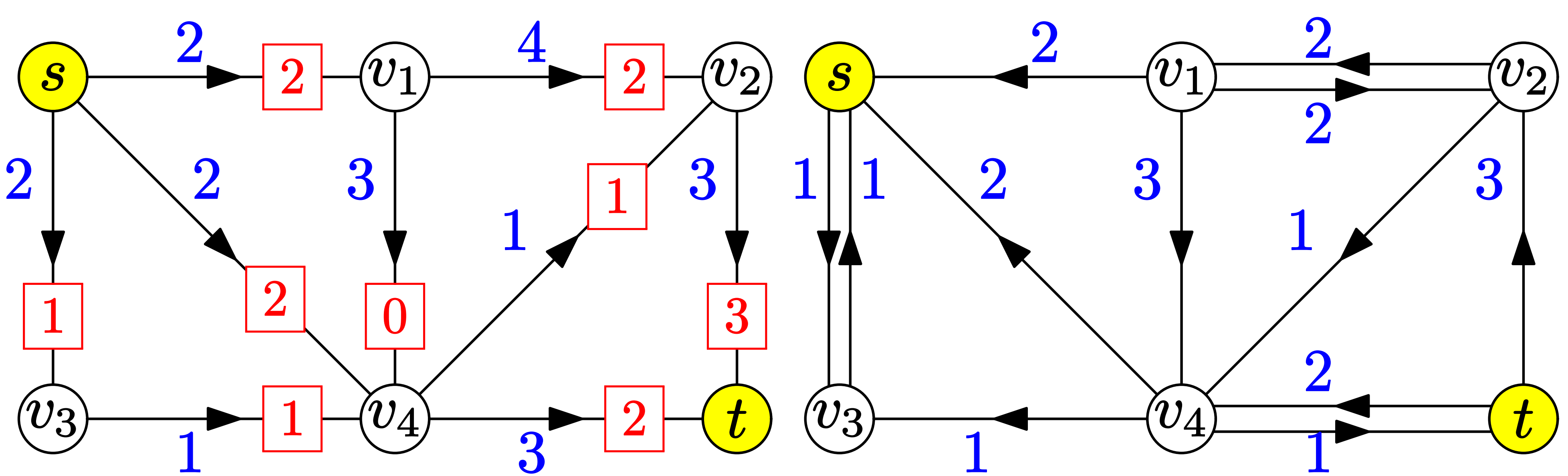
アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



アルゴリズム：増加道法 (augmenting path method)

- 初期化：任意の s-t 流 f　(例えば，$f = 0$)
- 反復：f に対する増加道がある限り，以下を実行
  1. 増加道 P を見つける
  2. P に沿って f を増加させる
- 出力：f



増加道法が止まる ⇒ 最大 s-t 流

性質：増加道法と最大 s-t 流

増加道法が停止する ⇒
出力 f は (G, u) に対する最大 s-t 流

証明：増加道法が停止すると仮定

- f に対する増加道が存在しない
- $\therefore$ 最適性条件より，f は最大 s-t 流 $\square$

[再掲] 性質：最大流問題の最適性条件

f が最大 s-t 流 ⇔ f に対する増加道が存在しない

増加道法の停止性

注意

- 増加道法は停止しないかもしれない
  (停止しない場合がある)
- 増加道法の収束先が最大 s-t 流でないかもしれない
  (最大 s-t 流でない場合がある)

注：単調増加数列は有界ならば収束する

次回以降：増加道法を停止させる工夫

$\rightsquigarrow$ 工夫した増加道法が必ず停止することから，
最大 s-t 流の存在が言える

Ford と Fulkerson

今日の内容は Ford と Fulkerson が創始したもの (1950 年代)

(増加道法 は Ford-Fulkerson 法とも呼ばれる)

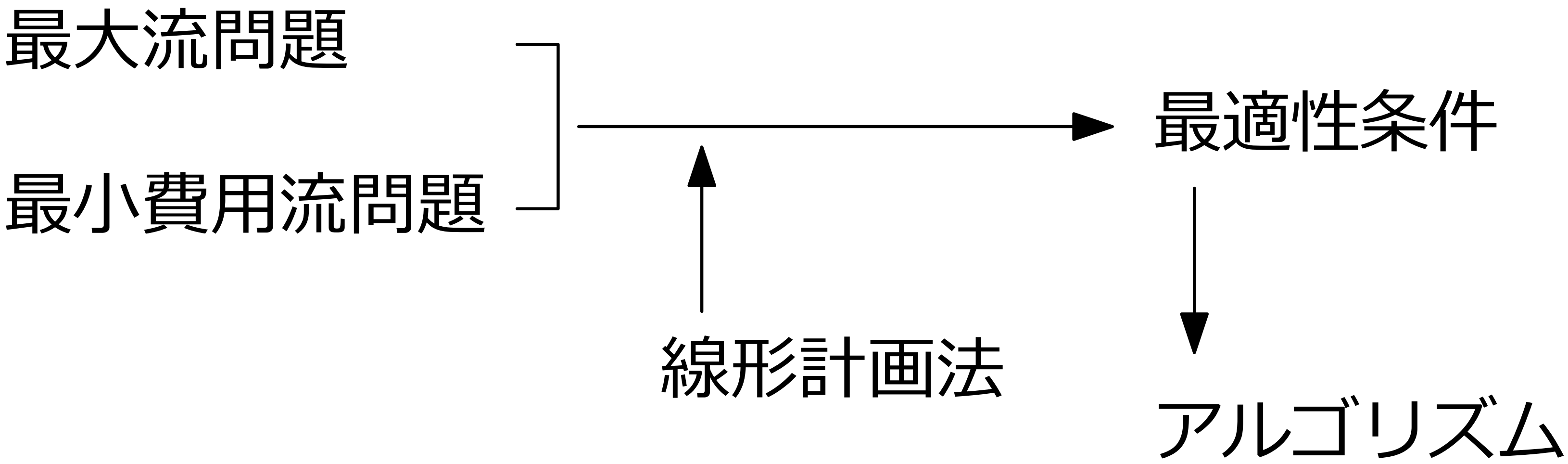
Leslie R. Ford Jr.
フォード
(1927–2017)

Delbert Ray Fulkerson
ファルカーソン
(1924–1976)

https://optimizacion2ricardomj.car.blog/2020/05/08/lester-randolph-ford-jr/

http://www.ams.org/prizes-awards/paview.cgi?parent_id=17

次回予告



次回・次々回の予告

最適性条件を線形計画法の視点から捉える

- 重要概念：双対性 (duality)
- 重要概念：相補性 (complementarity)

次回：線形計画法の復習

1. **流の増加：証明**
2. 増加道法が停止しない例

[再掲] 流の増加：定義

設定：f に対する増加道 $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t)$

定義：流の増加

P に沿って f を増加する操作は，次の f' を得ること

- $\delta = \min\{u_f(v_i, v_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$ とする
- このとき，$(v, v') \in A$ に対して

$$f'(v, v') = \begin{cases} f(v, v') + \delta & ((v, v') \in P \cap A_f^{\mathrm{F}}), \\ f(v, v') - \delta & ((v', v) \in P \cap A_f^{\mathrm{B}}), \\ f(v, v') & (\text{その他}) \end{cases}$$

P の連続する 2 頂点を P の弧と見なしている

設定：f に対する増加道 $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t)$
P に沿って f を増加して得られた f'

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流
2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

証明：補足動画にて □

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

f' が容量制約と流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の弧 $(v, v') \in A$ を考える
- $(v, v') \notin P$ のとき，$f'(v, v') = f(v, v')$ なので，
  $0 \leq f'(v, v') \leq u(v, v')$

性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

f' が容量制約と流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の弧 $(v, v') \in A$ を考える
- $(v, v') \in P \cap A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(v, v') &= f(v, v') + \delta \\ &\leq f(v, v') + u_f(v, v') \\ &= f(v, v') + (u(v, v') - f(v, v')) \\ &= u(v, v') \\ f'(v, v') &= f(v, v') + \delta \\ &\geq f(v, v') \geq 0 \end{aligned}$$

注：$\delta = \min\{u_f(a) \mid a \in P\}$

- $\therefore 0 \leq f'(v, v') \leq u(v, v')$

性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

f' が容量制約と流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の弧 $(v, v') \in A$ を考える
- $(v', v) \in P \cap A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(v, v') &= f(v, v') - \delta \\ &\geq f(v, v') - u_f(v', v) \\ &= f(v, v') - f(v, v') \\ &= 0 \end{aligned}$$

注：$\delta = \min\{u_f(a) \mid a \in P\}$

$$\begin{aligned} f'(v, v') &= f(v, v') - \delta \\ &\leq f(v, v') \leq u(v, v') \end{aligned}$$

- $\therefore 0 \leq f'(v, v') \leq u(v, v')$

これで f' が容量制約を満たすことが言えた

性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

あとは，f' が流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ を考える
- v が P の頂点ではないとき
  - $f'^{+}(v) = f^{+}(v)$ かつ $f'^{-}(v) = f^{-}(v)$
  - $\therefore f'^{+}(v) = f^{+}(v) = f^{-}(v) = f'^{-}(v)$

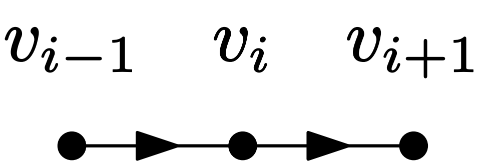
性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

あとは，f' が流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ を考える
- v が P の頂点であるとき ($v = v_i$ とする)



元のネットワーク

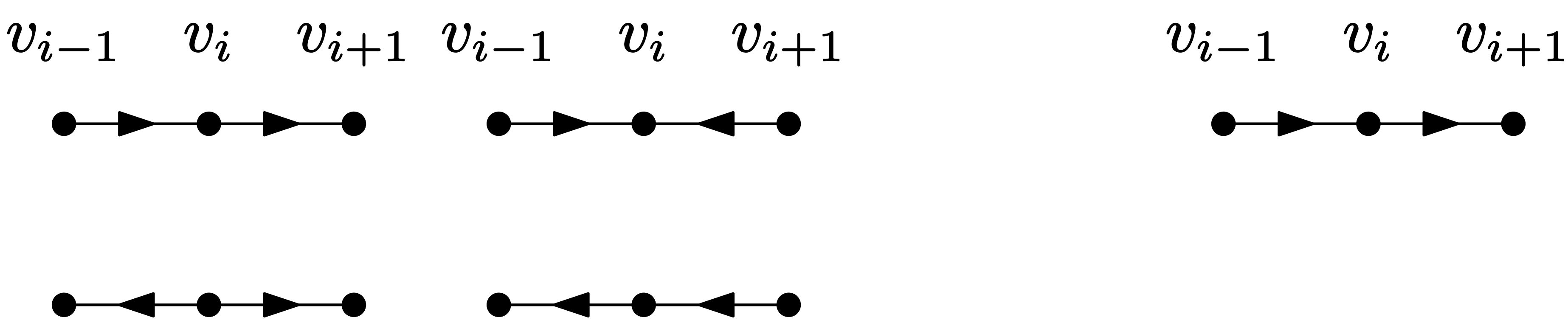
補助ネットワーク

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

あとは，f' が流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ を考える
- v が P の頂点であるとき ($v = v_i$ とする)



元のネットワーク　補助ネットワーク

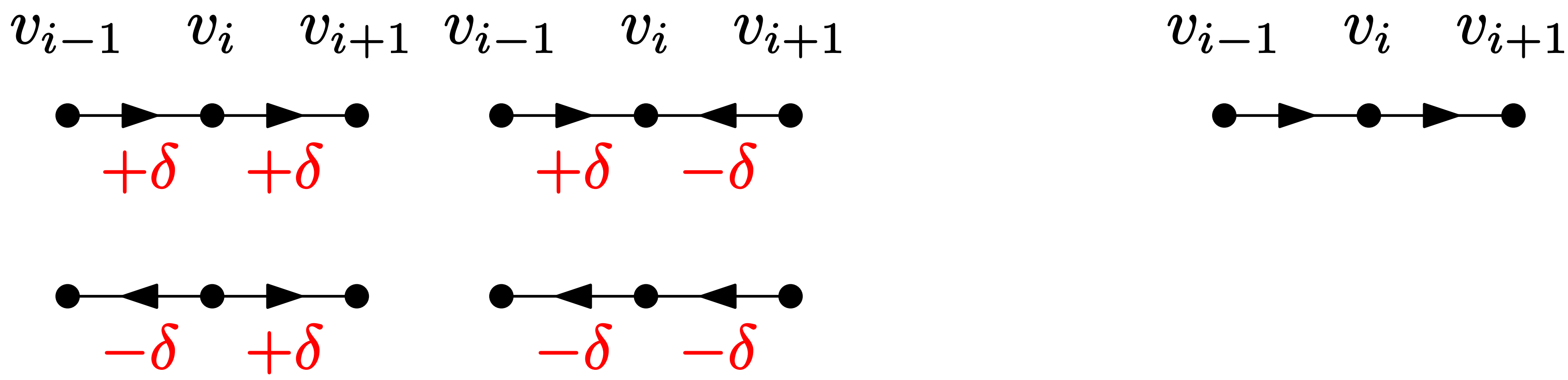
性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

あとは，f' が流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ を考える
- v が P の頂点であるとき ($v = v_i$ とする)



元のネットワーク　　補助ネットワーク

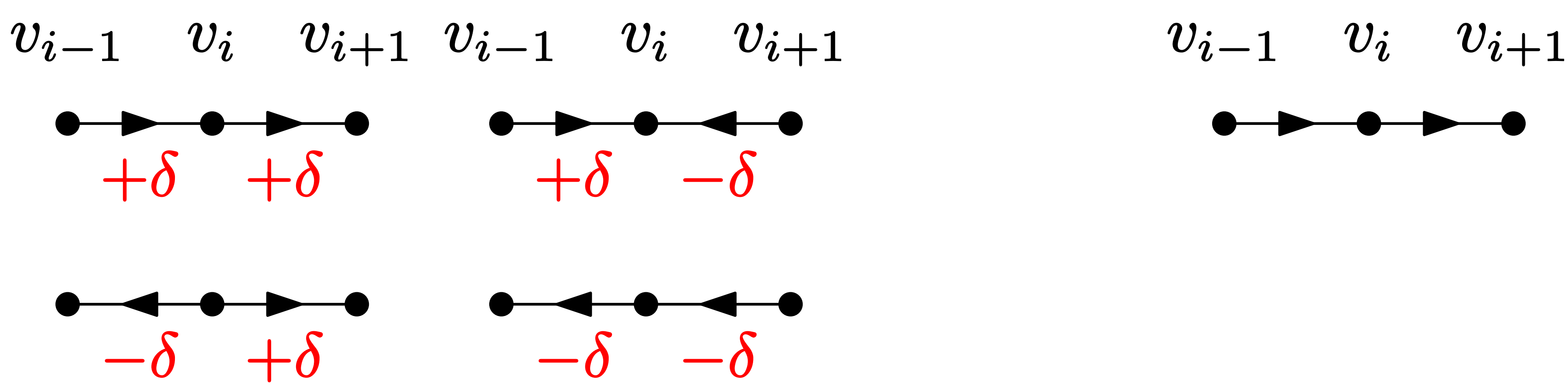
性質 1 の証明

性質：流の増加

1. f' は (G, u) における s-t 流

あとは，f' が流量保存制約を満たすことを言えばよい

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ を考える
- v が P の頂点であるとき ($v = v_i$ とする)
  - どの場合でも，$f'^{+}(v) = f'^{-}(v)$



これで f' が流量保存制約を満たすことが言えた

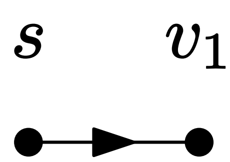
性質 2 の証明

性質：流の増加

2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

$$\mathrm{val}(f') = f'^{+}(s) - f'^{-}(s)$$

$\square$



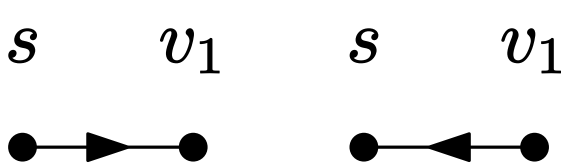
元のネットワーク　　補助ネットワーク

性質：流の増加

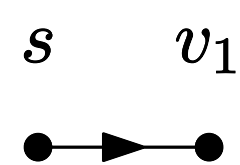
2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

$$\mathrm{val}(f') = f'^{+}(s) - f'^{-}(s)$$

$\square$



元のネットワーク



補助ネットワーク

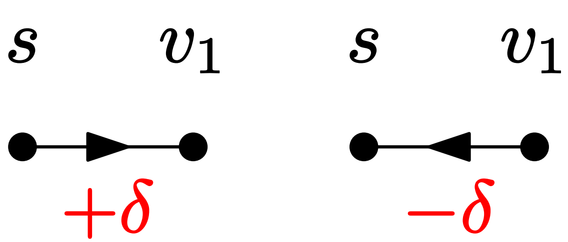
性質 2 の証明

性質：流の増加

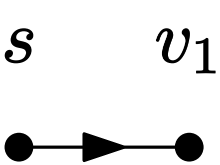
2. $\mathsf{val}(f') > \mathsf{val}(f)$

$$\mathsf{val}(f') = f'^{+}(s) - f'^{-}(s)$$

$\square$



元のネットワーク



補助ネットワーク

性質 2 の証明

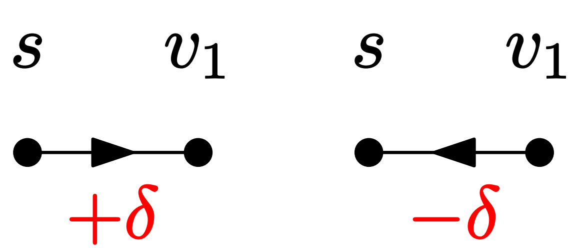
性質：流の増加

2. $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$

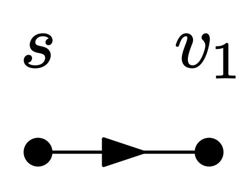
$\mathrm{val}(f') = f'^{+}(s) - f'^{-}(s)$

いずれの場合も，$f'^{+}(s) - f'^{-}(s) = f^{+}(s) - f^{-}(s) + \delta$

$\therefore \mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + \delta > \mathrm{val}(f)$ $\square$



元のネットワーク

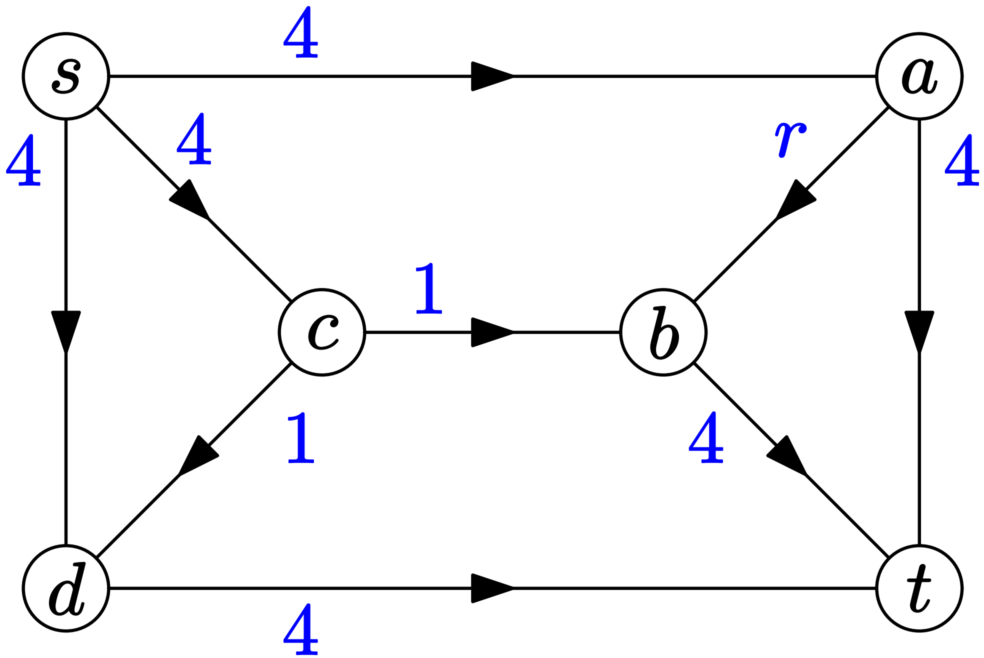


補助ネットワーク

[付録 1 ここまで]

1. 流の増加：証明
2. **増加道法が停止しない例**

次の例は Zwick ('95) による

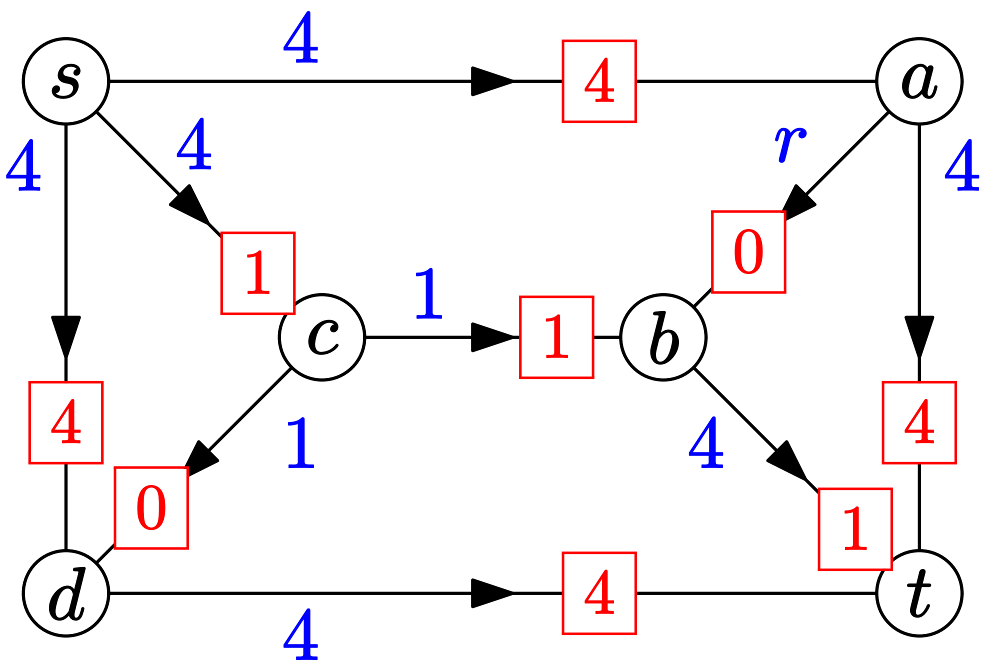


ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

増加道法が停止しない例

次の例は Zwick ('95) による



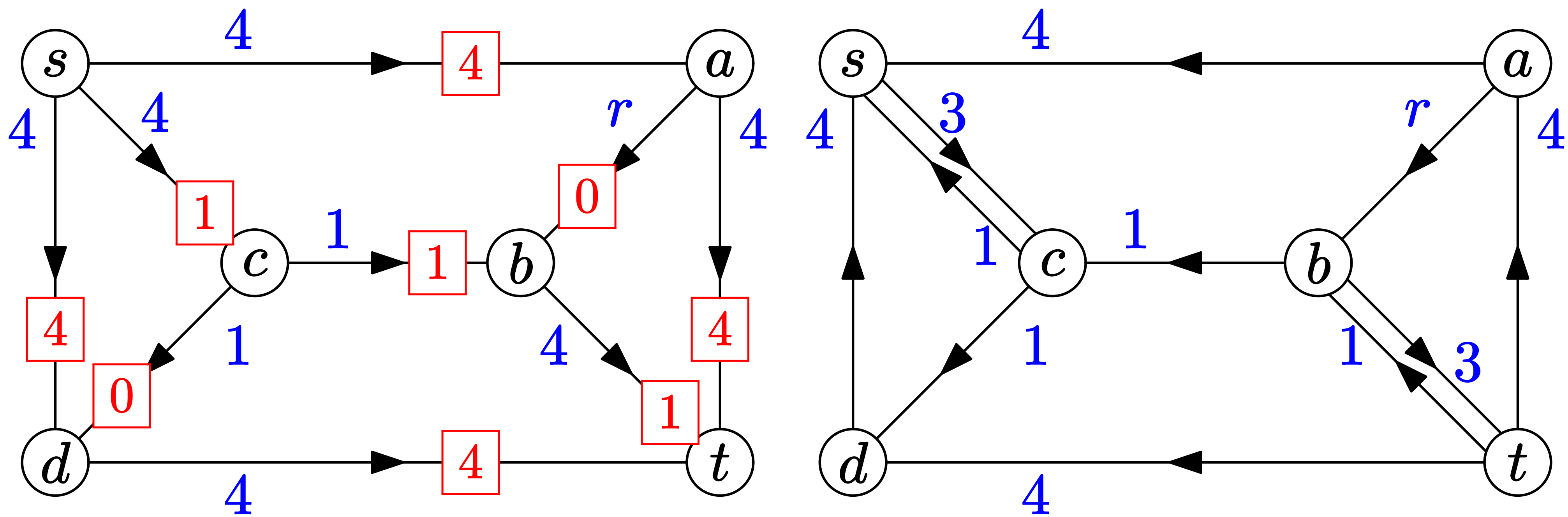
ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

最大 s-t 流の値 $= 9$

増加道法が停止しない例

次の例は Zwick ('95) による



ただし，r は $r^2 = 1 - r$ を満たす正の実数

(具体的には，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$)

最大 s-t 流の値 $= 9$

鍵となる数列

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

<u>性質</u>：$a_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$

以下，$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とする

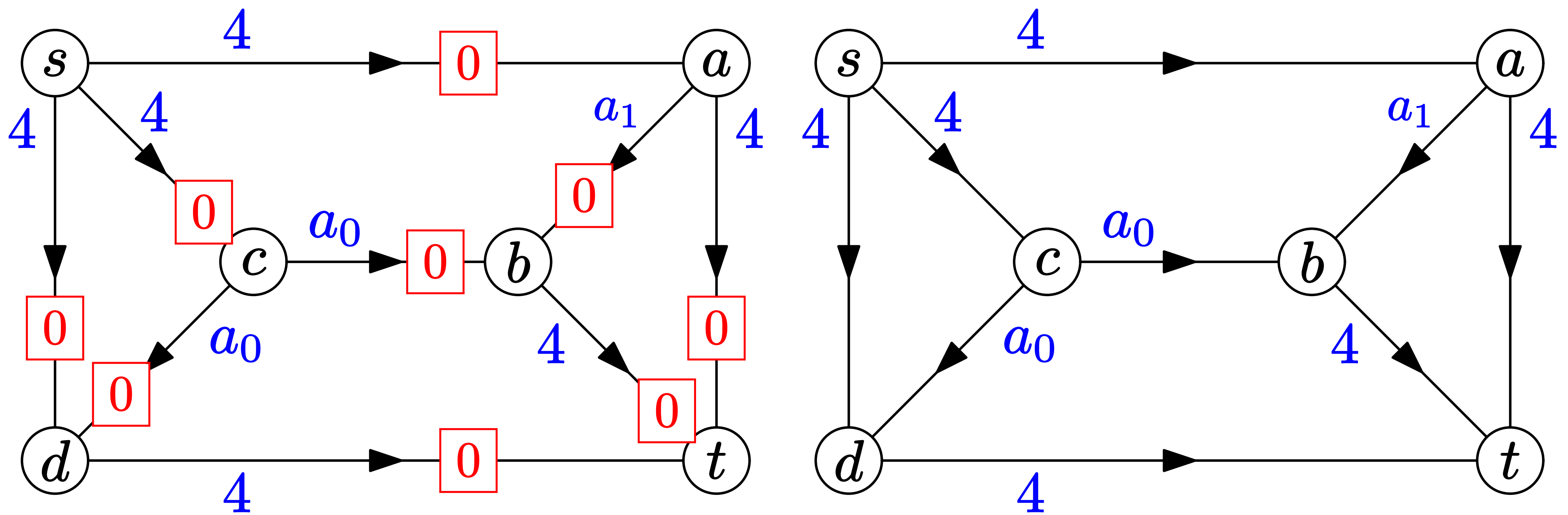
≈ 0.62

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} \approx 2.63$$

ここで，$r^2 = 1 - r$

増加道法が停止しない例 (0)

増加道法を実行してみる

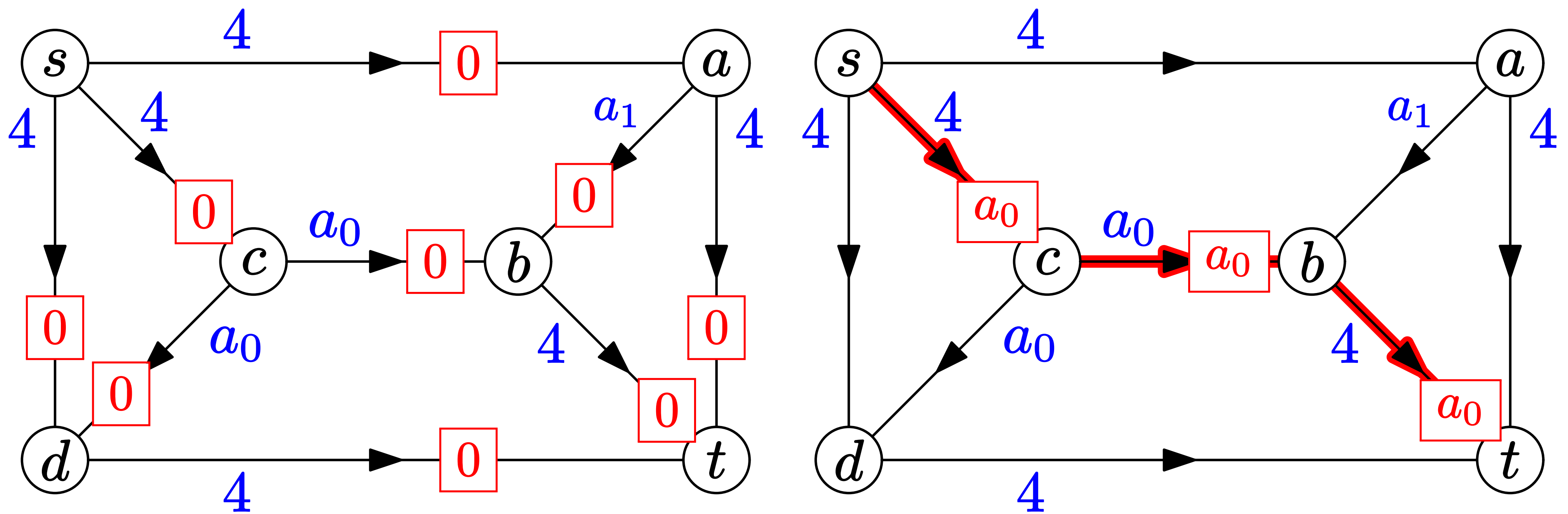


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (0)

増加道法を実行してみる

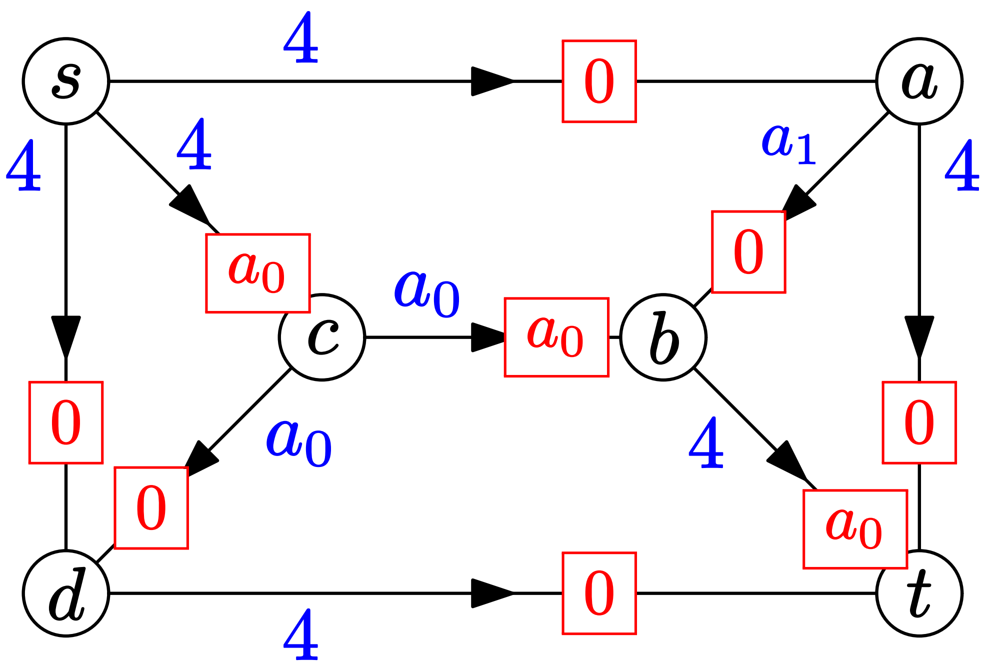


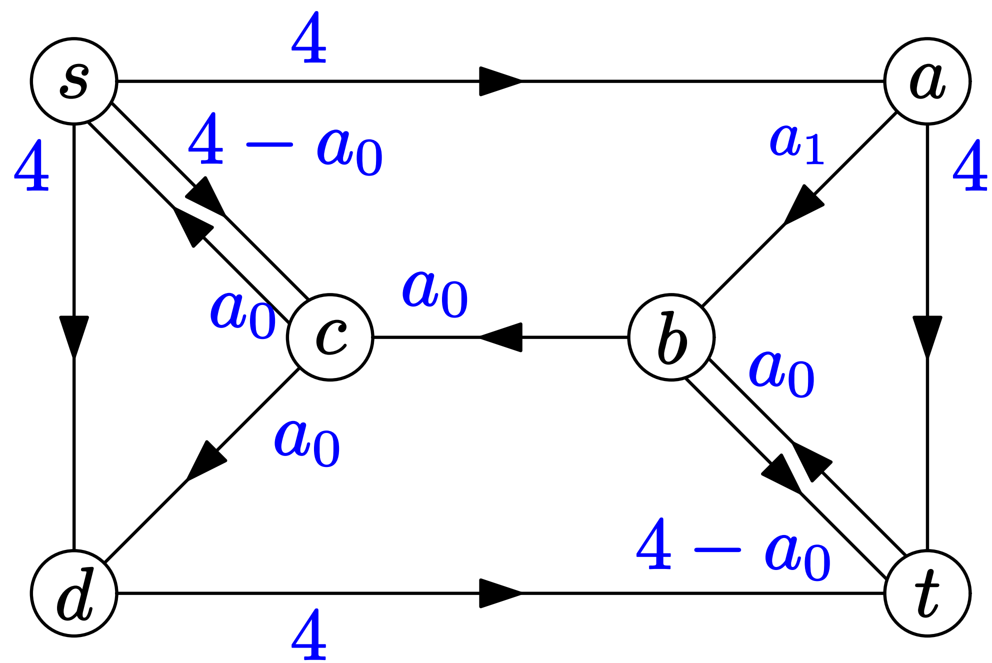
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (1-1)

増加道法を実行してみる



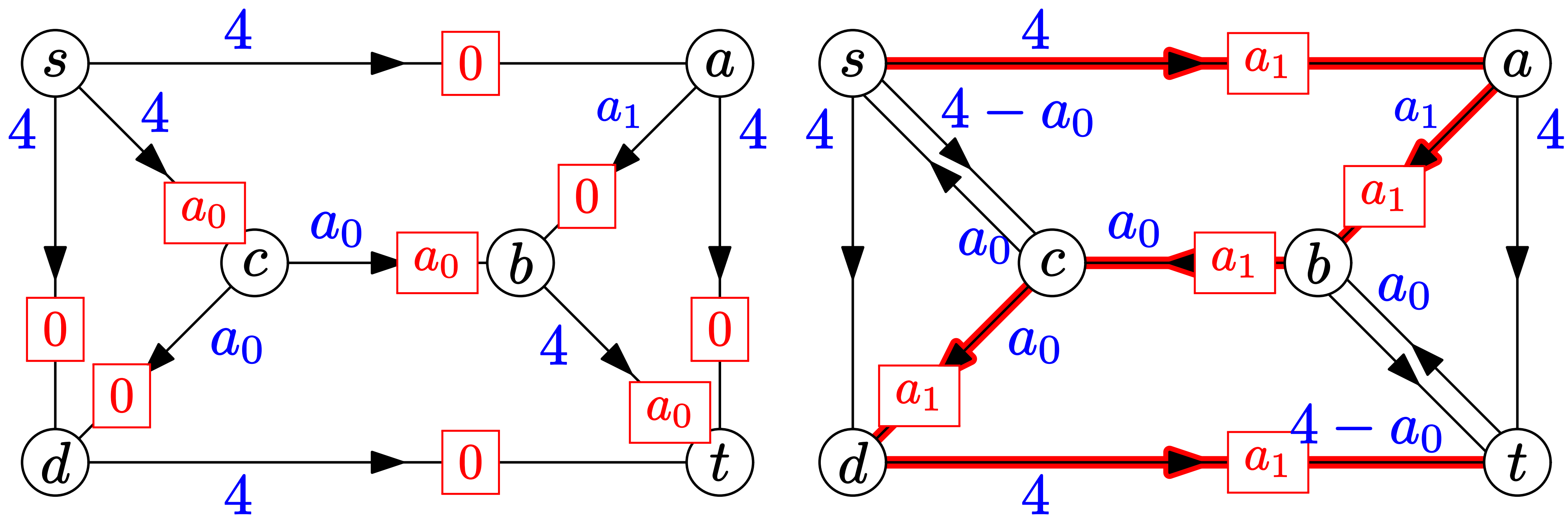


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (1-1)

増加道法を実行してみる

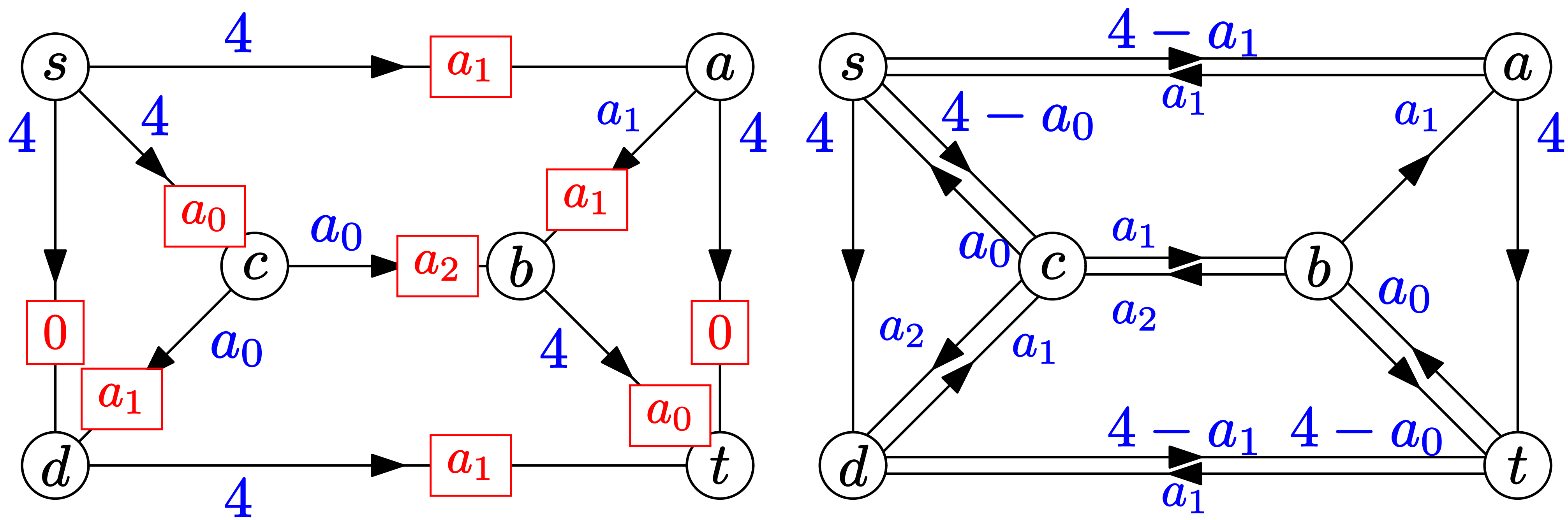


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (1-2)

増加道法を実行してみる

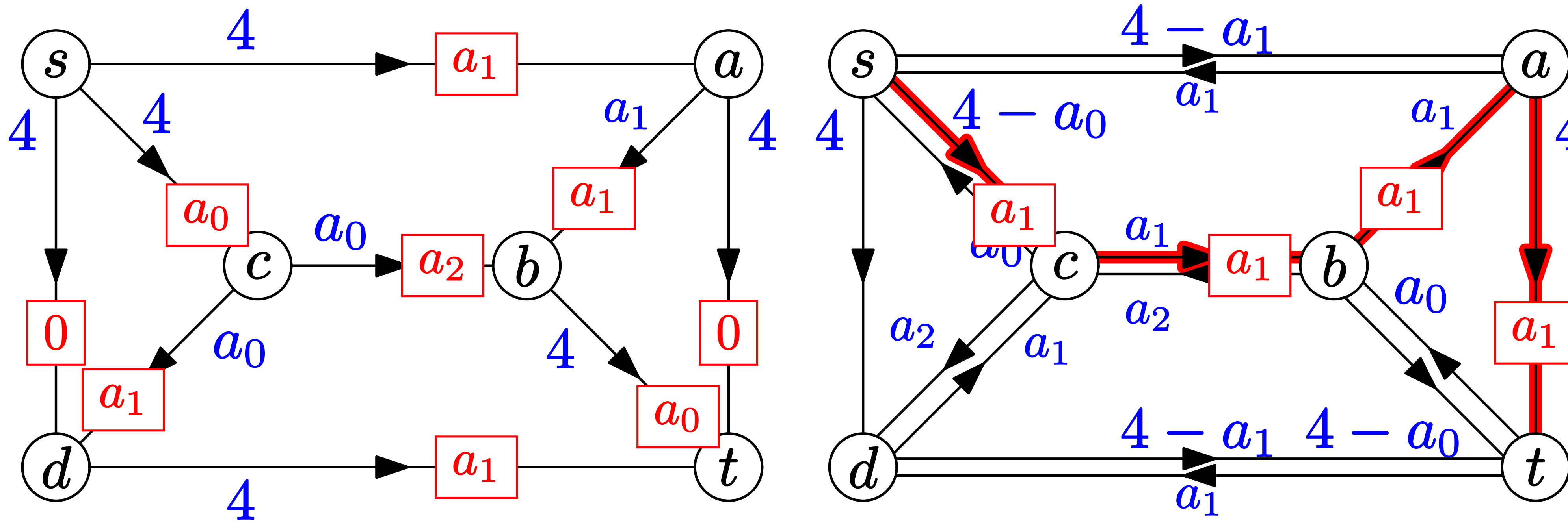


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (1-2)

増加道法を実行してみる

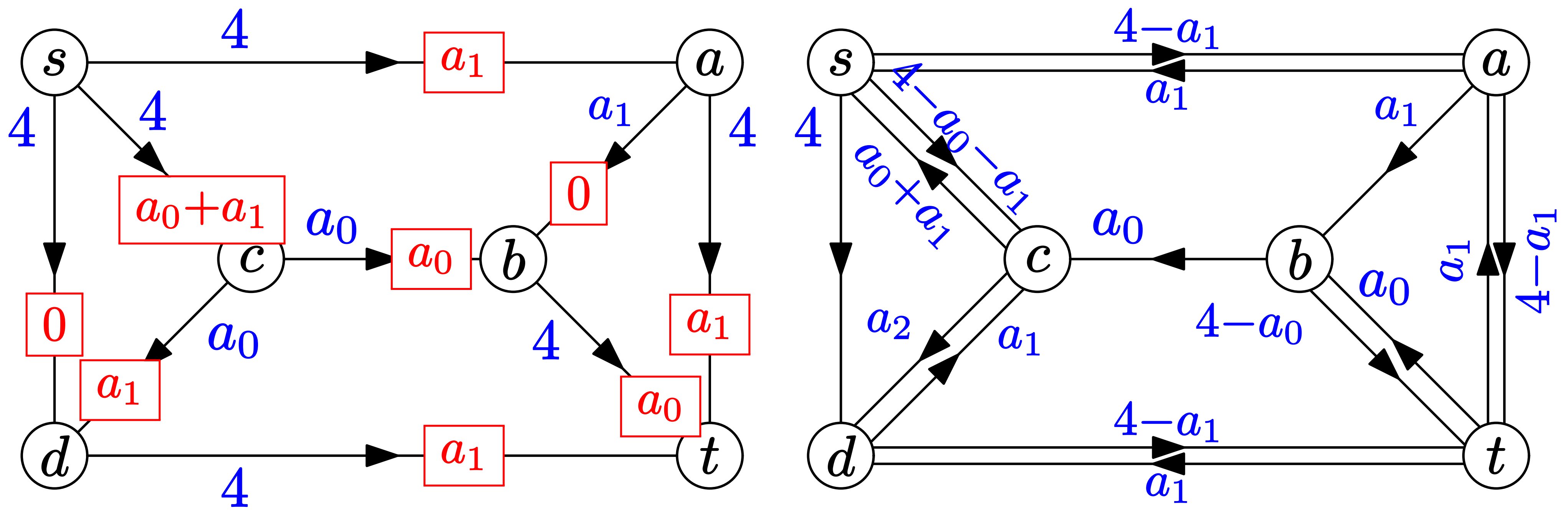


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (2-1)

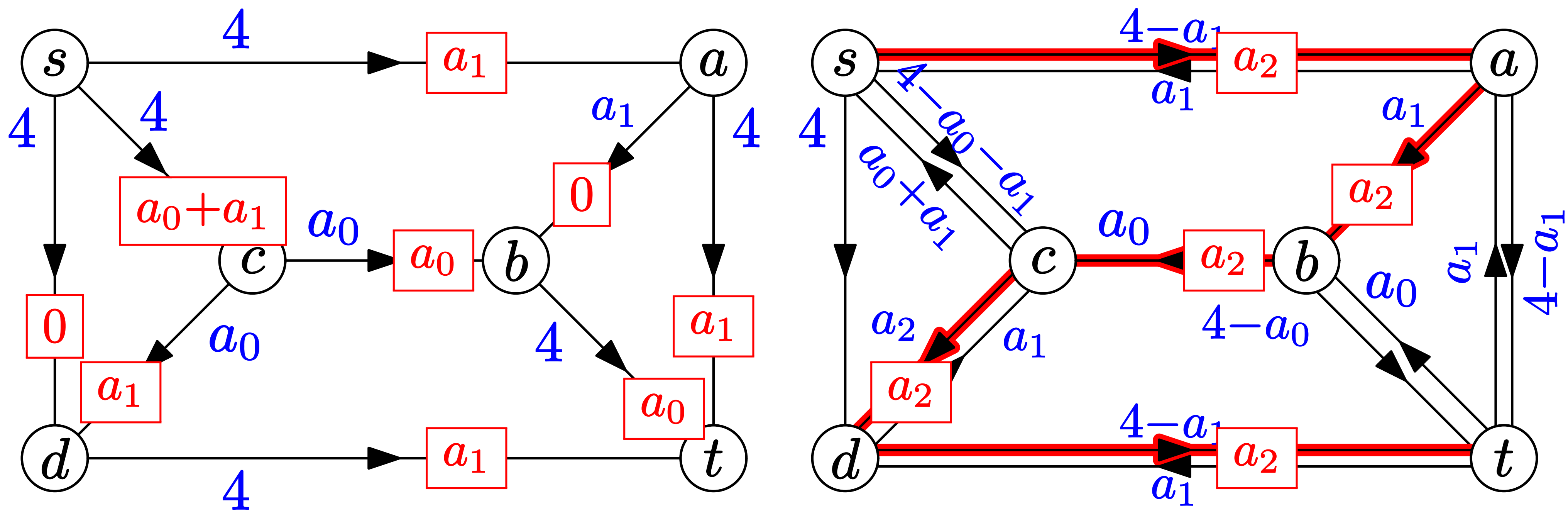
増加道法を実行してみる



$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法を実行してみる

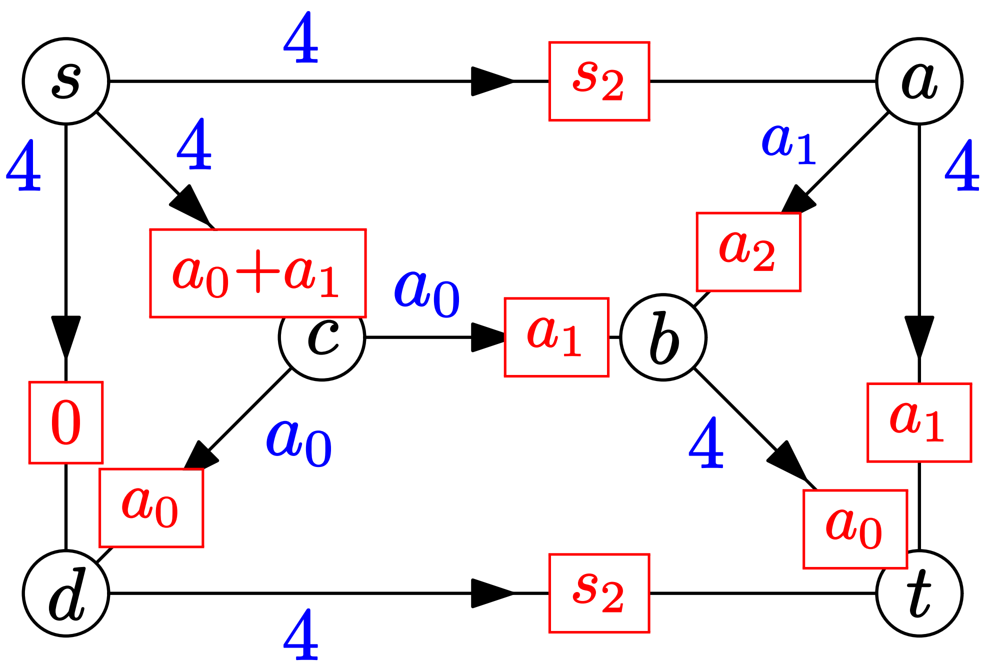


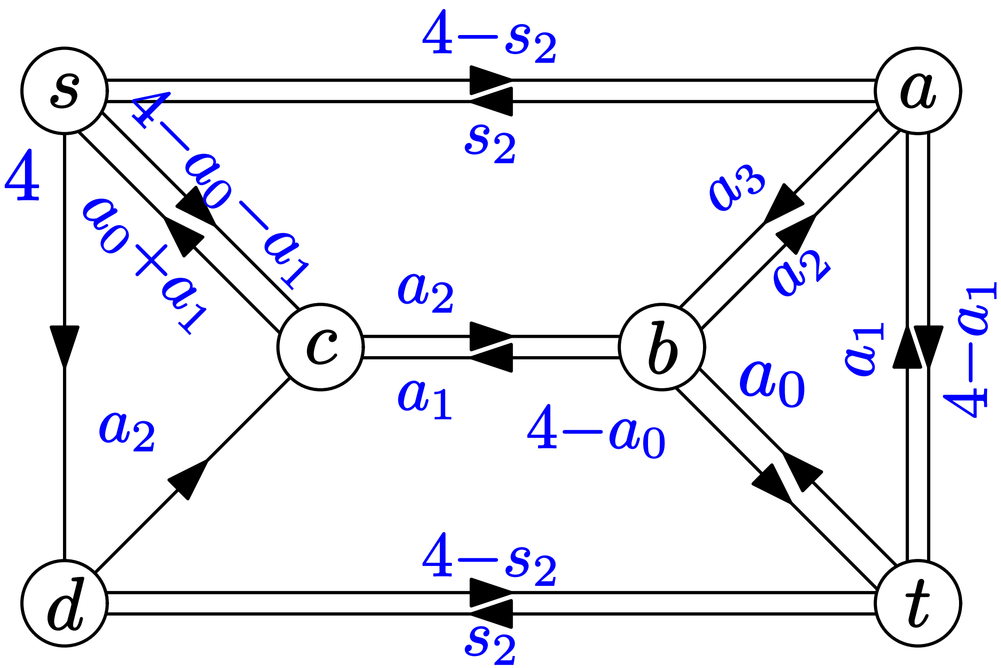
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

増加道法が停止しない例 (2-2)

増加道法を実行してみる



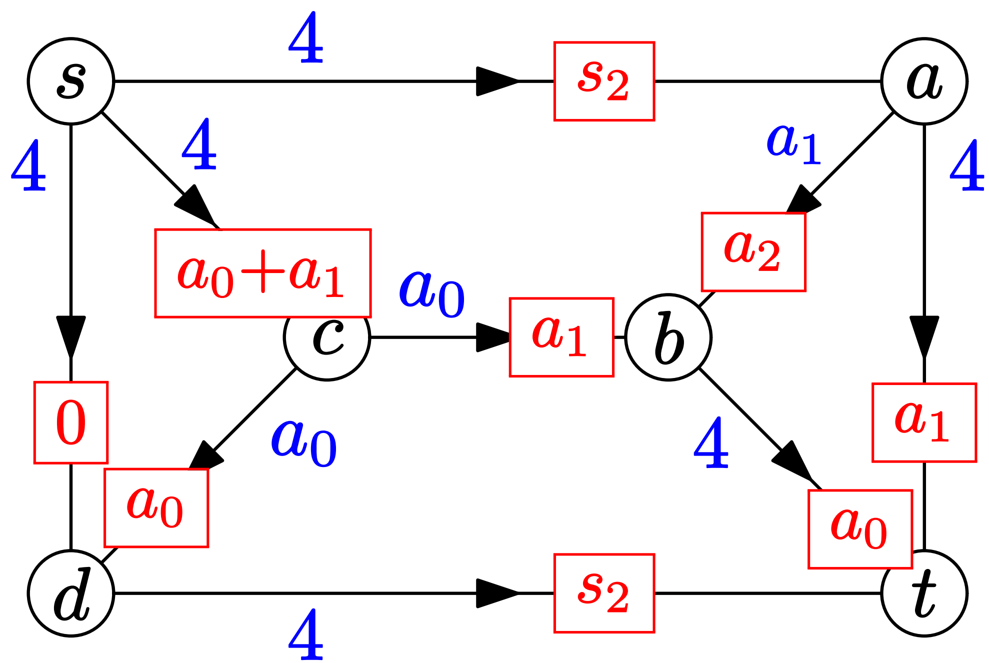


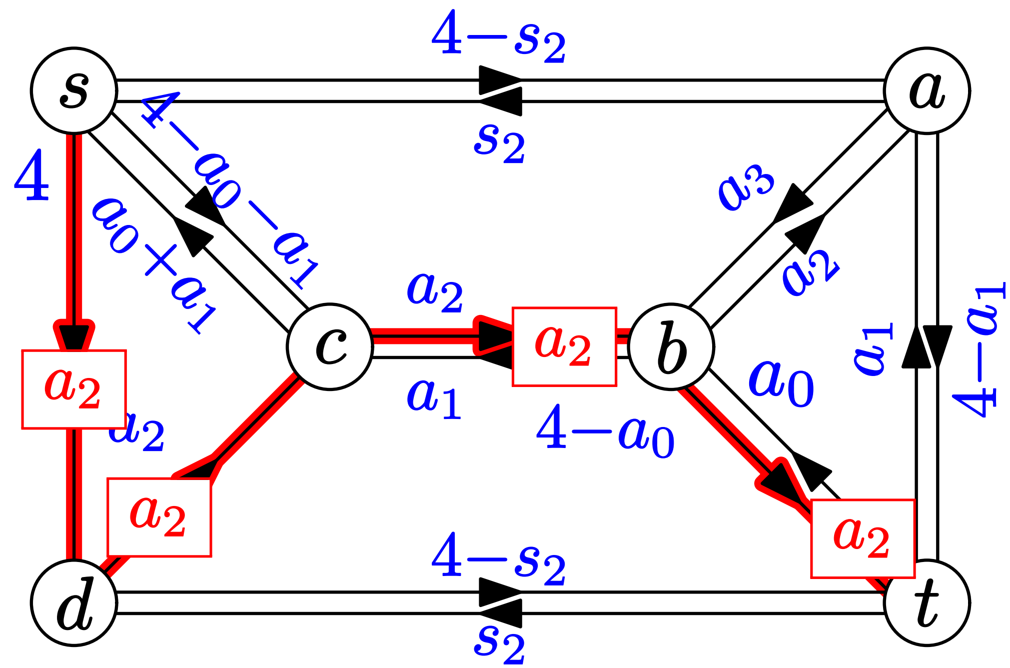
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (2-2)

増加道法を実行してみる





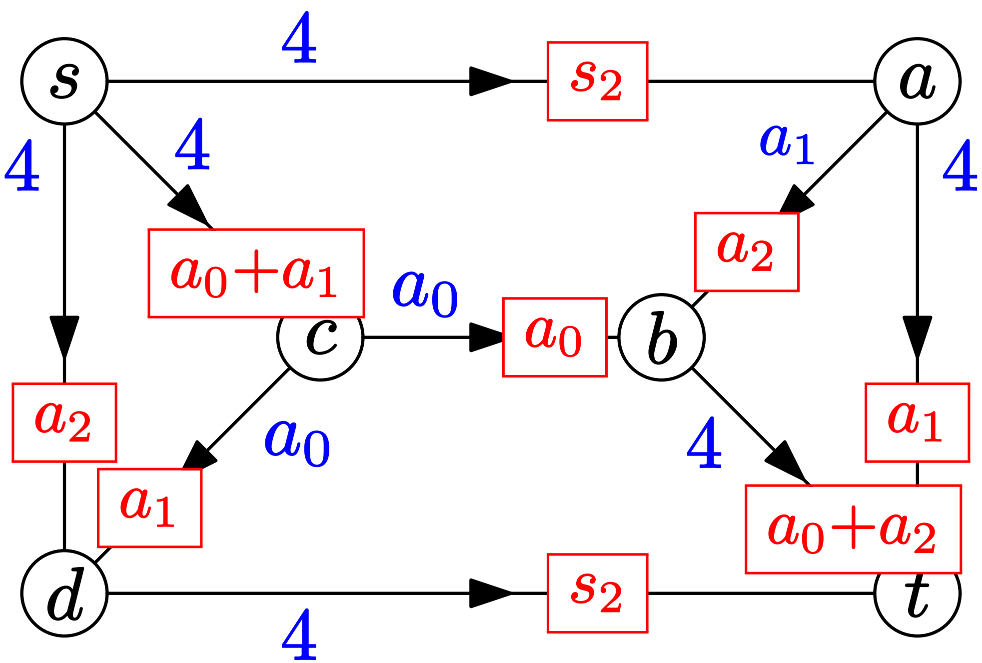
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

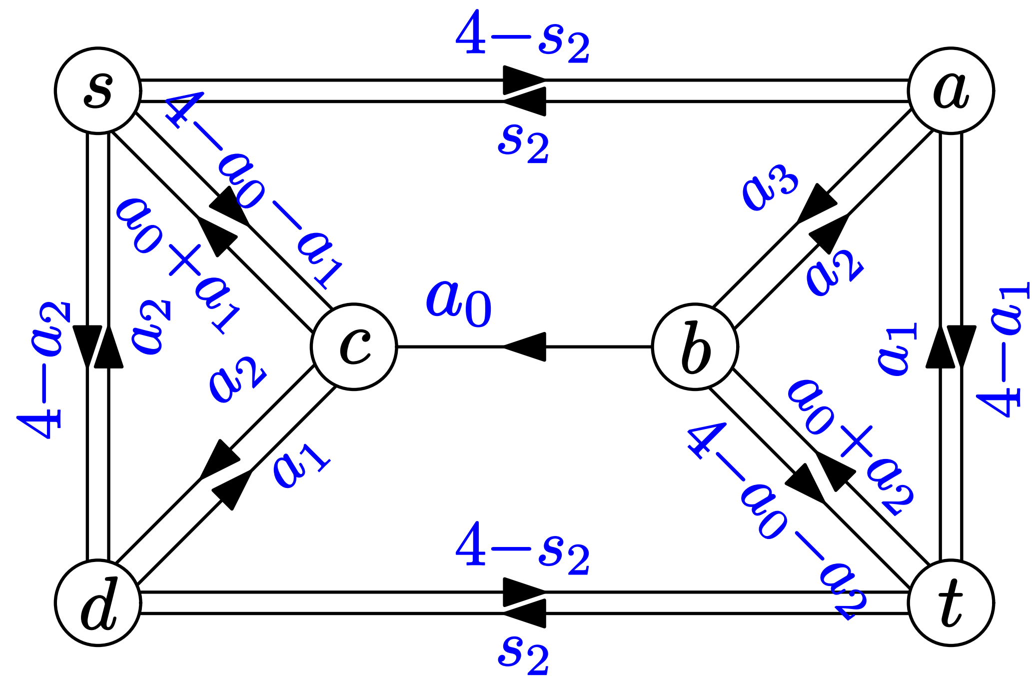
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





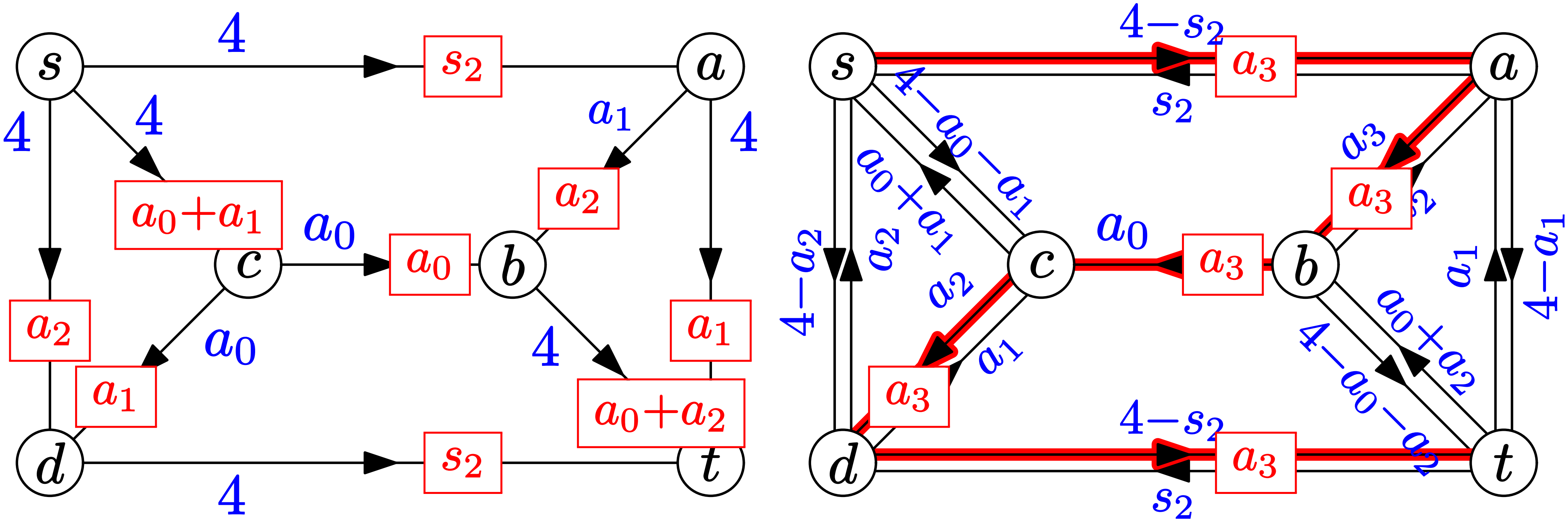
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \qquad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる



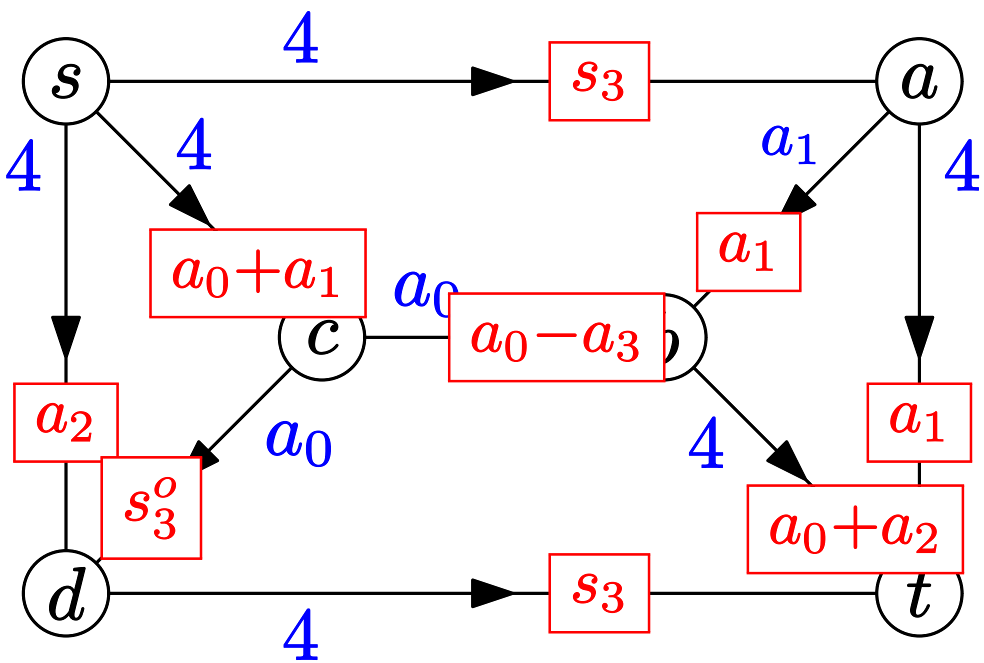
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

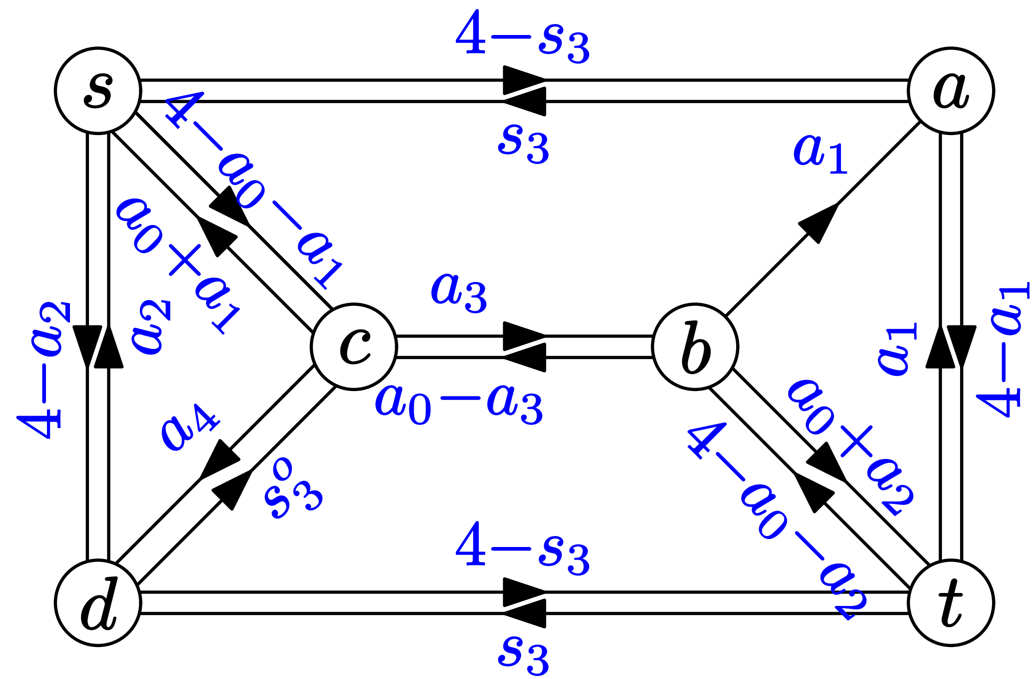
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

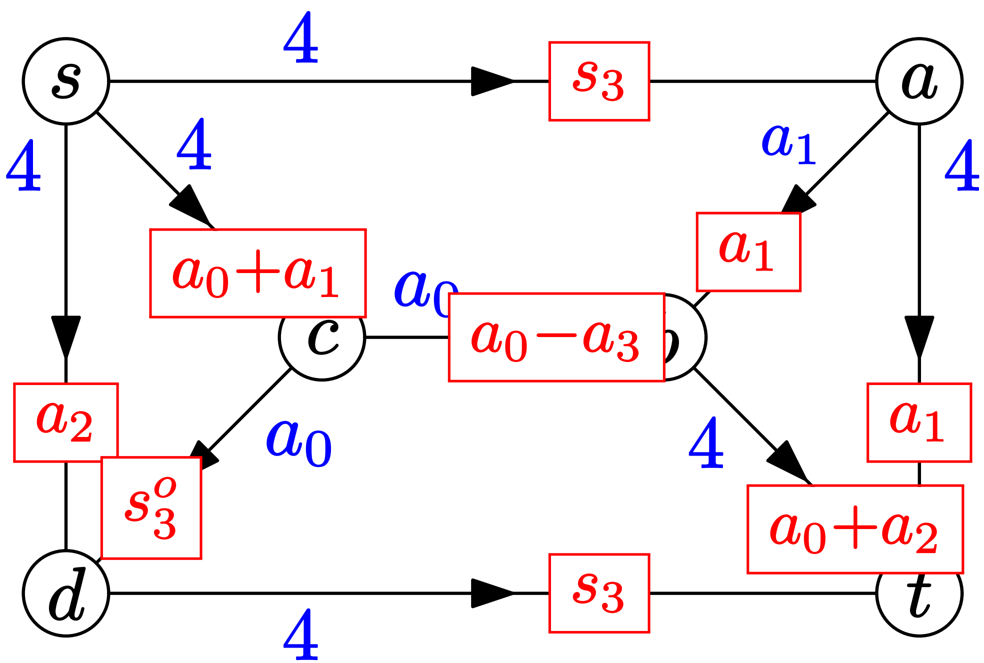
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

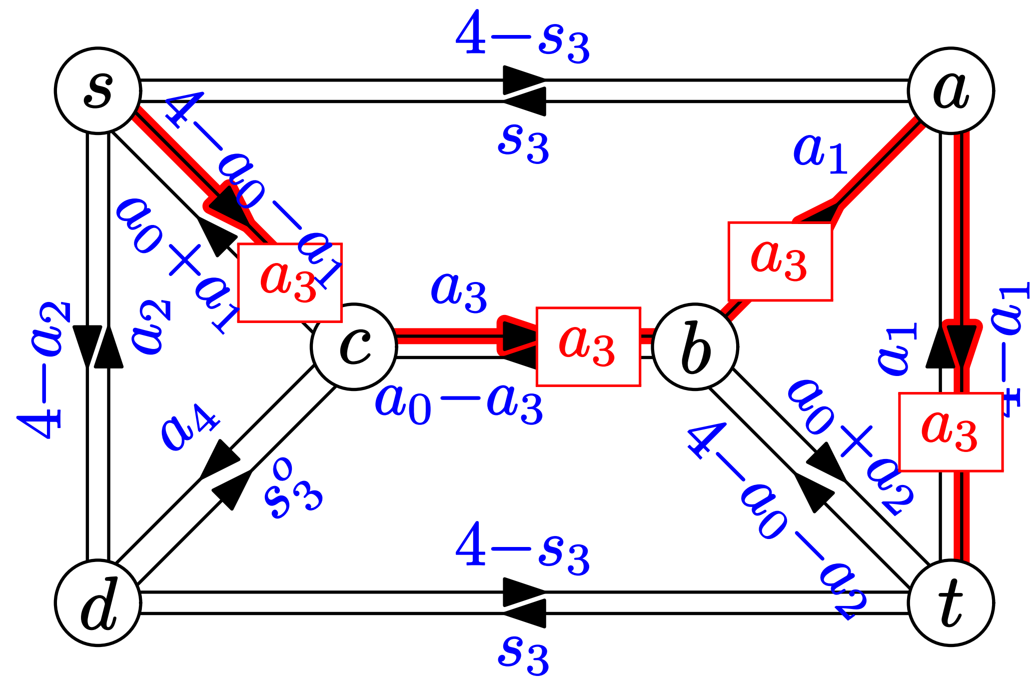
$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (3-2)

増加道法を実行してみる

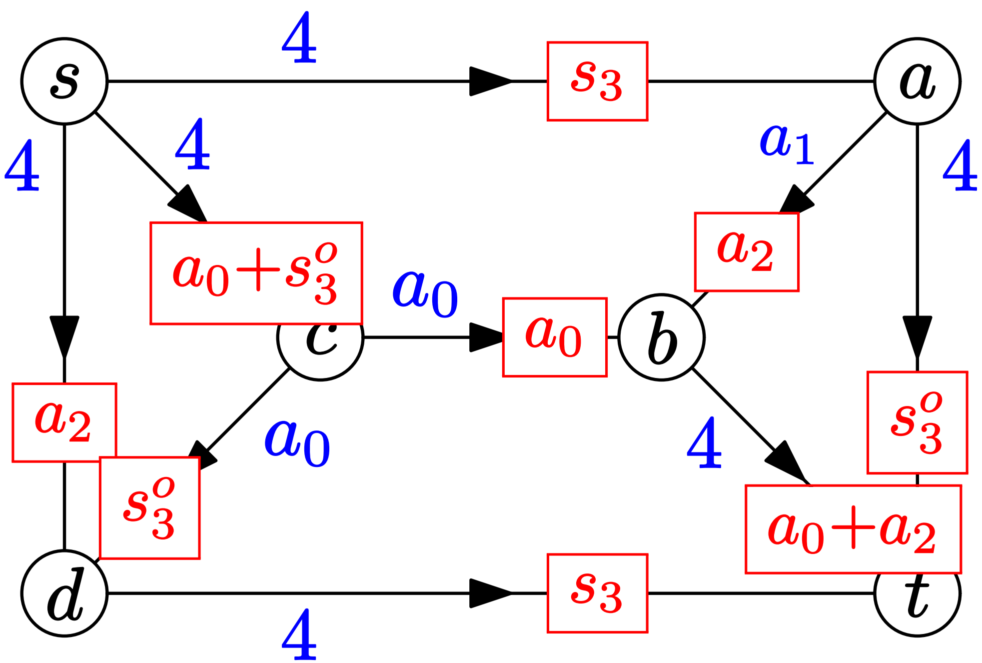


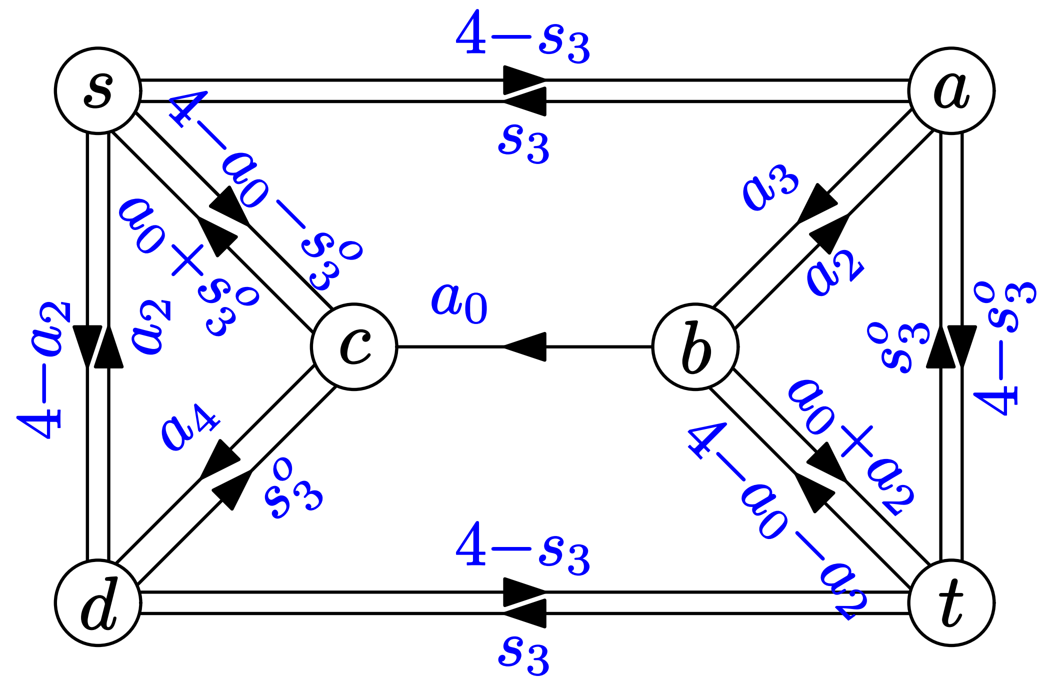


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

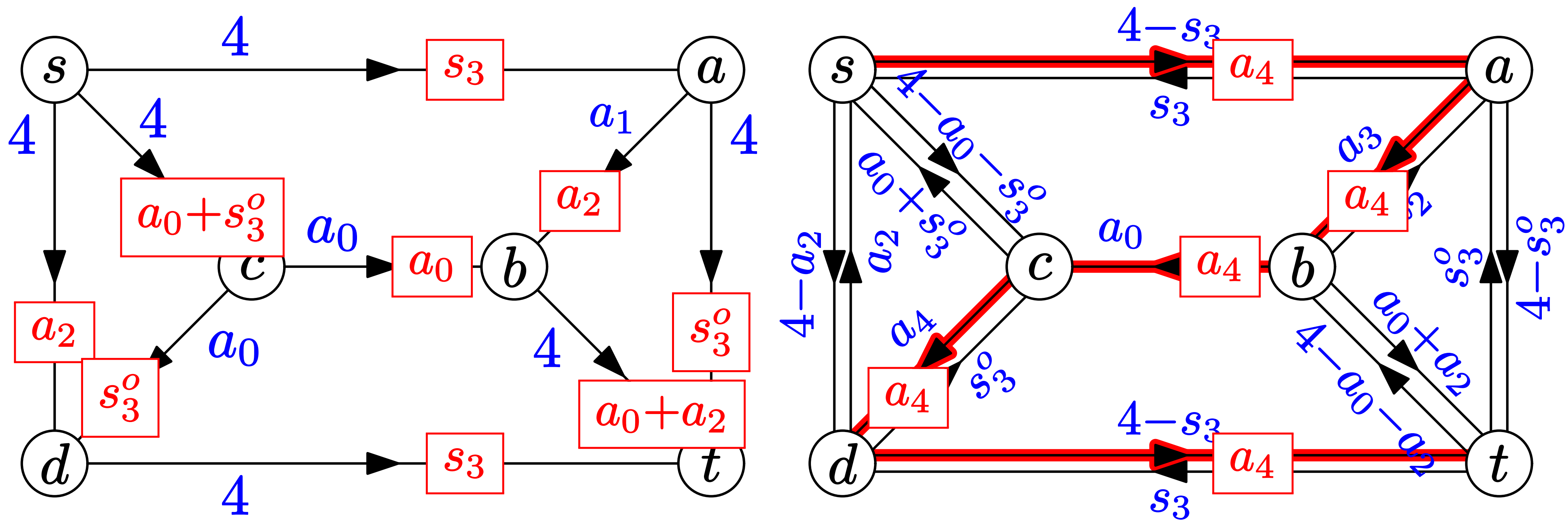
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (4-1)

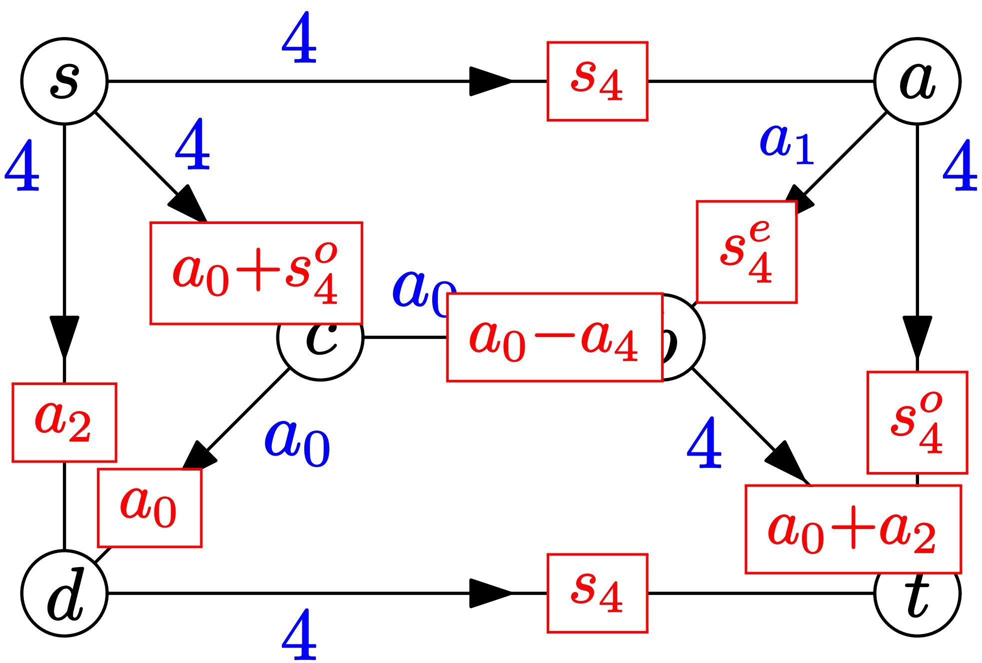
増加道法を実行してみる

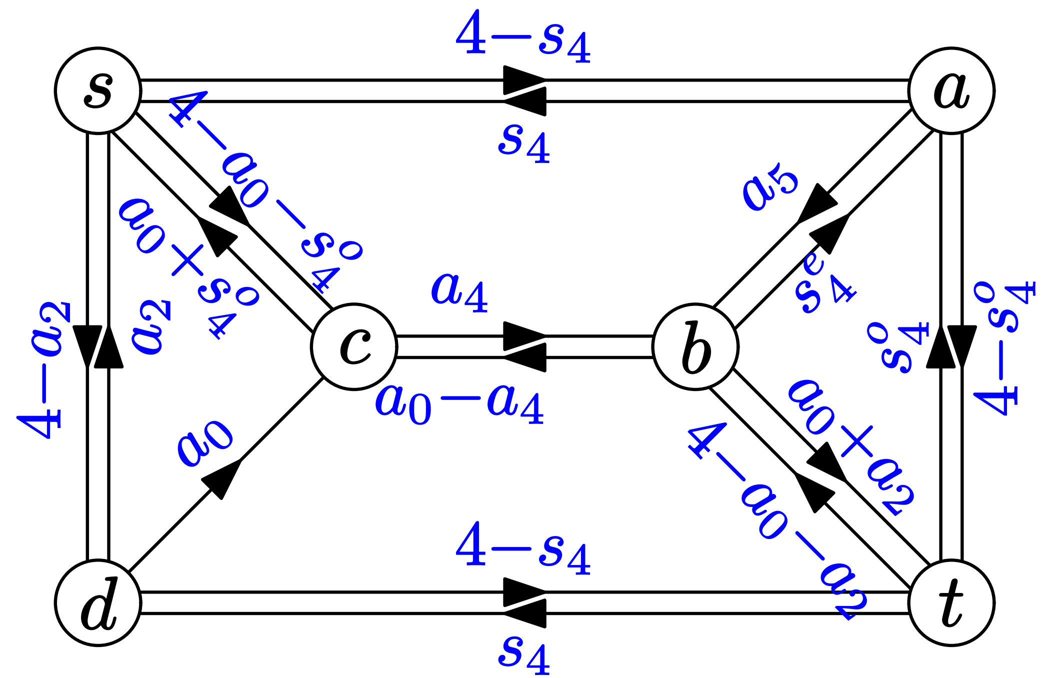


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

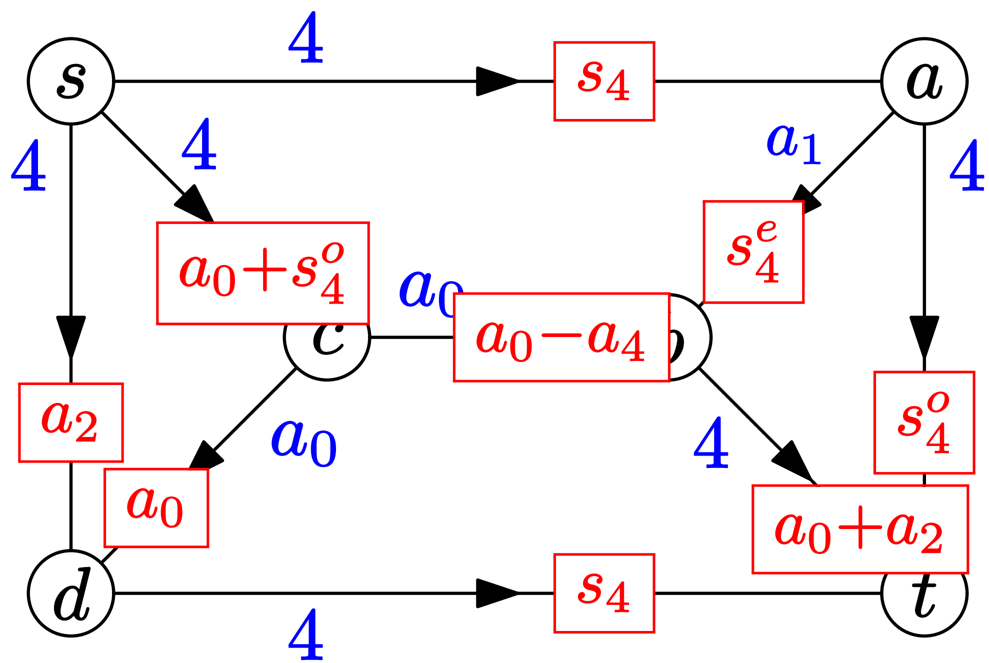
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

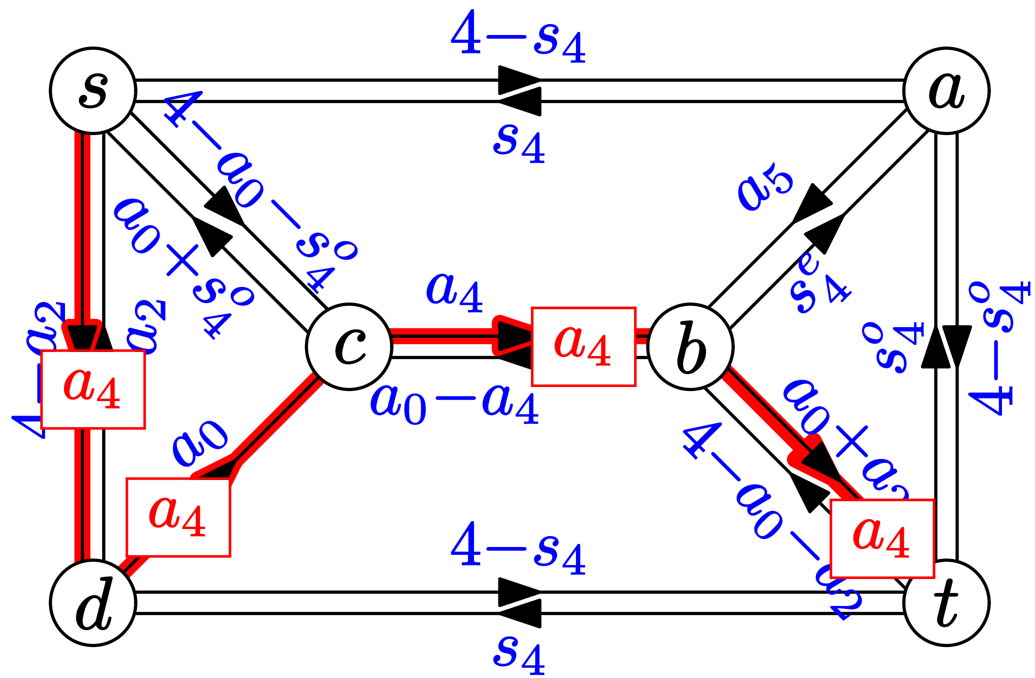
$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ 奇数}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ 偶数}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (4-2)

増加道法を実行してみる

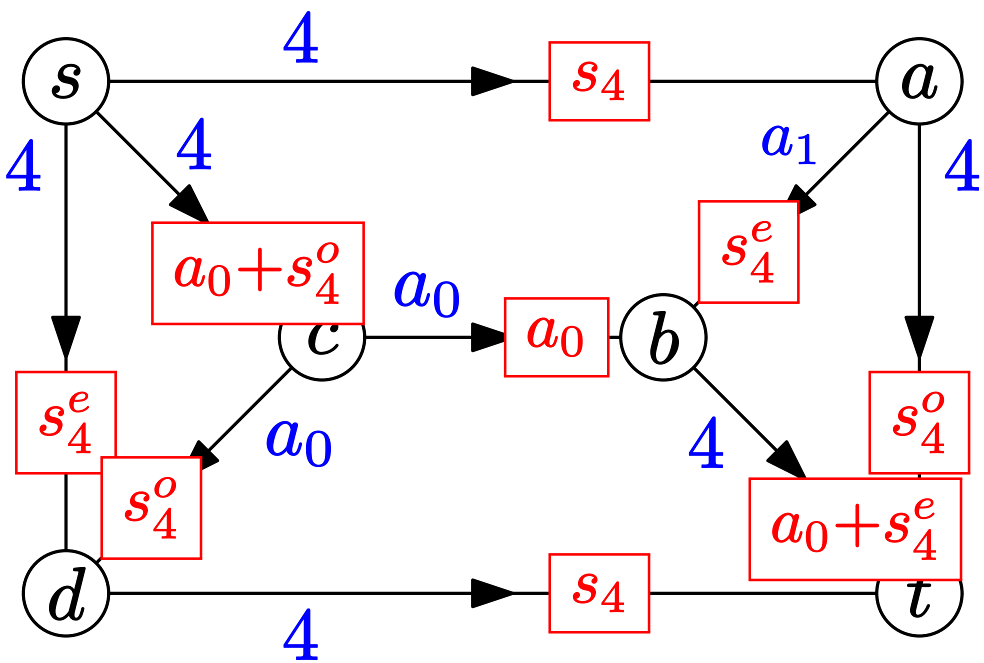


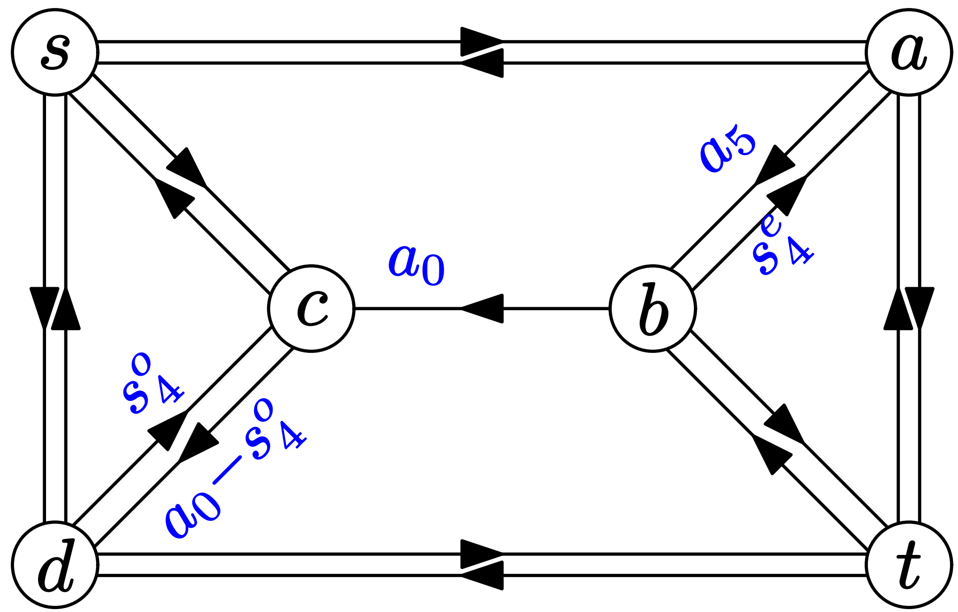


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





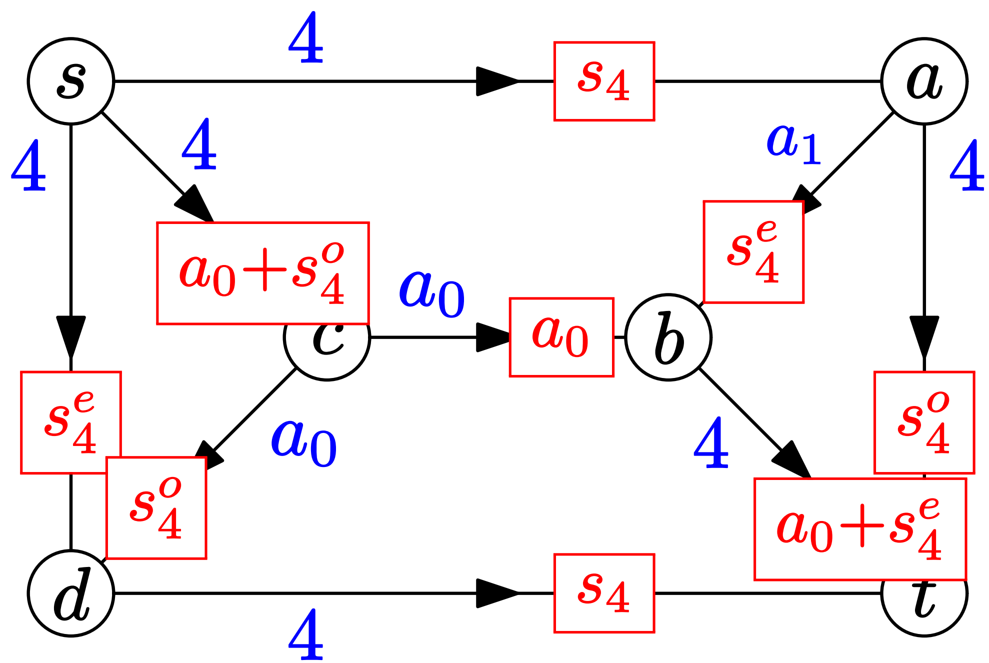
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

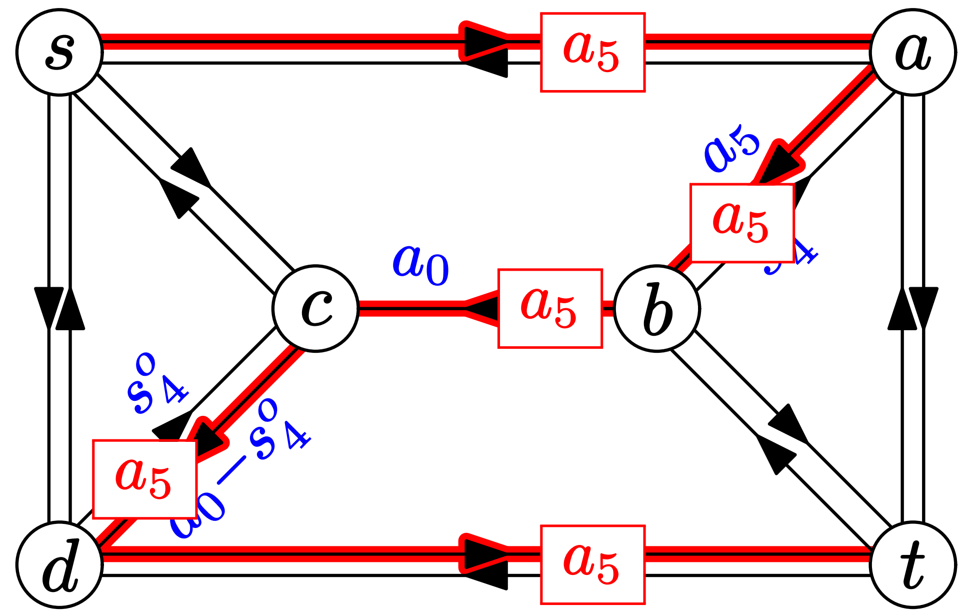
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

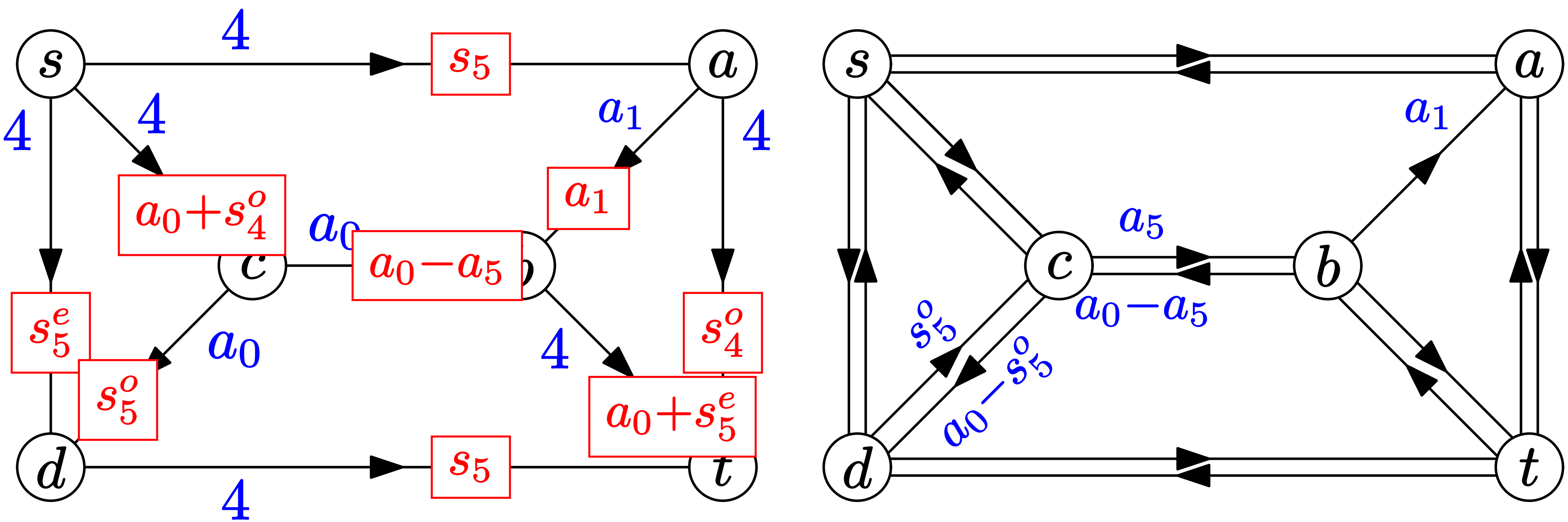
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \qquad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (5-2)

増加道法を実行してみる

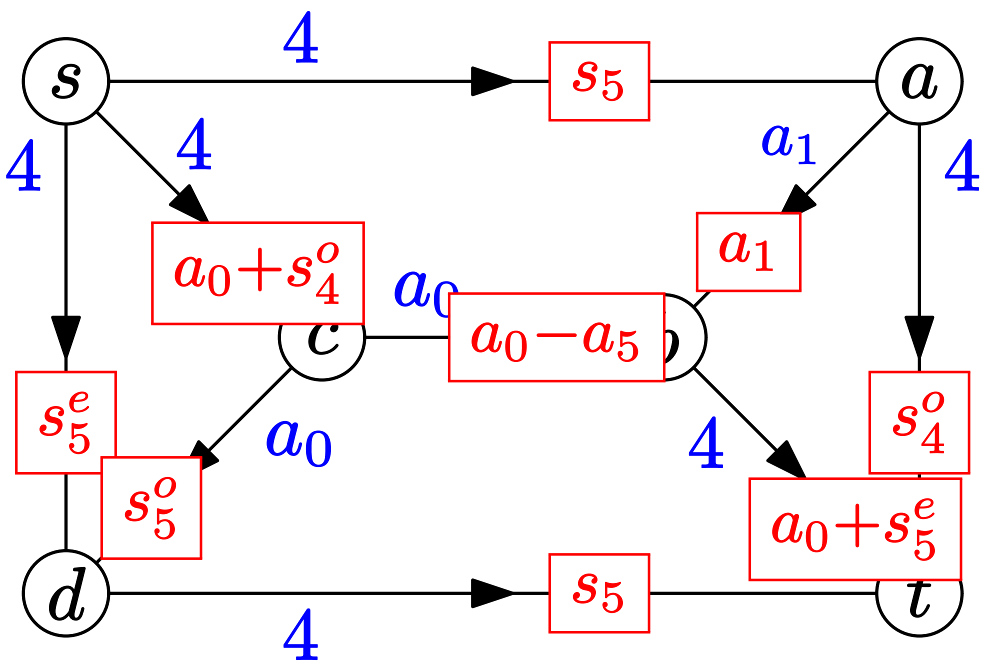


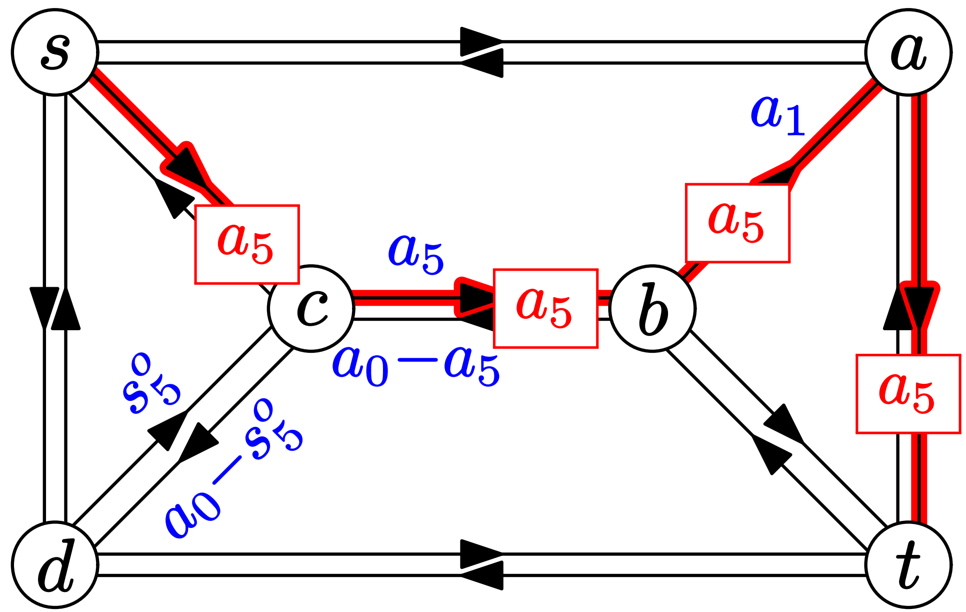
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2}-a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1-r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (5-2)

増加道法を実行してみる

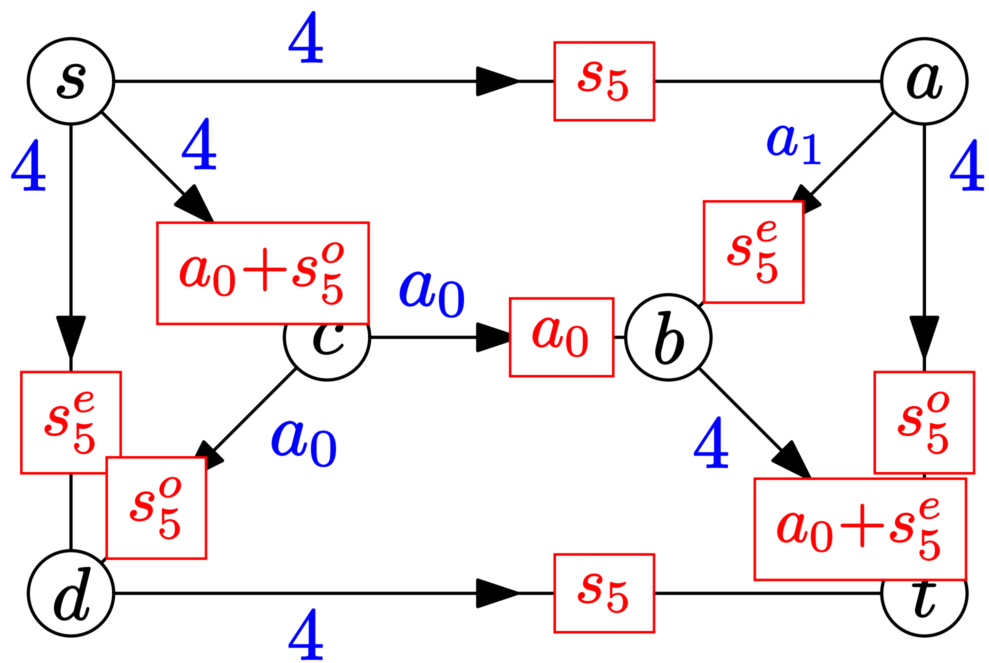


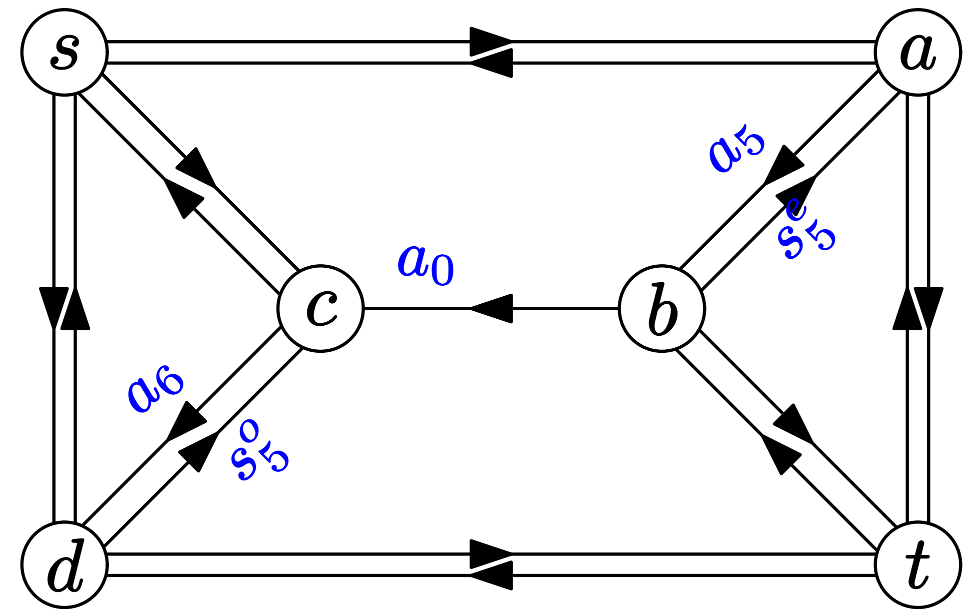


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる

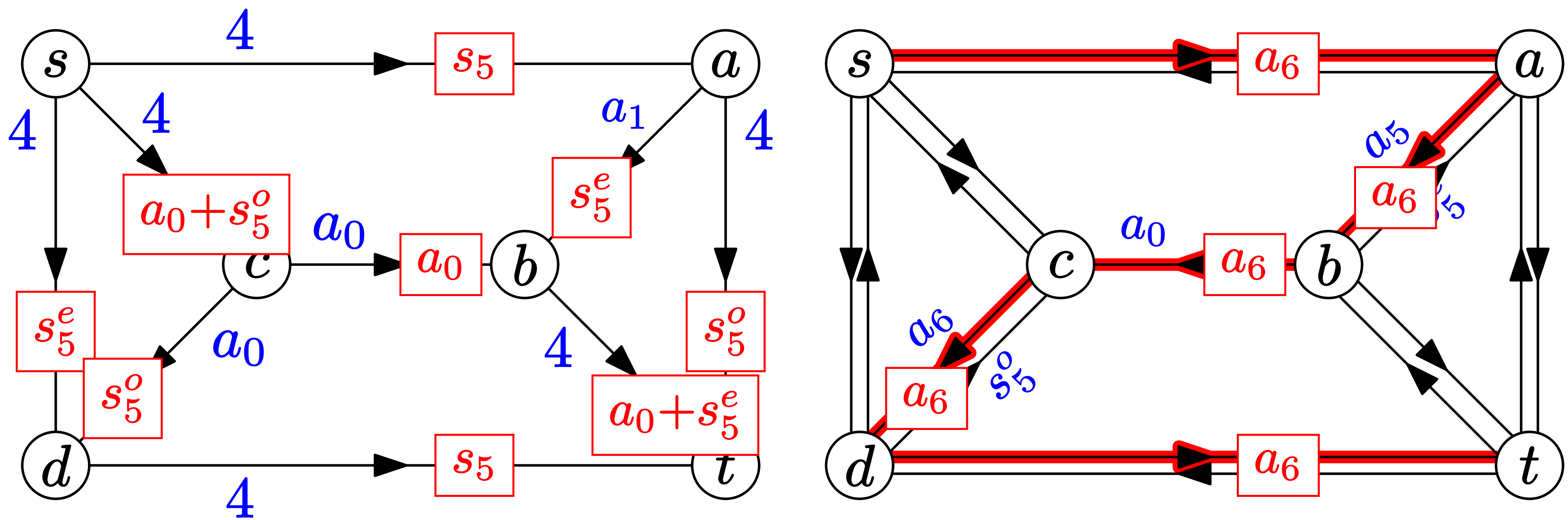




$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる



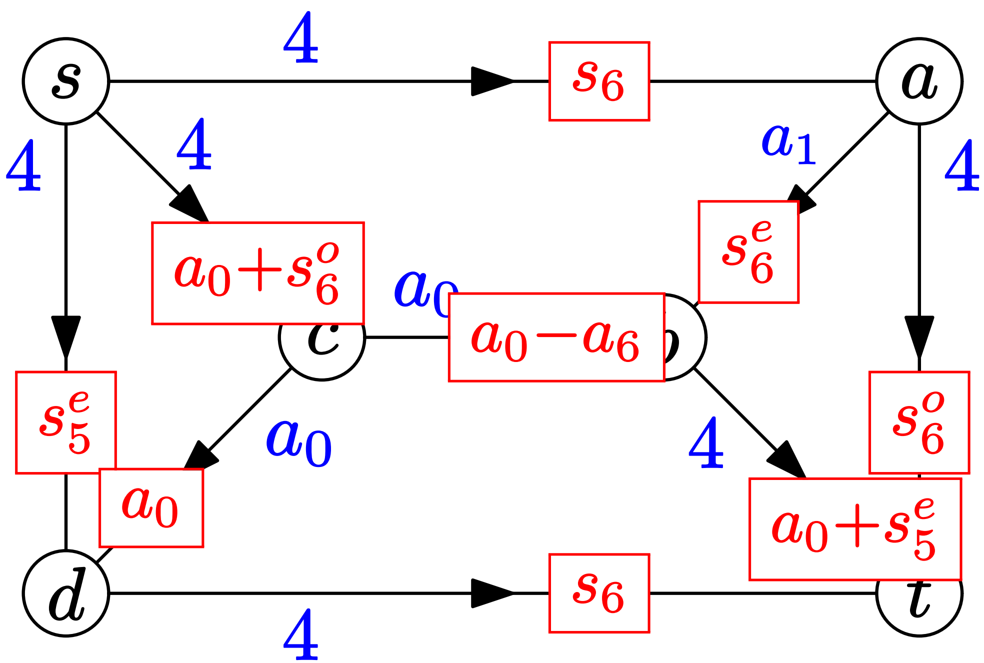
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

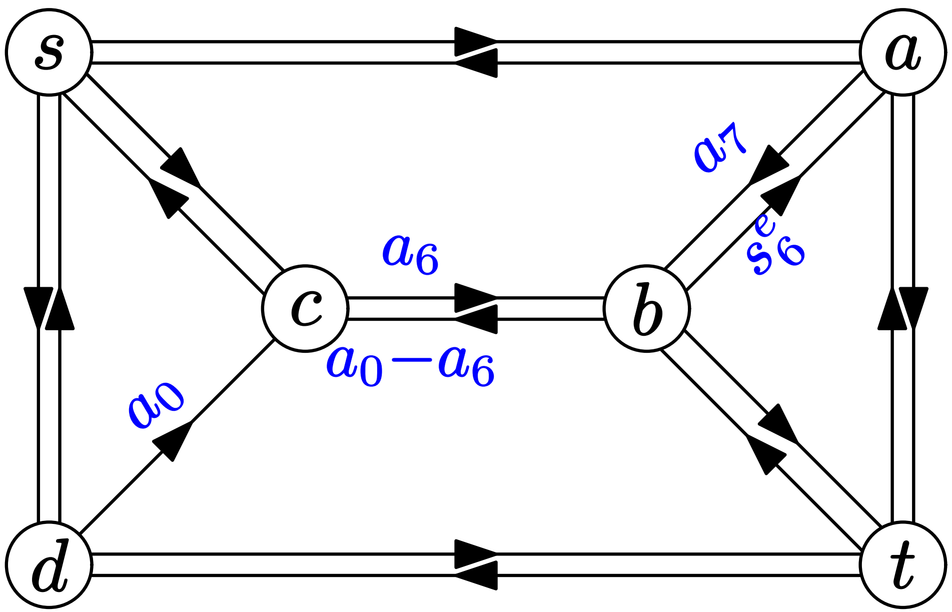
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる



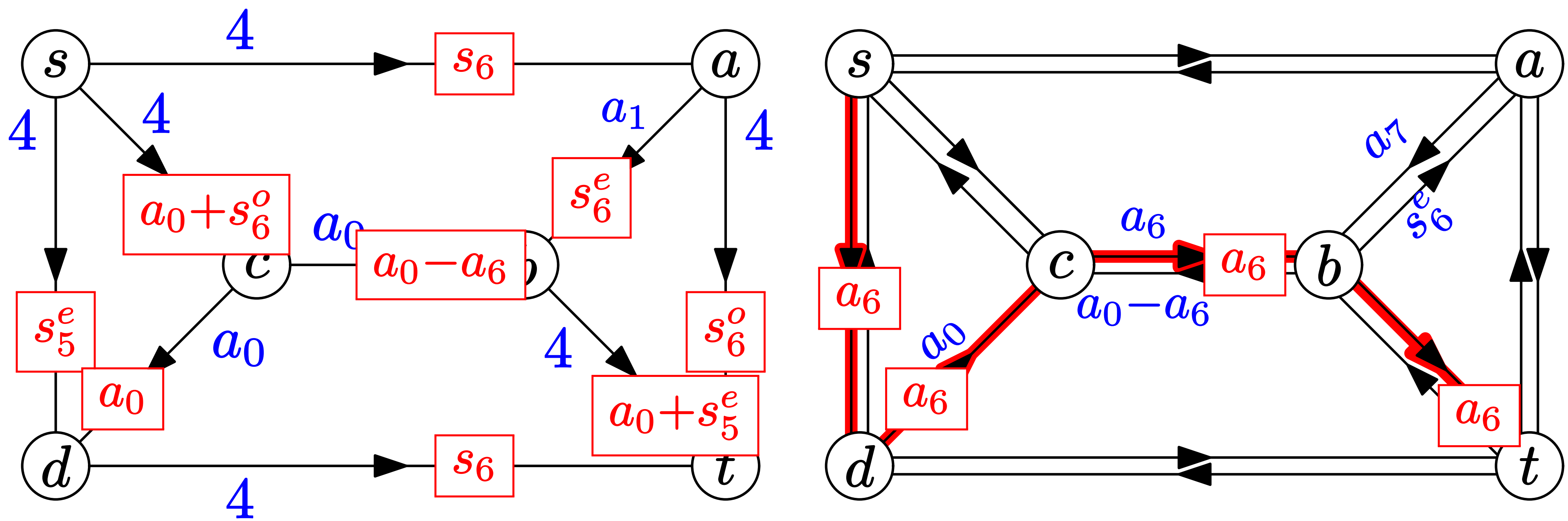


$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (6-2)

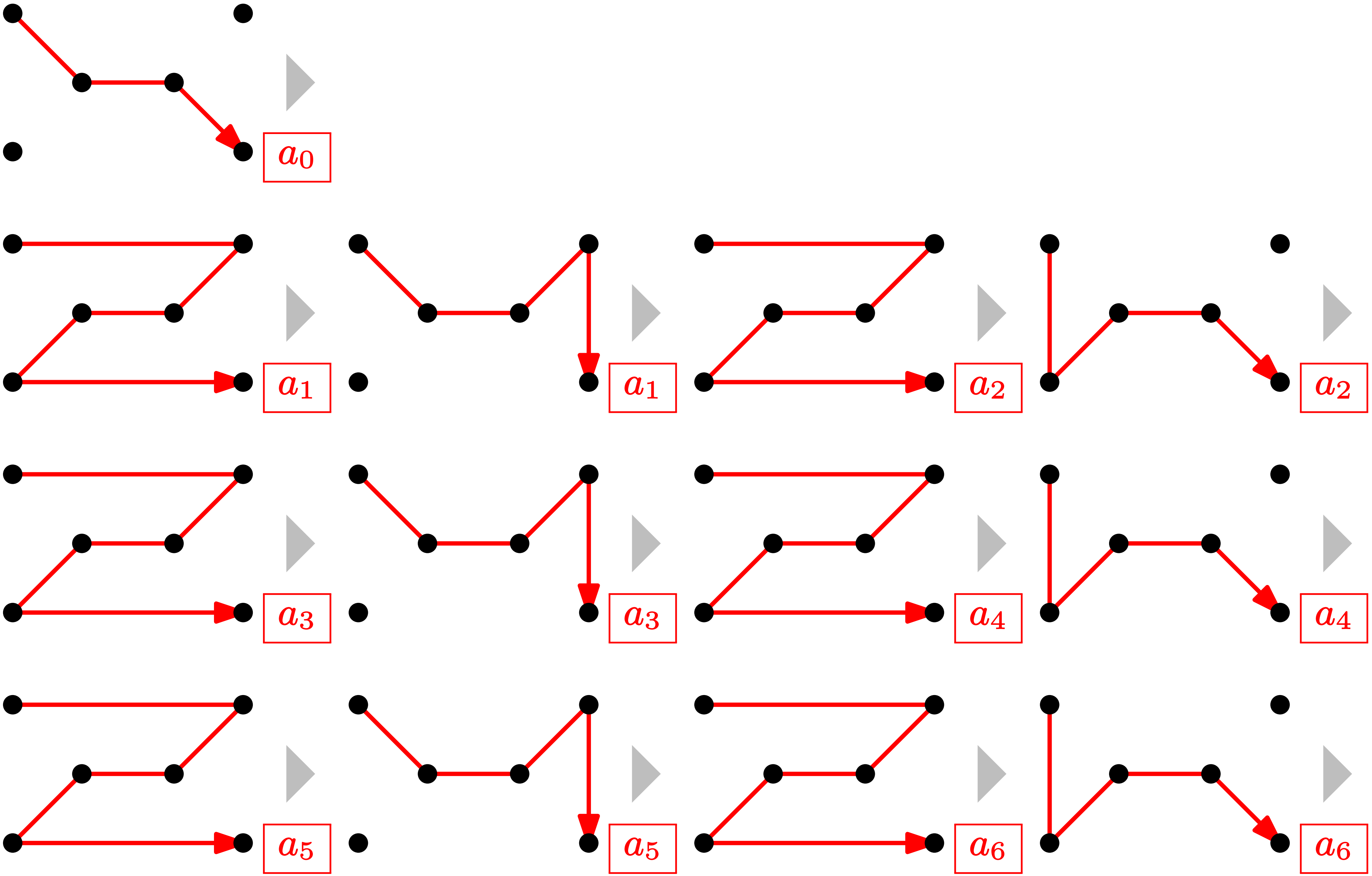
増加道法を実行してみる



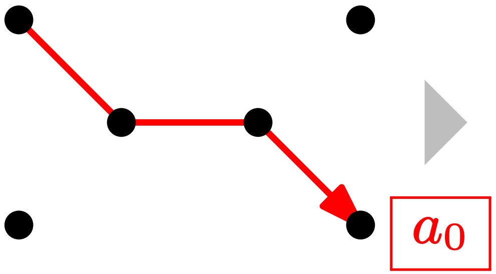
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例：法則

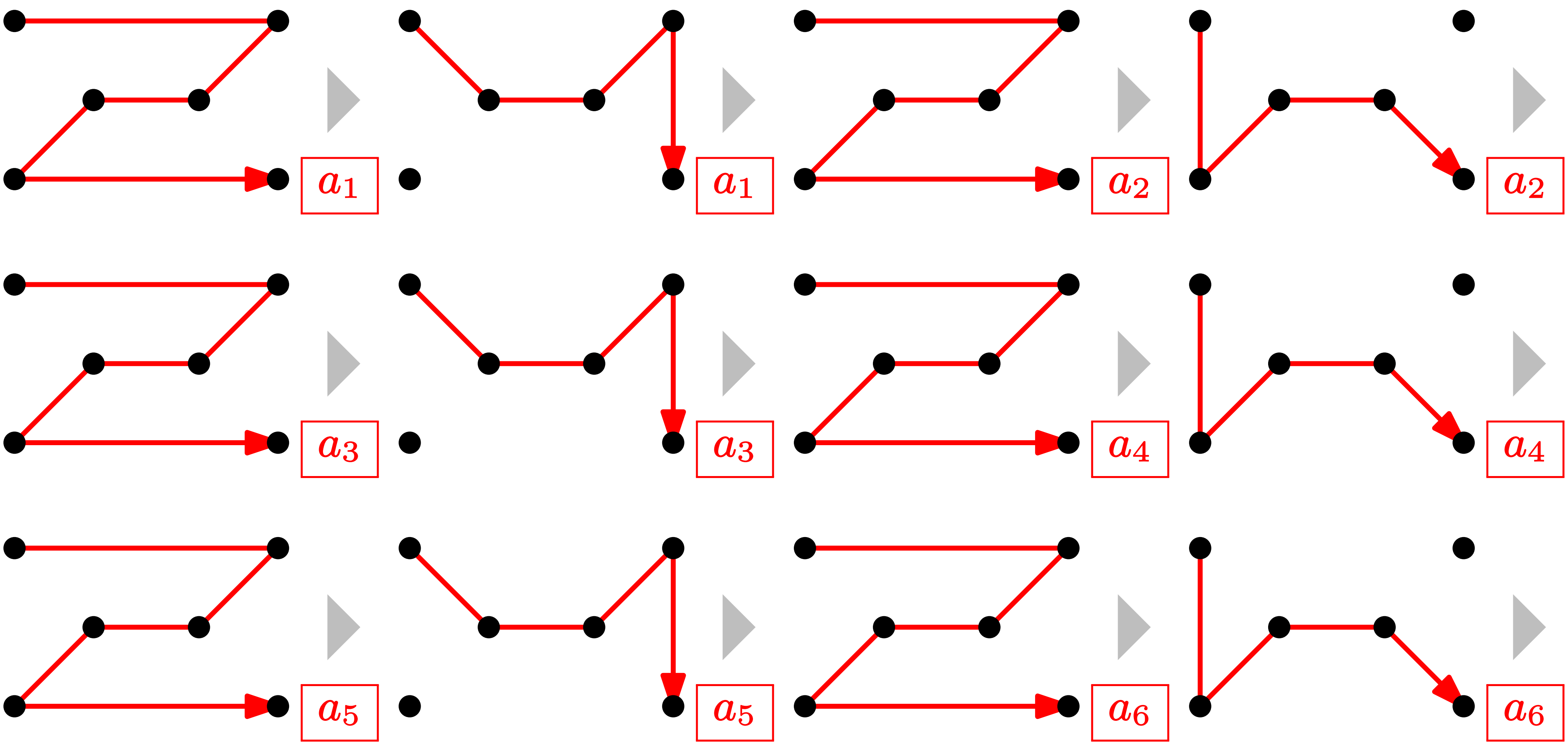


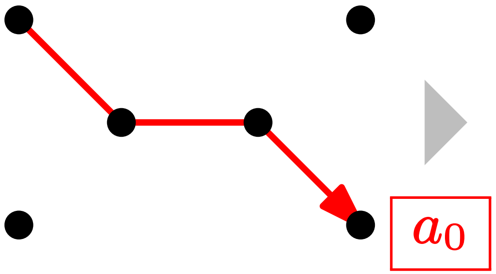
増加道法が停止しない例：法則



流の値 $\to a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 4.24$

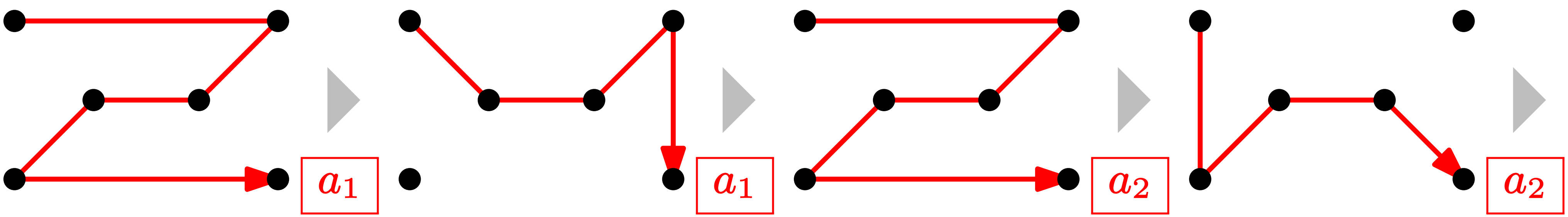
最大流の値 $= 7$

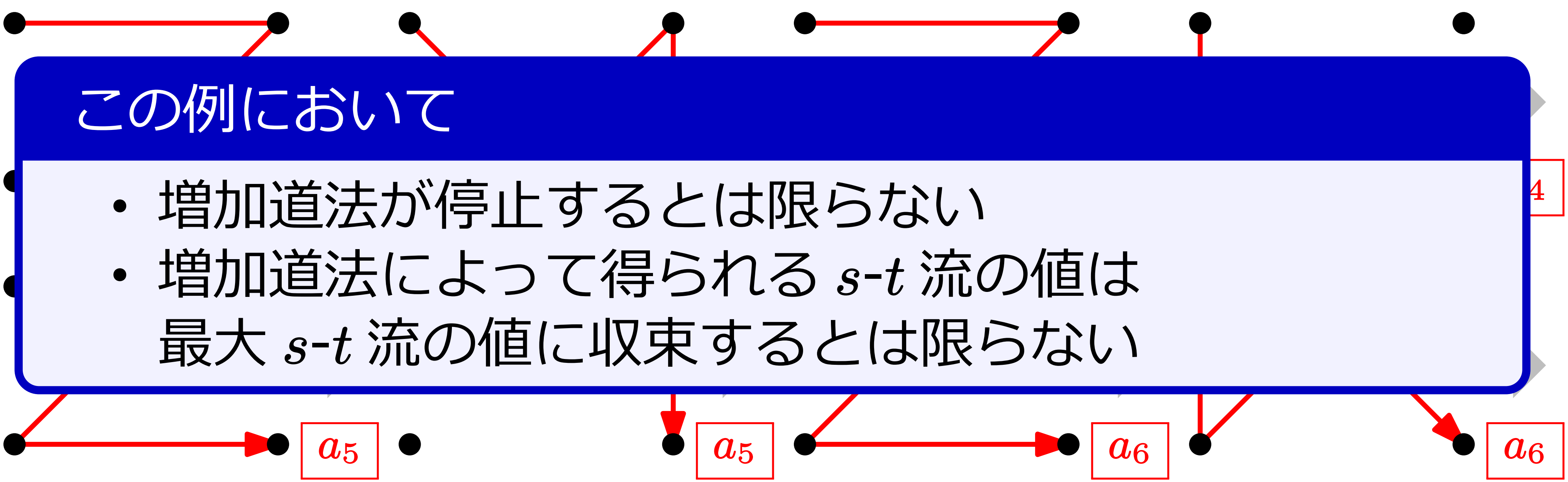




流の値 $\to a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 4.24$

最大流の値 $= 7$

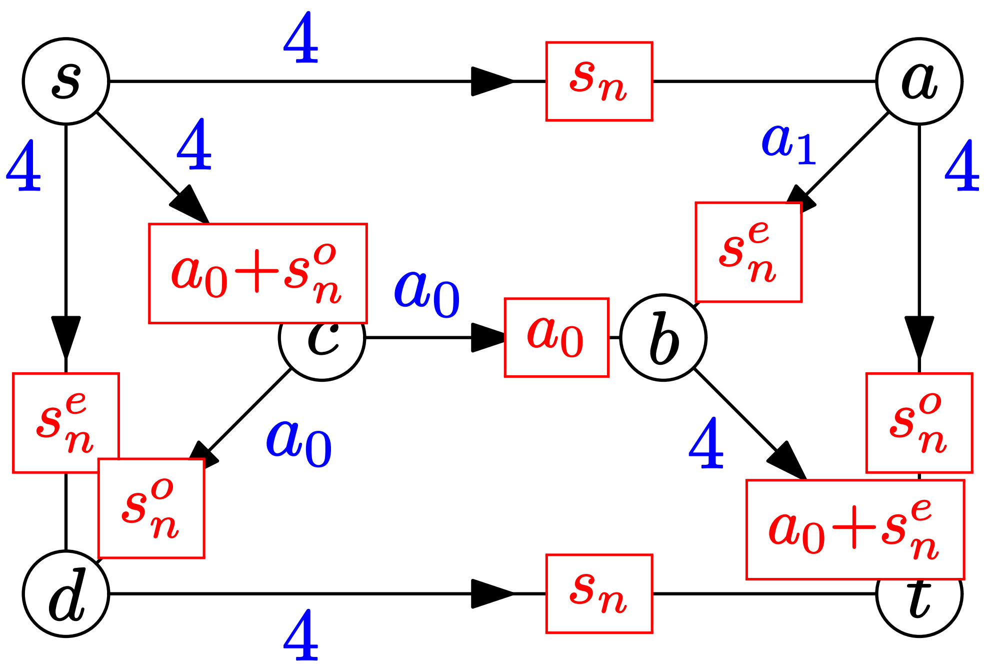


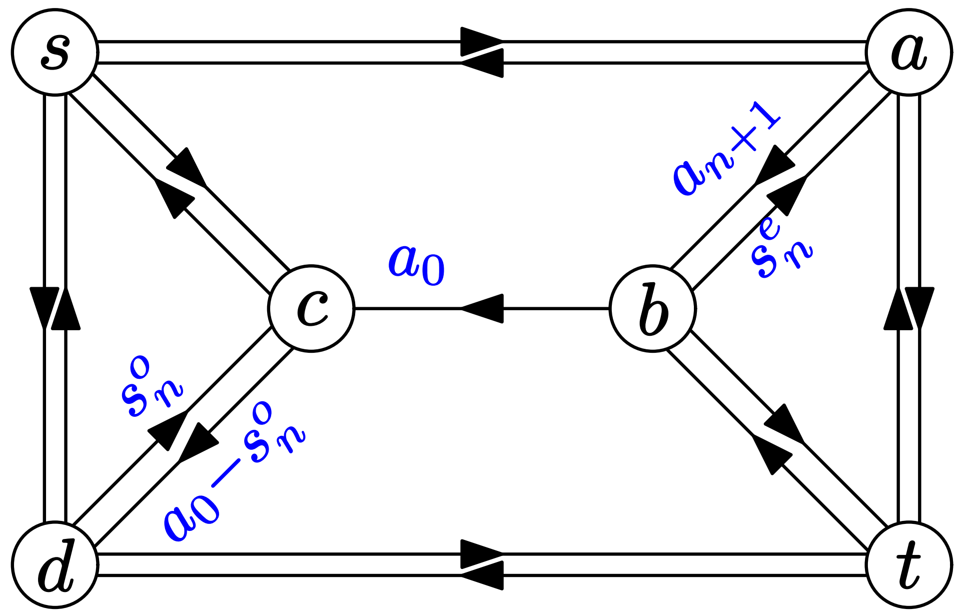


この例において

- 増加道法が停止するとは限らない
- 増加道法によって得られる s-t 流の値は
  最大 s-t 流の値に収束するとは限らない

増加道法を実行してみる　　　　$n \geq 0$ は偶数





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

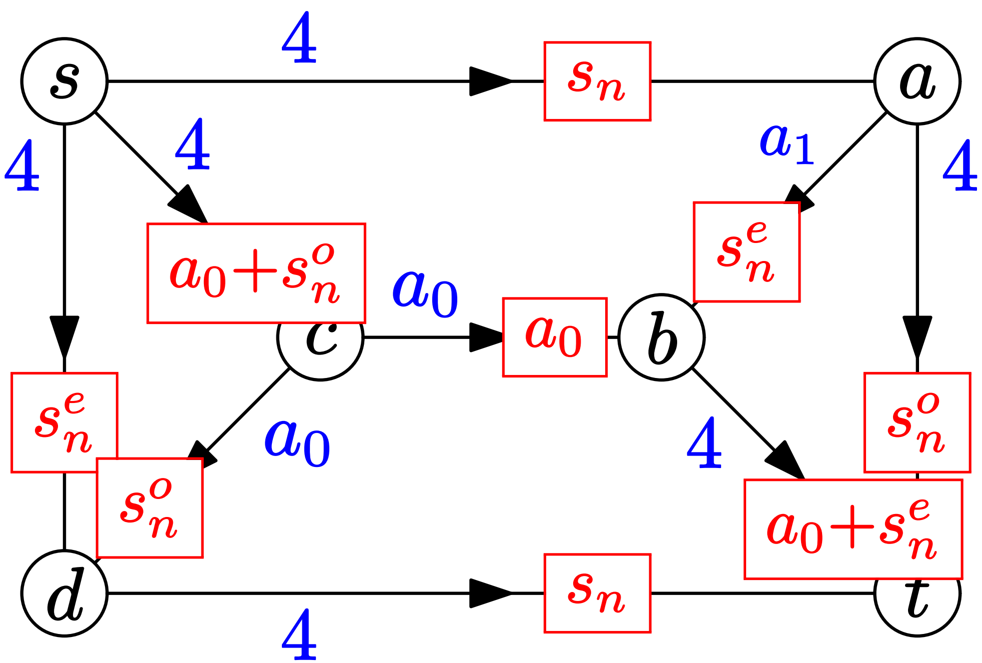
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

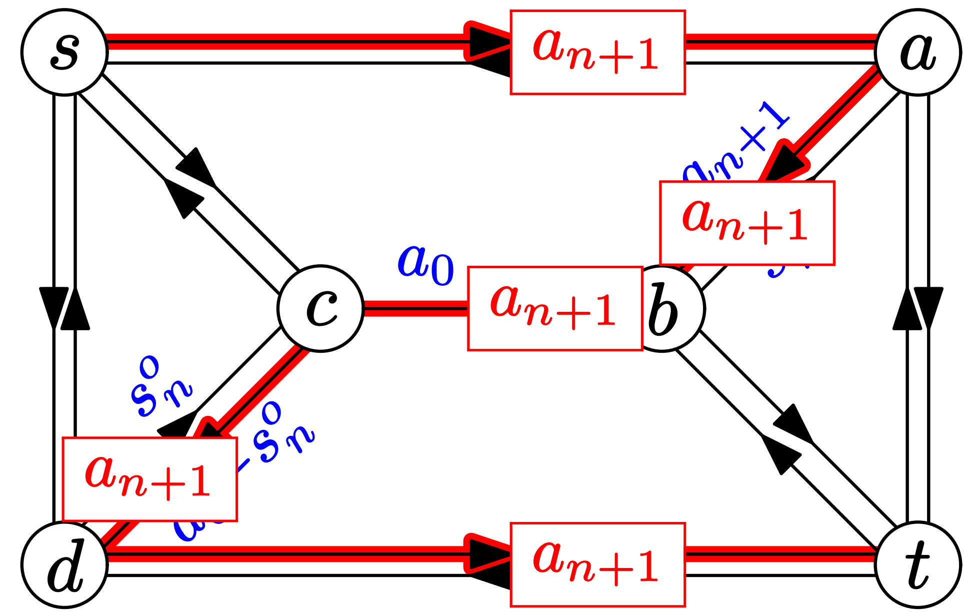
$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+1-1)

増加道法を実行してみる



$n \geq 0$ は偶数



$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

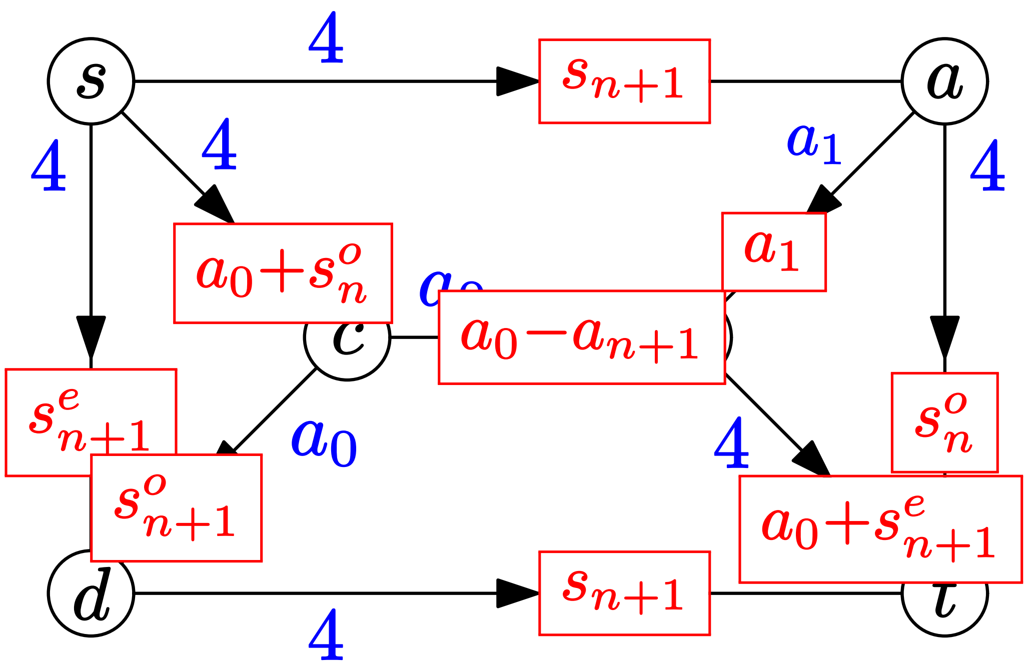
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

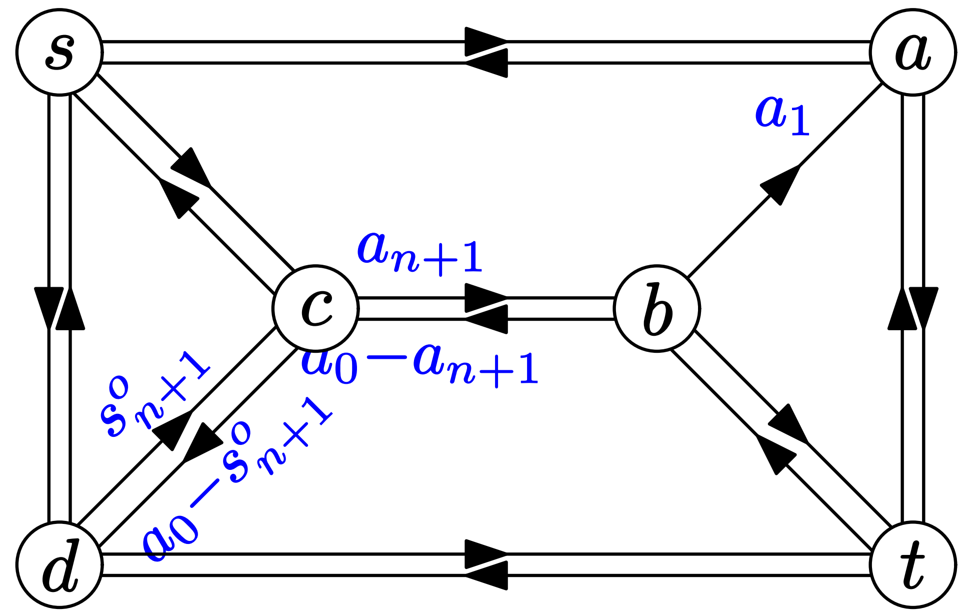
$$s_n^o = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s_n^e = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+1-2)

増加道法を実行してみる



$n \geq 0$ は偶数



$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

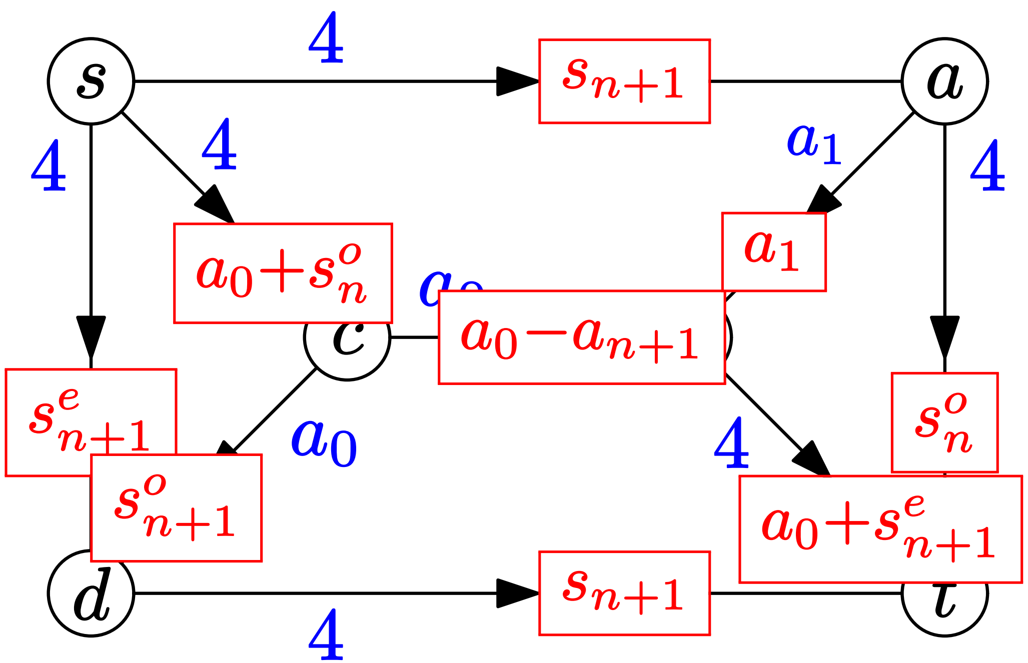
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

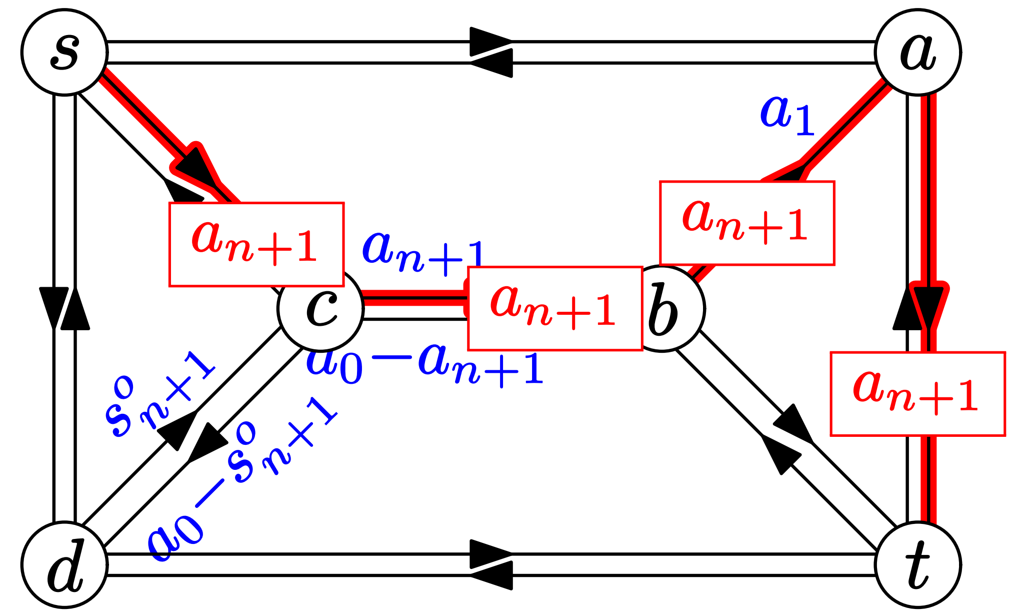
$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r$$

$$s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる

$n \geq 0$ は偶数





$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2}-a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$$

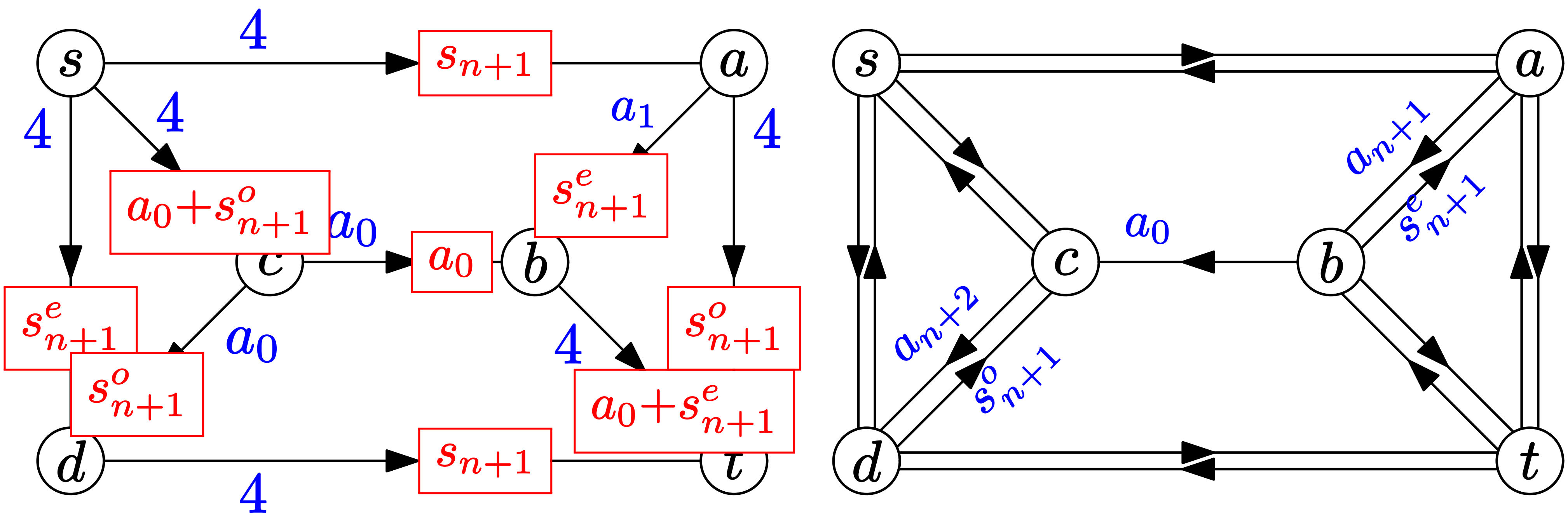
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1-r$$

$$s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+2-1)

増加道法を実行してみる

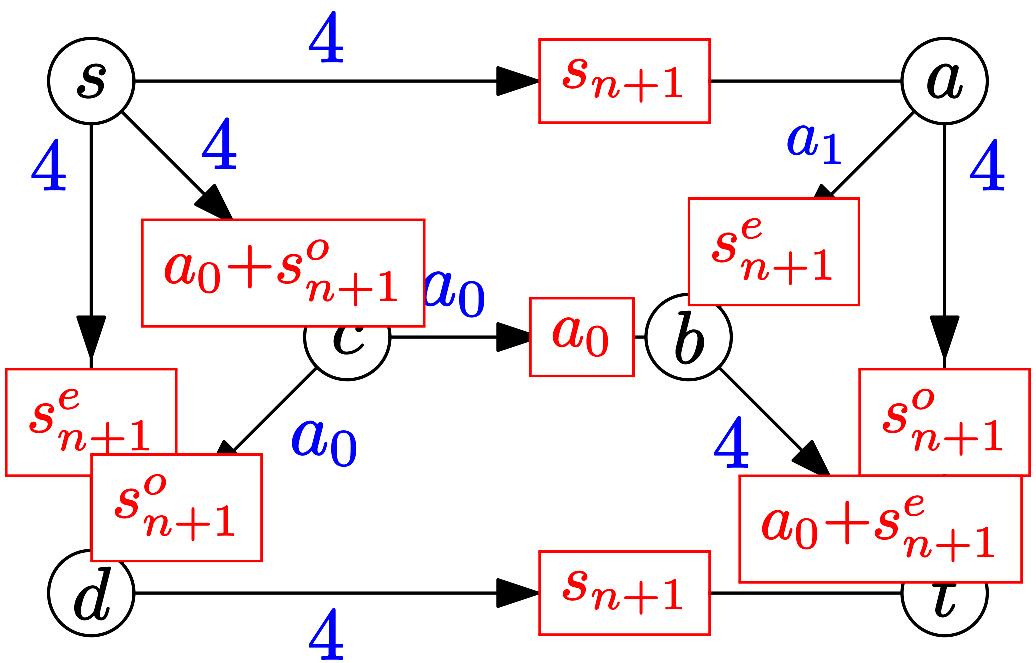


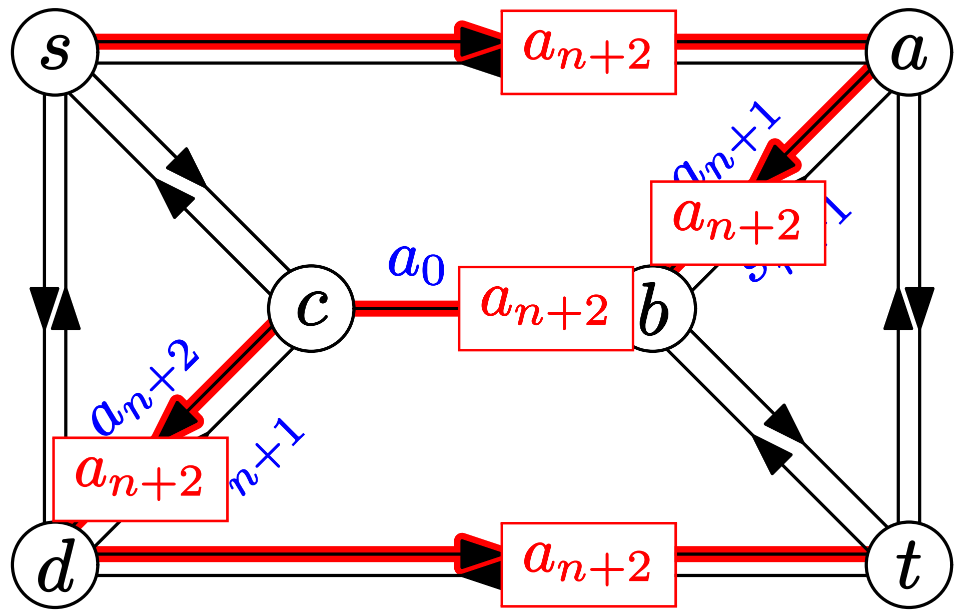
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+2-1)

増加道法を実行してみる



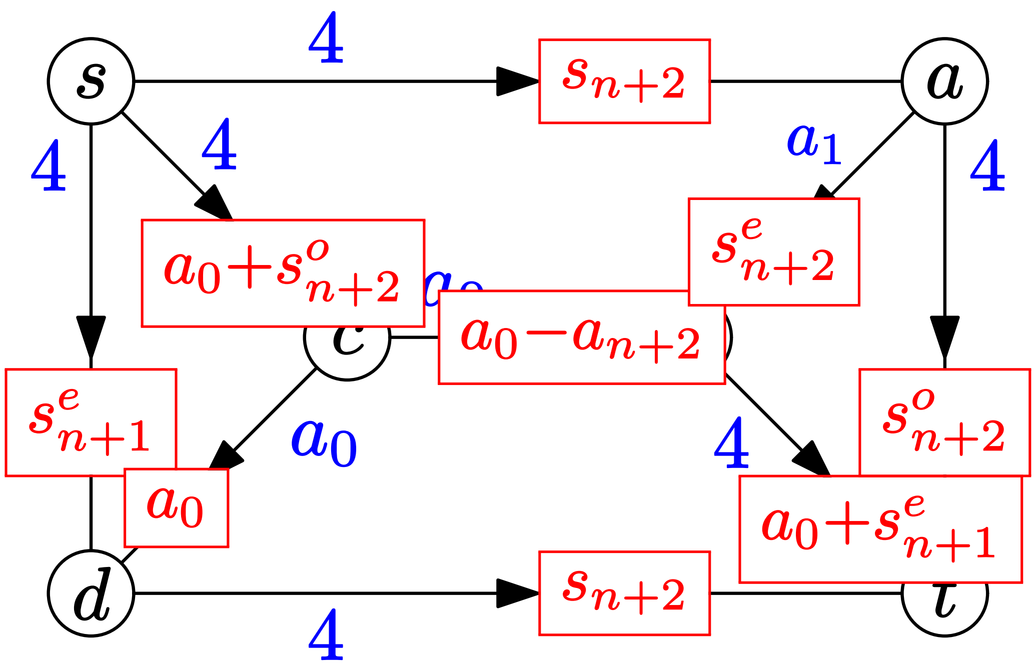


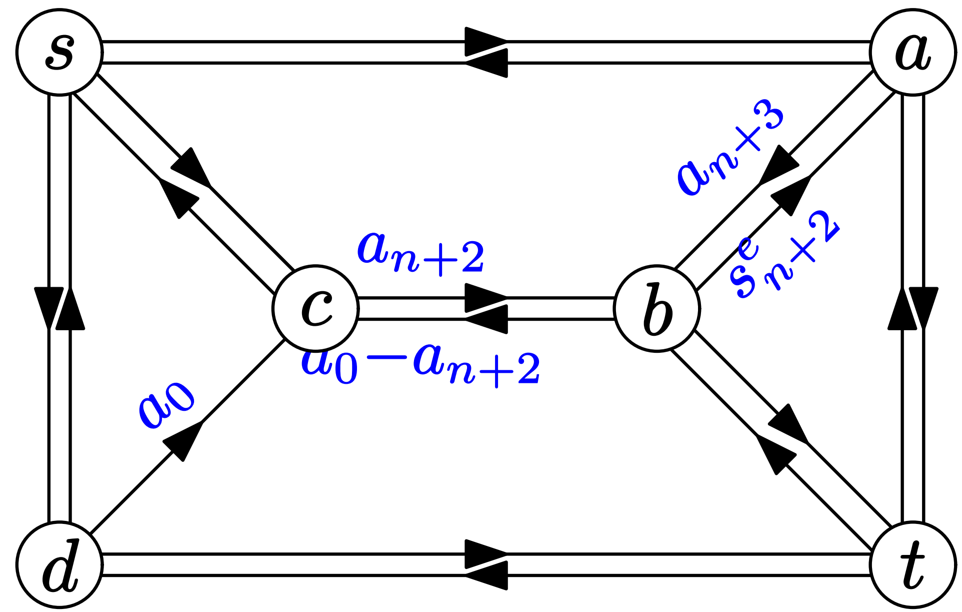
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ r & (n = 1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+2-2)

増加道法を実行してみる

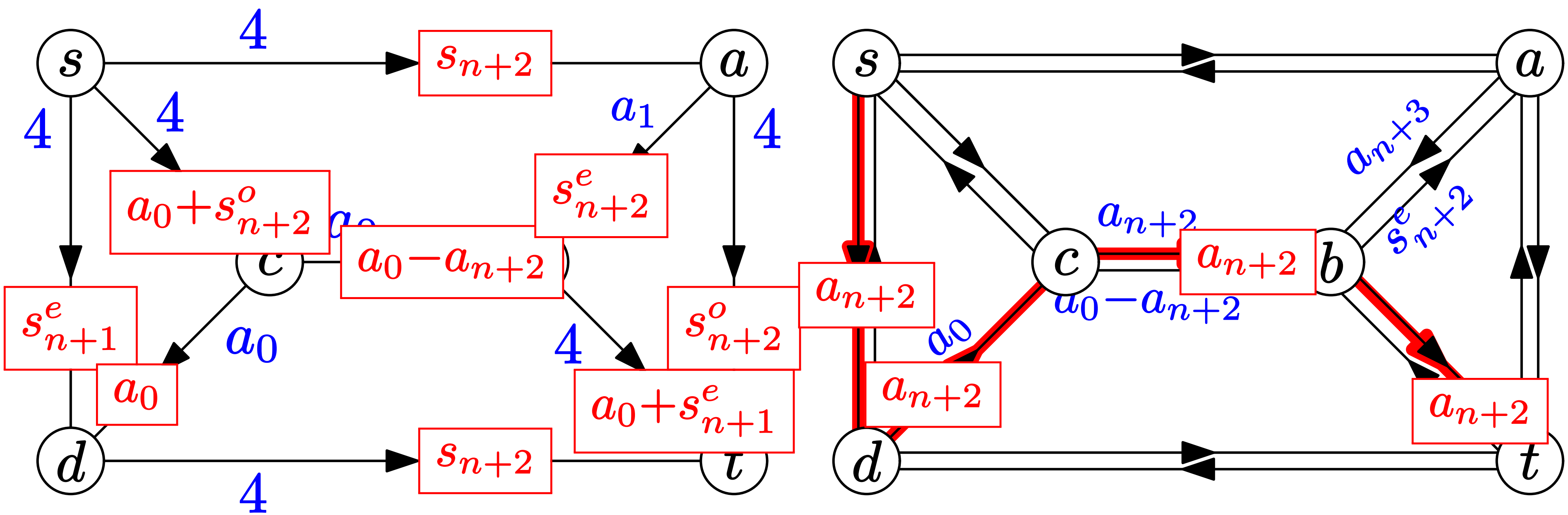




$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法を実行してみる



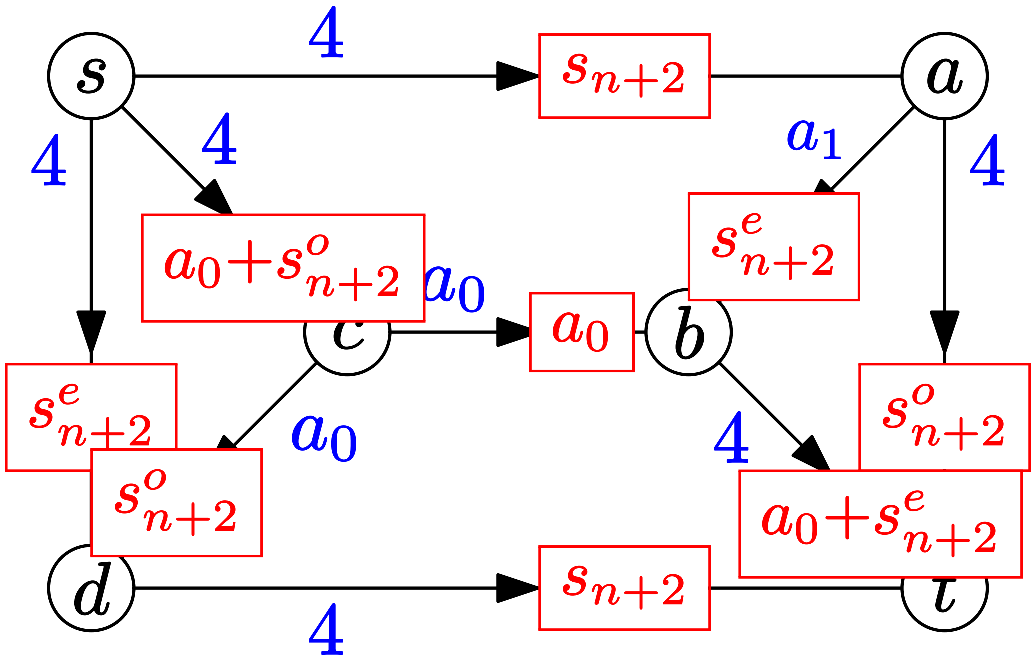
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ r & (n=1), \\ a_{n-2} - a_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases} \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_n = r^n, \quad r^2 = 1 - r \qquad s^o_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{奇数}}}^{n} a_i, \quad s^e_n = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{偶数}}}^{n} a_i$$

増加道法が停止しない例 (n+3-1)

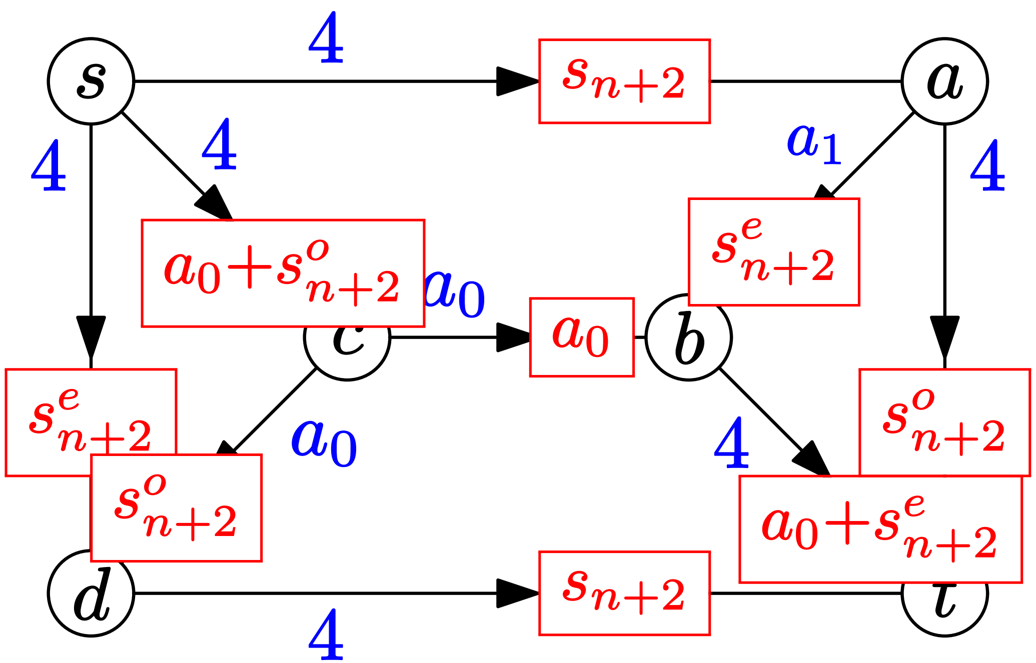
増加道法を実行してみる

$n \geq 0$ は偶数

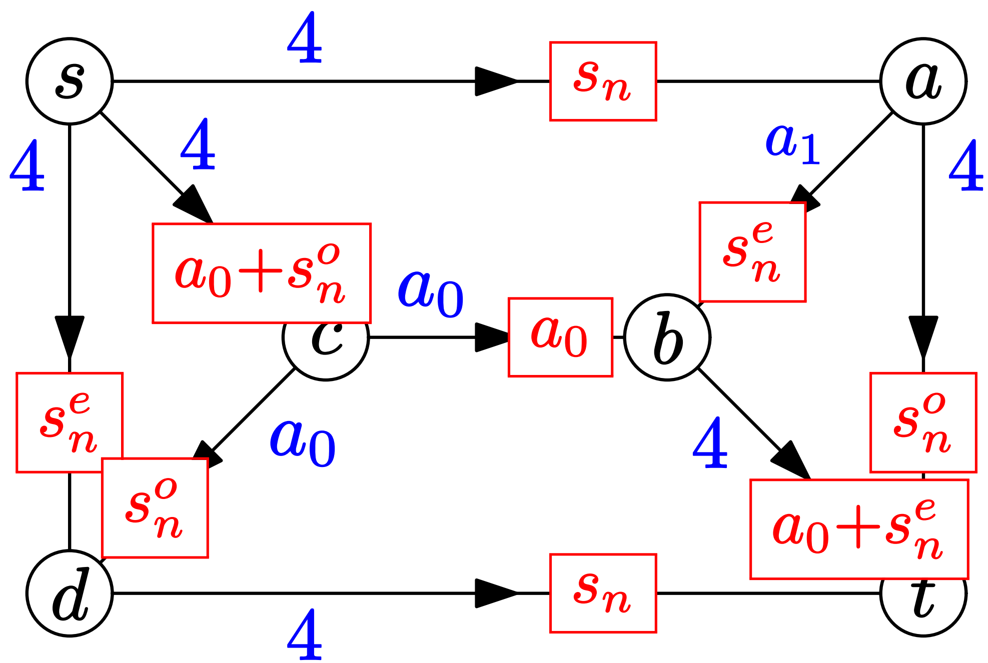


増加道法を実行してみる

$n \geq 0$ は偶数



(n+3-1)



(n+1-1)

[付録 2 ここまで]