離散最適化基礎論
第1回
最大流と最小費用流：定義

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2023年10月3日

最終更新：2023年10月4日　17:19

講義概要

概要

離散最適化における１つのトピックを集中的に学ぶ

今年度のトピック

ネットワークフロー (network flow)

特に，**最大流** と **最小費用流** を取り扱う

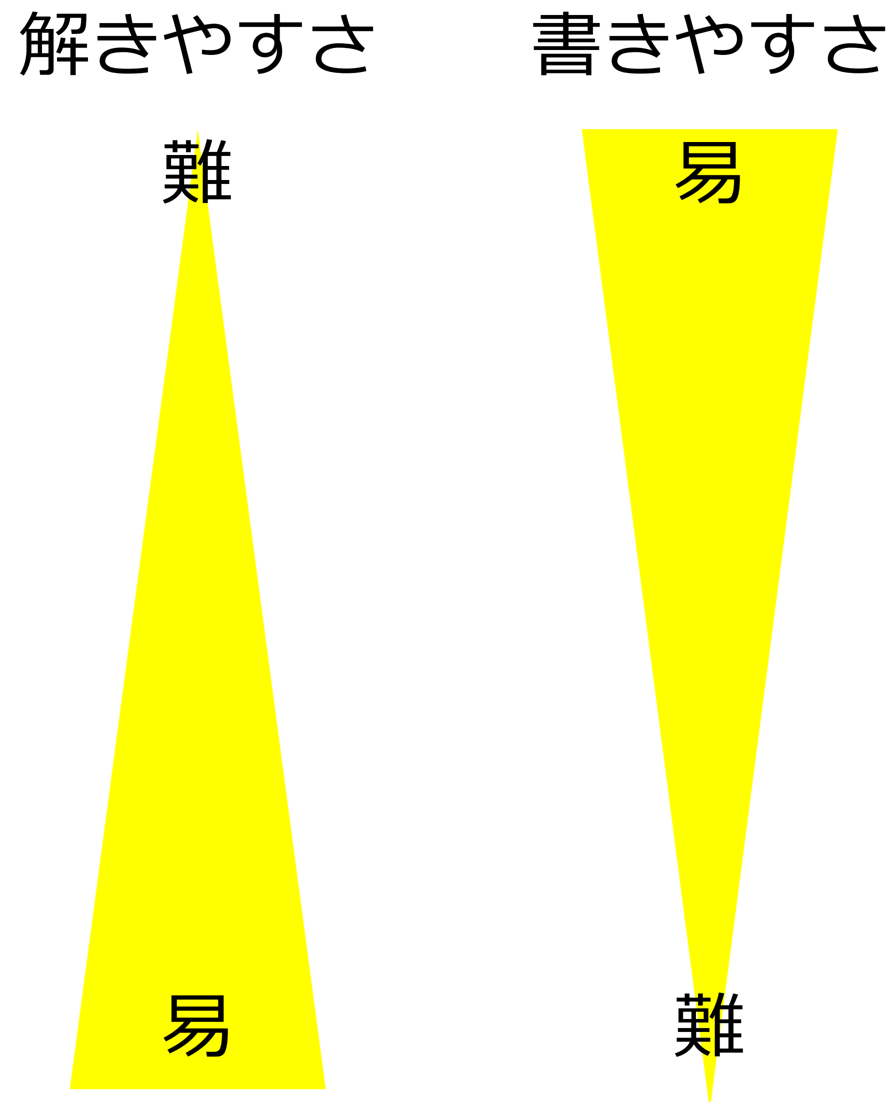
ネットワークフローにおける古典的な問題

最適化問題の階層 (の一部)

最適化
$\cup$
非線形最適化
$\cup$
凸最適化
$\cup$
線形最適化
$\cup$
最小費用流
$\cup$
最大流

最適化問題の階層 (の一部)

最適化
∪
非線形最適化
∪
凸最適化
∪
線形最適化
∪
最小費用流
∪
最大流



本講義の目標

目標 1

線形計画法 を通して
最大流問題 と **最小費用流問題** の次を理解する

- 問題の性質
- アルゴリズム

目標 2

最大流問題 と **最小費用流問題** を通して
次の 2 つを習得する

- 典型的な アルゴリズムの設計技法
- 典型的な アルゴリズムの解析技法

メッセージ：数学的な考え方からアルゴリズムが得られる

スケジュール (前半)

1. 最大流と最小費用流：定義 (10/3)
2. 最大流問題：増加道法 (10/10)

＊ 休み (10/17)

3. 線形計画法の復習 (10/24)
4. 最大流と最小費用流：線形計画問題として (10/31)
5. 最大流問題：Edmonds-Karp のアルゴリズム (11/7)
6. 最大流問題：容量スケーリング法 (11/14)
7. 最大流問題：Push-Relabel 法 (概要) (11/21)
8. 最大流問題：Push-Relabel 法 (計算量評価) (11/28)

スケジュール(後半)

∗	休み	(12/5)
9.	最小費用流問題：最適性条件	(12/12)
10.	最小費用流問題：負閉路消去法	(12/19)
11.	最小費用流問題：正カット消去法	(12/26)
∗	休み	(1/2)
12.	最小費用流問題：逐次最短路法	(1/9)
13.	最小費用流問題：容量スケーリング法	(1/16)
14.	最小費用流問題：費用スケーリング法	(1/23)
∗	休み	(1/30)

授業の進め方：基本情報

教員

岡本吉央 (おかもと よしお)

- 居室：西 4-206
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp

講義 Web ページ

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2023/networkflow/

- 講義スライド
- コメント回答
- レポート出題
- その他

Google Classroom

内部シラバスのコードを見て，各自が登録

授業の進め方：各回の進行 (予定)

10:40	授業開始
11:20 頃	休憩 (3 分程度)
	授業再開
	授業終了
12:10	コメント投稿
13:00	コメント受付終了

授業の進め方：各回の進行 (予定)

10:40 授業開始

11:20 頃 休憩 (3 分程度)

授業再開

授業終了

12:10 コメント投稿

13:00 コメント受付終了

Google Classroom のフォームから投稿

- 質問・疑問
- 誤植の指摘
- 感想
- 要望
- 文句
- 雑談
- など何でも

(匿名で収集)

授業の進め方：評価

評価方法

2 回のレポート提出 **のみ** による

- 1 回 50 点満点

成績

素点 = レポート 1 の得点 + レポート 2 の得点

授業の考え方：数学と証明

注意点 1

この授業では，数学を使い，数学的な証明もする

$\boxed{\text{理由}}$

- 授業の内容の正しさが **検証** できるべき
- 証明という **技法** を身につけるべき

$\rightsquigarrow$ この授業では **批判的思考**，**論理的思考** の体得 も目指す

授業の考え方：プログラミング

注意点 2

この授業では，プログラミングを行わない

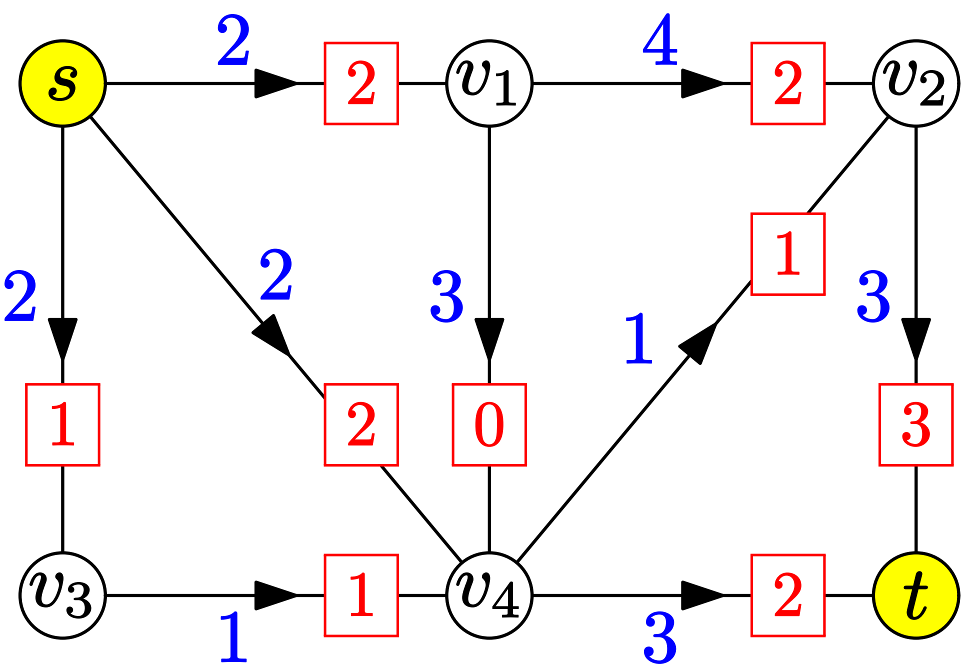
理由

- 教員がまじめにプログラミングをしたことがない
  ($\therefore$ 教員が授業で扱えない)
- 受講生自身が自主的にプログラミングをすればよい

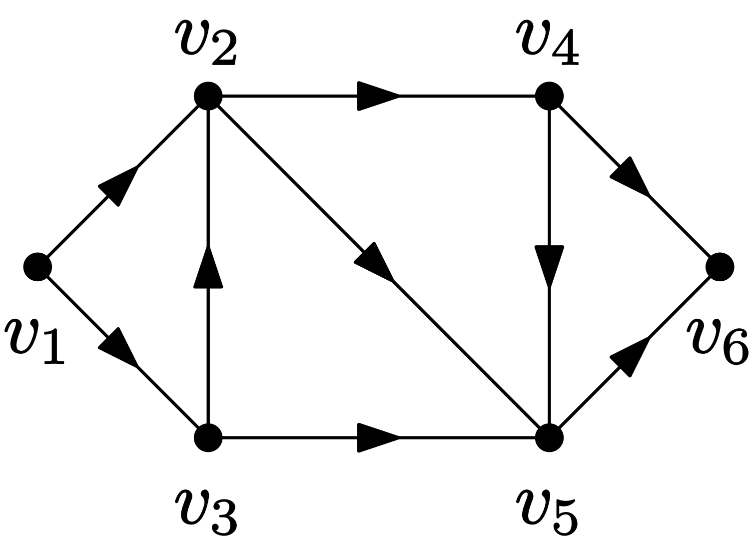
$\leadsto$ 授業の内容から **自由に はみ出ていく** ことを推奨する

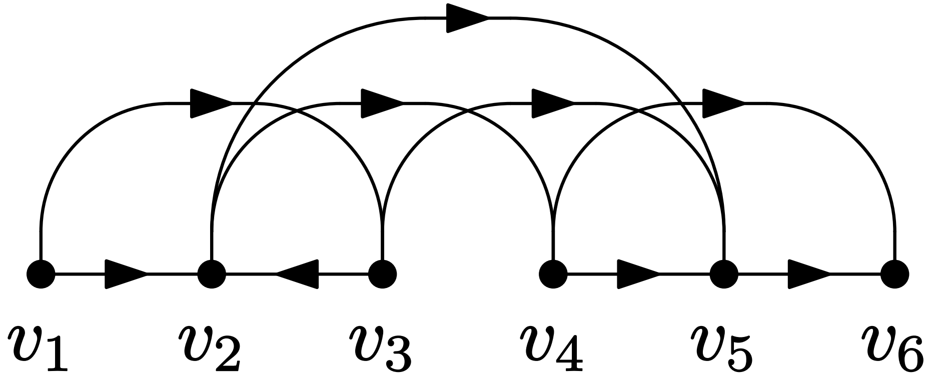
本日の内容

1. **有向グラフ**
2. 流
3. 最大流問題
4. 最小費用流問題

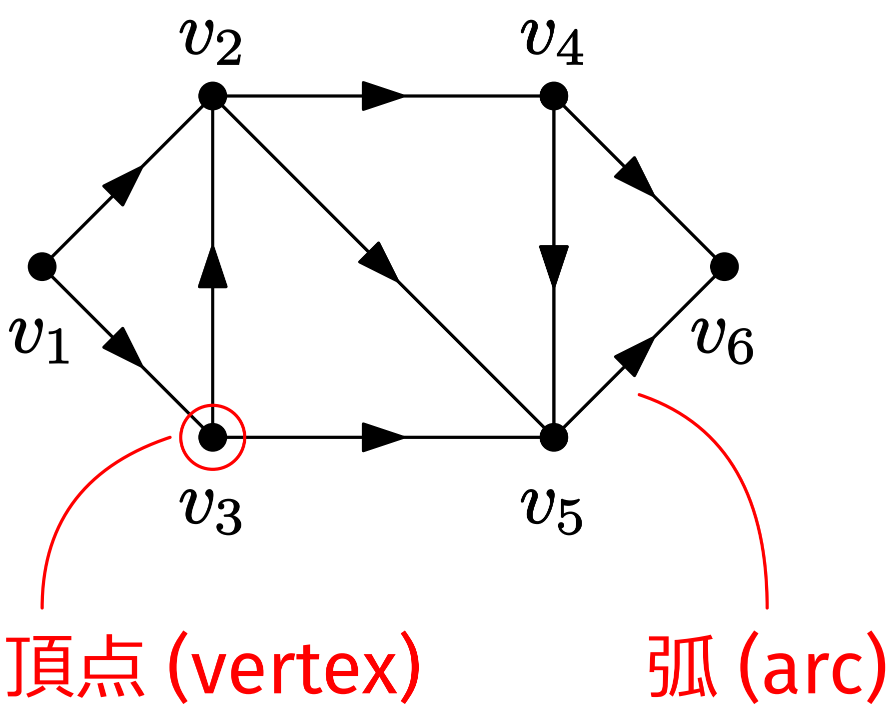


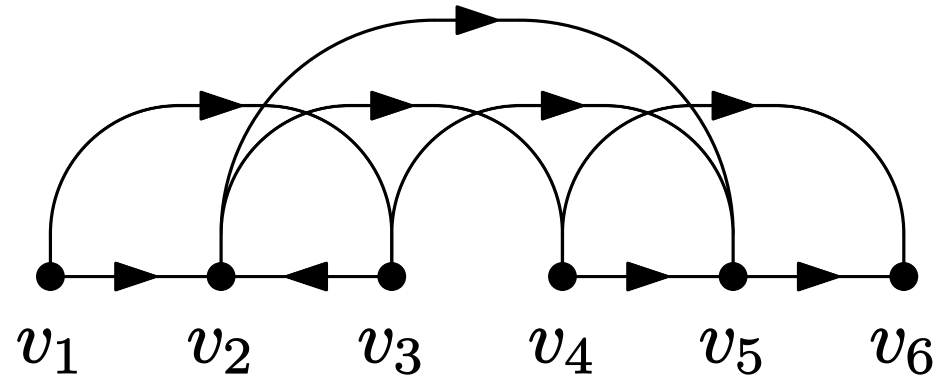
有向グラフ：例



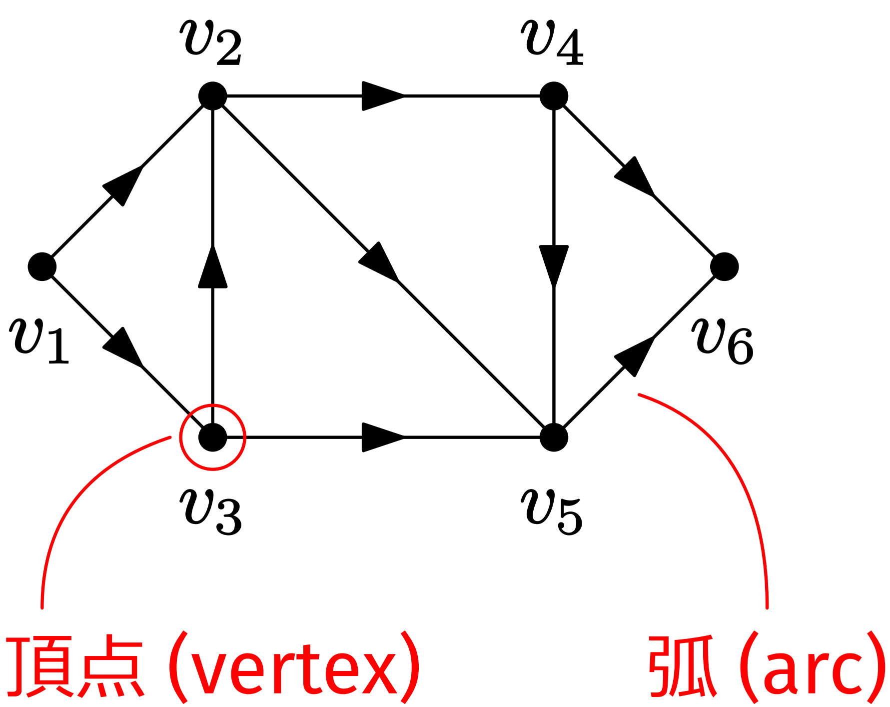


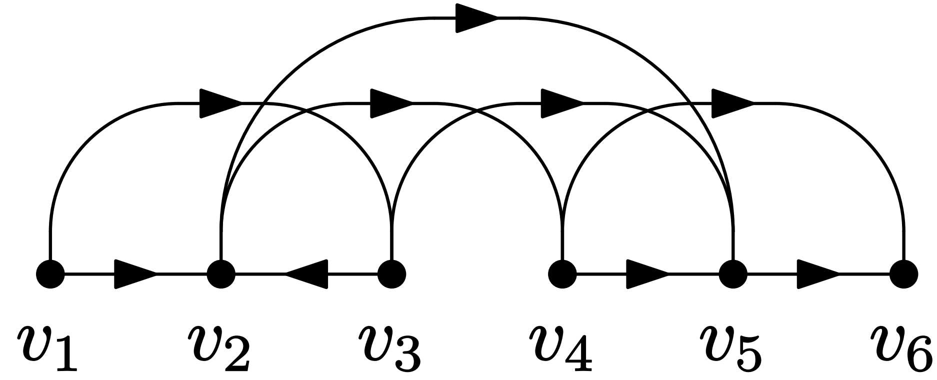
有向グラフ：例

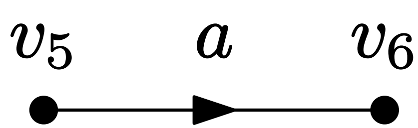




有向グラフ：例

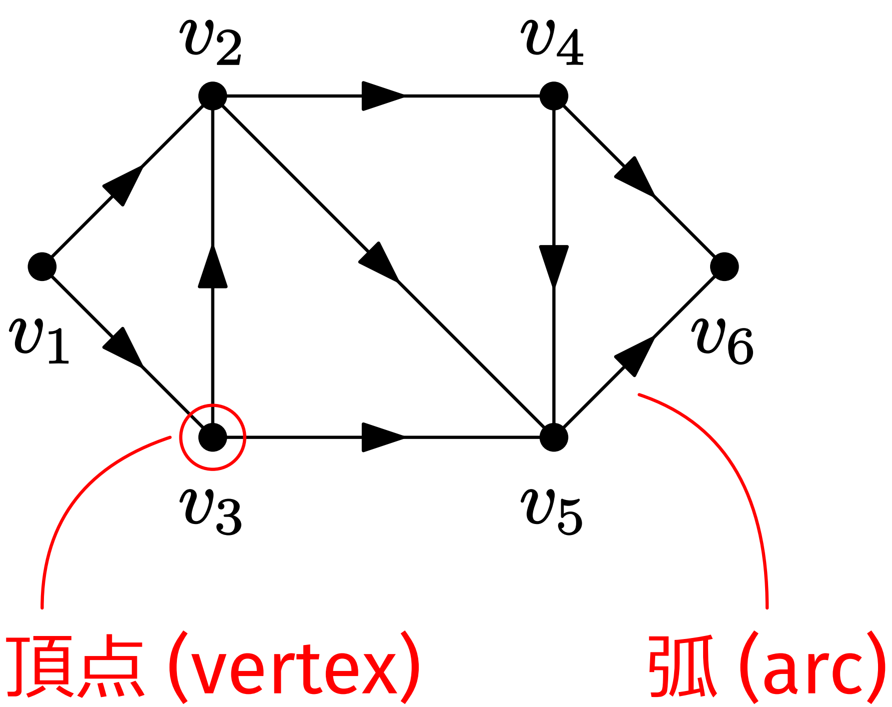


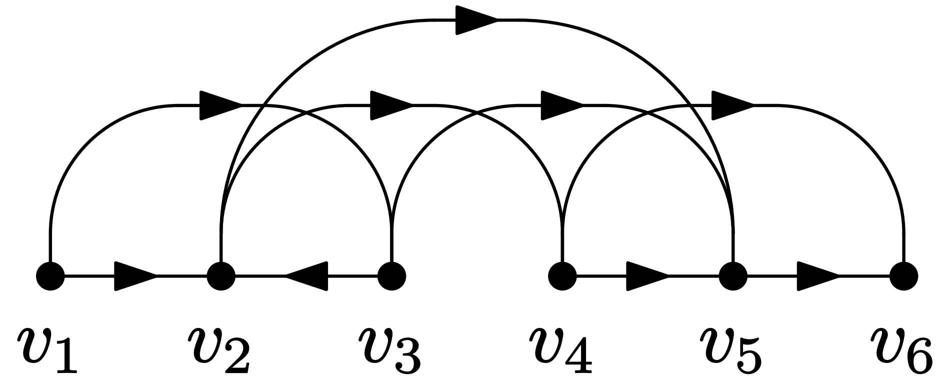


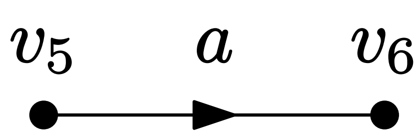


記法：$a = (v_5, v_6)$

有向グラフ：例







記法：$a = (v_5, v_6)$

頂点集合 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

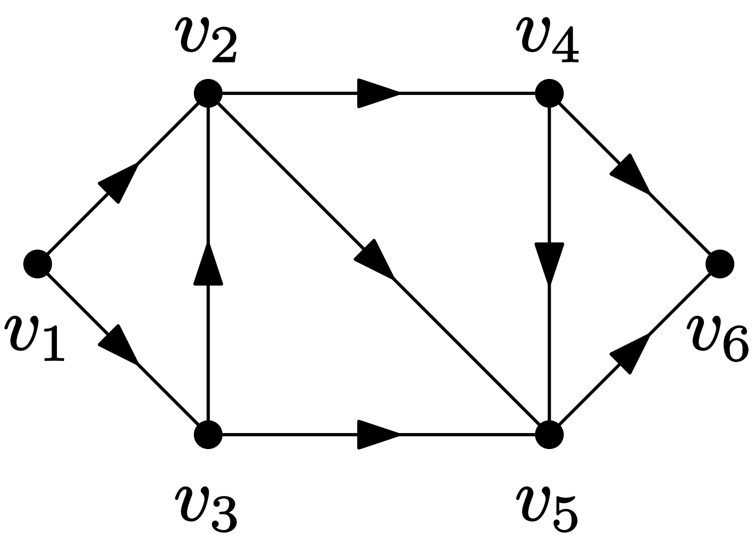
弧集合 $A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\}$

有向グラフ：定義

定義：有向グラフ (directed graph, digraph)

有向グラフ とは，順序対 (V, A) で次を満たすもの

- V は (有限) 集合
- $A \subseteq V \times V$



$\boxed{\text{注}}$ この授業において V はつねに有限集合

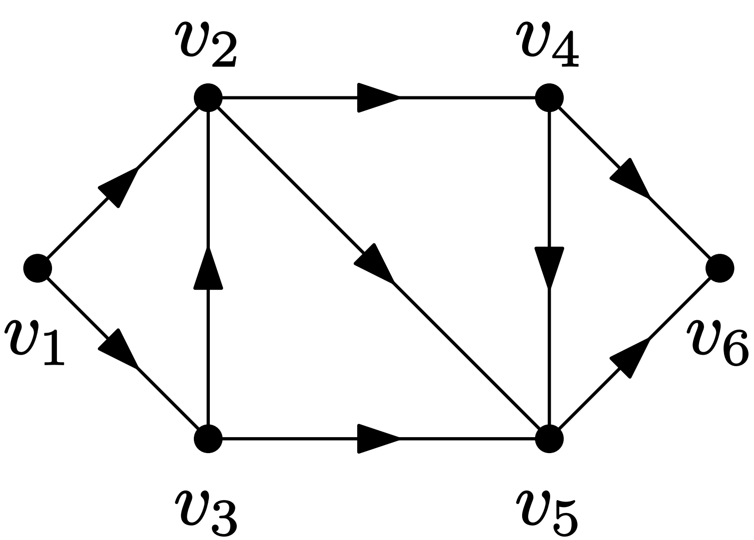
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\}$$

頂点集合，頂点：定義

定義：頂点集合 (vertex set)，頂点 (vertex)

有向グラフ $G = (V, A)$ において，
V を G の **頂点集合** と呼び，
V の要素を G の **頂点** と呼ぶ



$\boxed{注}$ 頂点のことを節点 (node) や点 (point) と呼ぶこともある

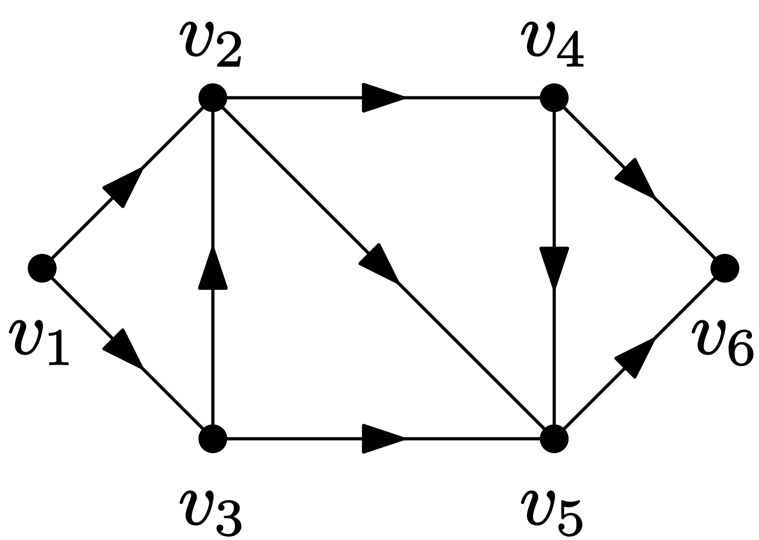
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$\begin{aligned} A = \{&(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_2), \\ &(v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\} \end{aligned}$$

弧集合，弧：定義

定義：弧集合 (arc set)，弧 (arc)

有向グラフ $G = (V, A)$ において，
A を G の **弧集合** と呼び，
A の要素を G の **弧** と呼ぶ



$\boxed{注}$ 弧のことを辺 (edge) や枝（えだ）と呼ぶこともある

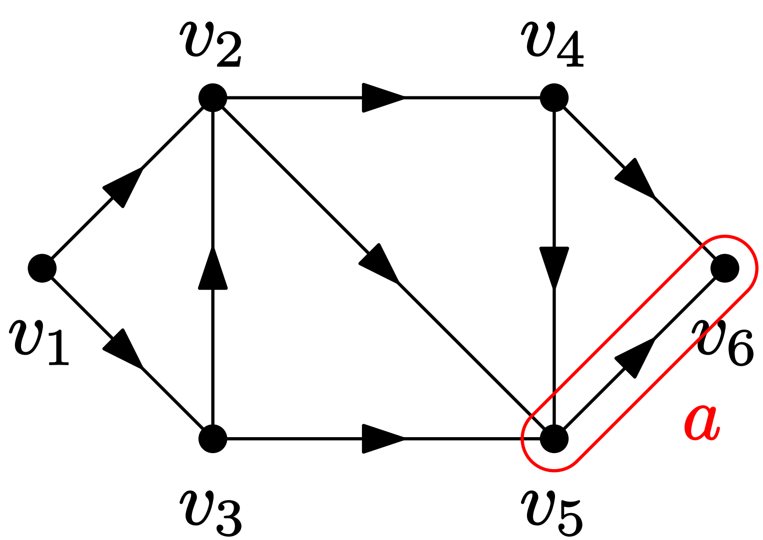
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$\begin{aligned} A = \{&(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_2), \\ &(v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\} \end{aligned}$$

始点，終点：定義

定義：始点 (tail)，終点 (head)

有向グラフ $G = (V, A)$ の弧 $a = (u, v) \in A$ において，
頂点 u を弧 a の **始点** と呼び，
頂点 v を弧 a の **終点** と呼ぶ



例： 弧 $a = (v_5, v_6)$ において

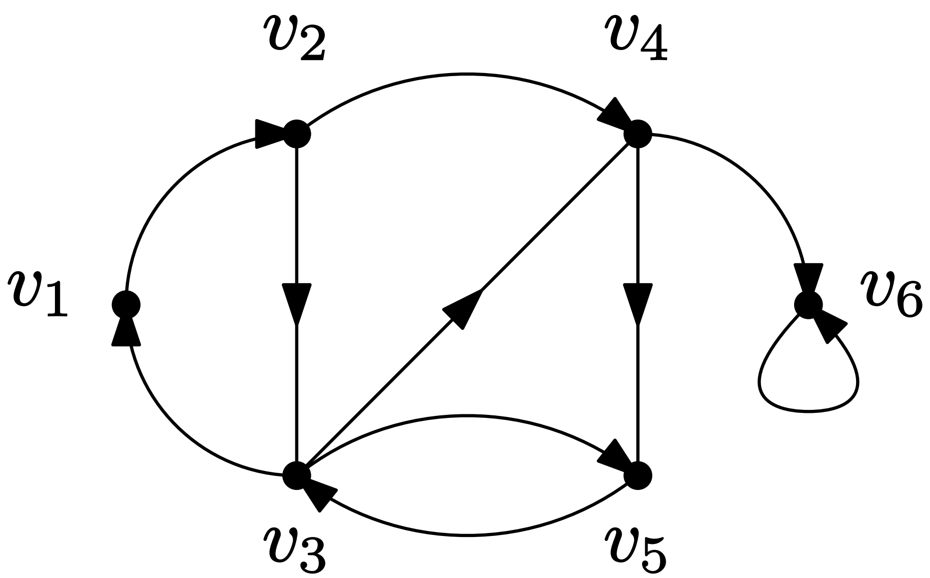
v_5 は a の始点であり，

v_6 は a の終点である

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\}$$

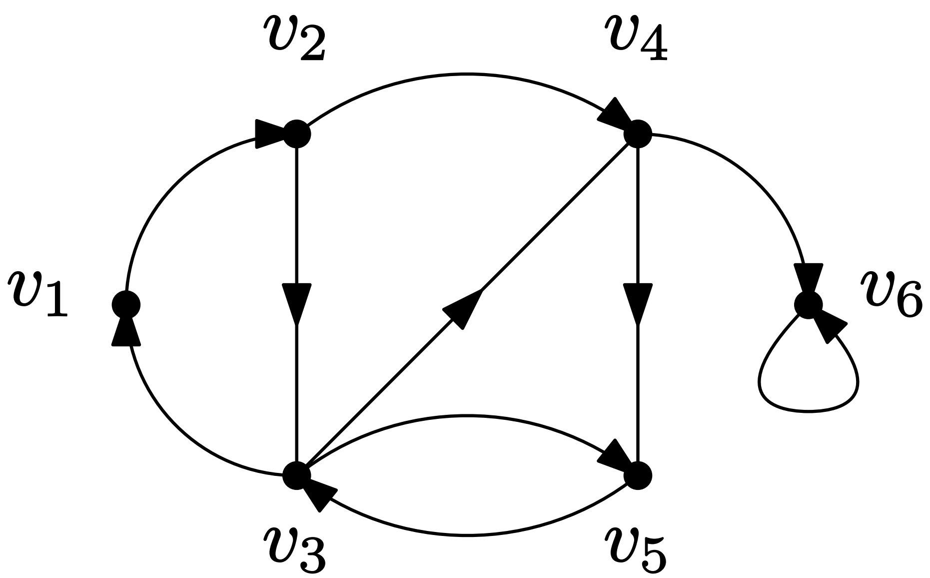
問：次の有向グラフの弧集合は？



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A =$$

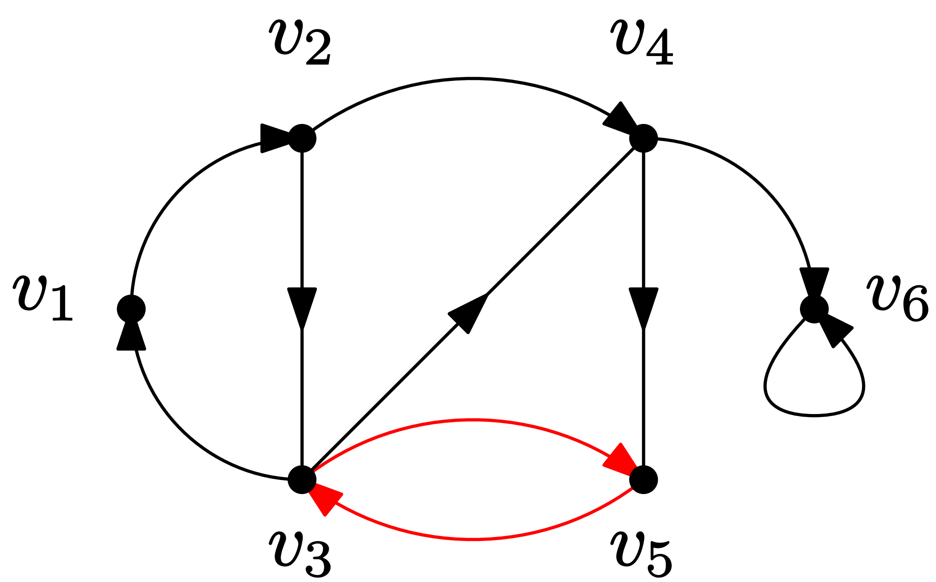
問：次の有向グラフの弧集合は？



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$\begin{aligned} A = \; &\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_3, v_5), \\ &(v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_3), (v_6, v_6)\} \end{aligned}$$

問：次の有向グラフの弧集合は？



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), \underline{(v_3, v_5)}, \\ (v_4, v_5), (v_4, v_6), \underline{(v_5, v_3)}, (v_6, v_6)\}$$

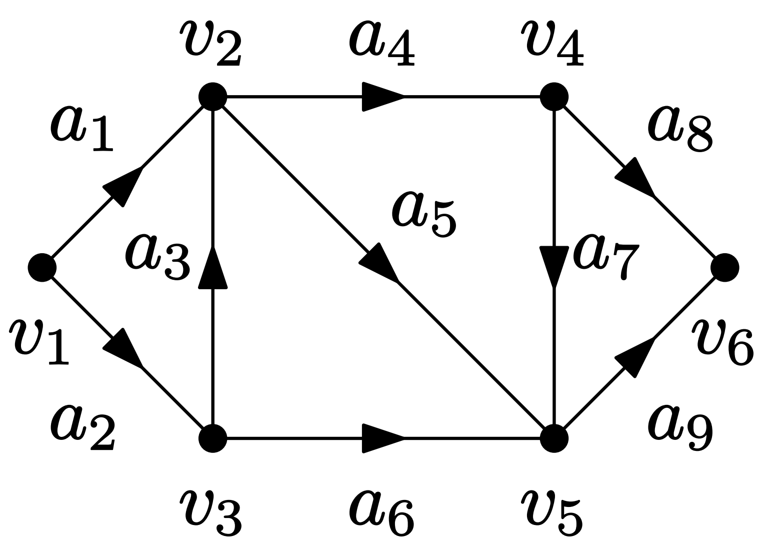
違うものとして区別される

接続する弧の集合に関する記法

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

記法

- v を終点とする弧全体の集合に対する記法
$$\delta^-(v) = \{a \in A \mid v \text{ が } a \text{ の終点}\}$$
- v を始点とする弧全体の集合に対する記法
$$\delta^+(v) = \{a \in A \mid v \text{ が } a \text{ の始点}\}$$

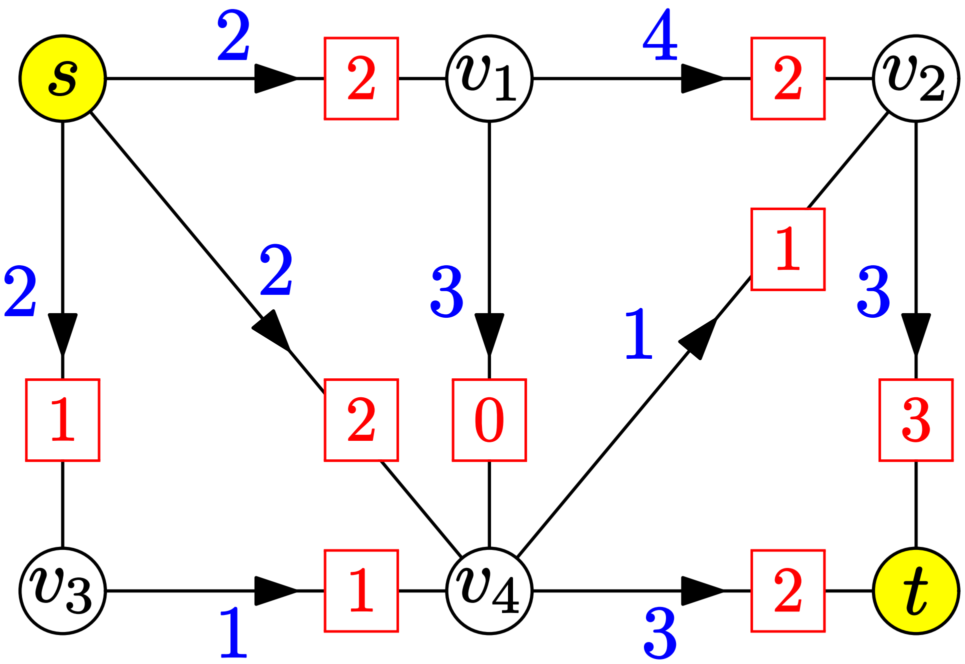


例

- $\delta^-(v_5) = \{a_5, a_6, a_7\}$
- $\delta^+(v_5) = \{a_9\}$
- $\delta^-(v_1) = \emptyset$ (空集合)
- $\delta^+(v_1) = \{a_1, a_2\}$

本日の内容

1. 有向グラフ
2. **流**
3. 最大流問題
4. 最小費用流問題



ネットワーク：定義

定義：ネットワーク (network)

ネットワーク とは, (有向) グラフに情報が付随したもの

この講義では，次のような情報をよく考える

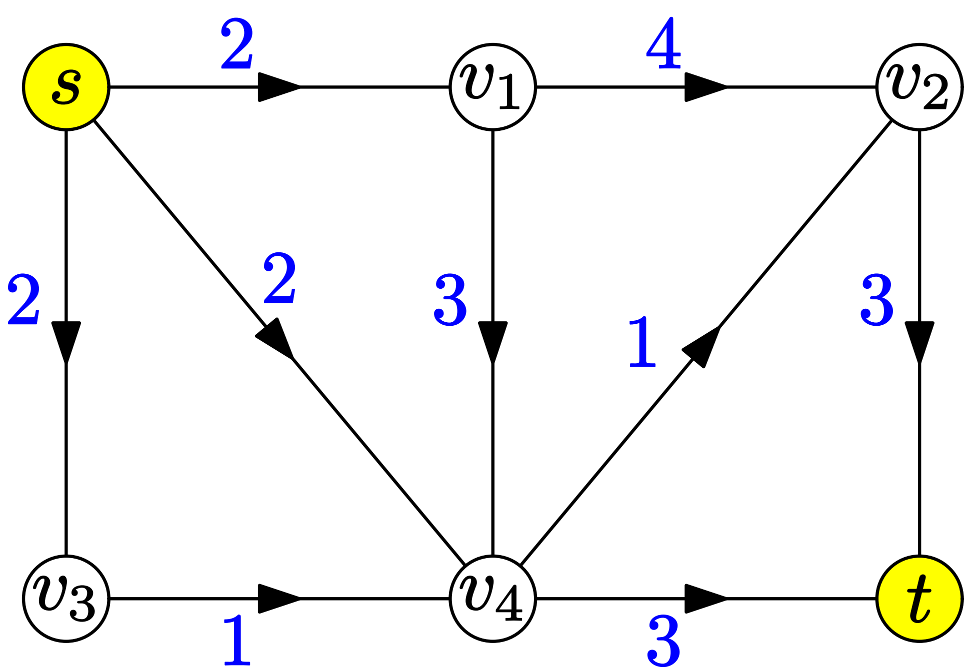
- 各弧に対する **容量** (capacity)
- 各弧に対する **費用** (cost)

流：定義 (1/3)

<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$ （非負実数全体の集合）

定義：流 (flow)

ネットワーク (G, u) における s-t **流** とは
次の 2 条件を満たす関数 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと $\rightsquigarrow$ 次頁へ

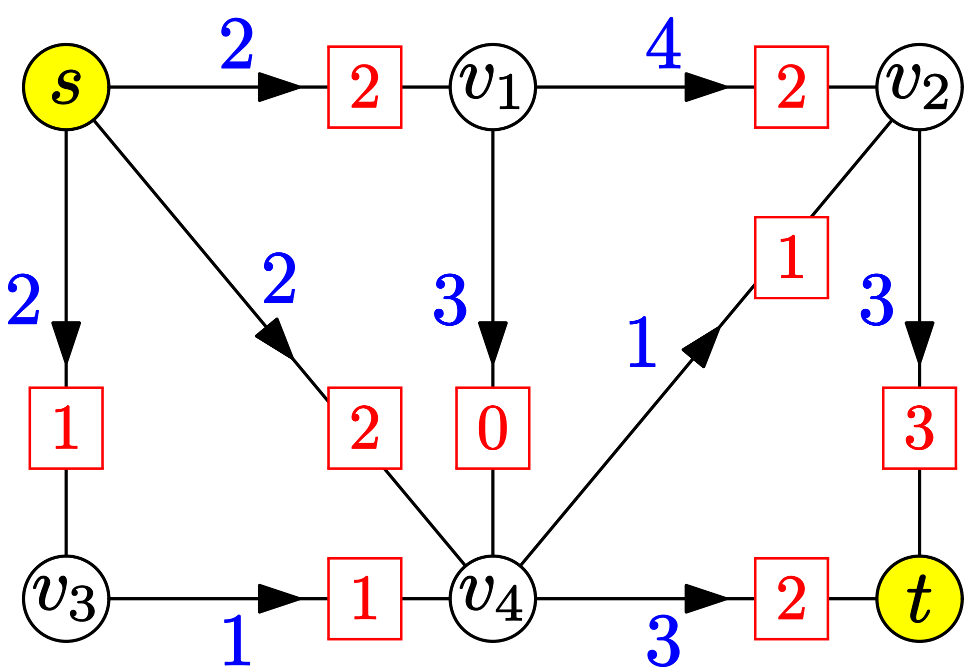


- $u(s, v_1) = 2$
- $u(s, v_3) = 2$
- $u(s, v_4) = 2$
- $u(v_1, v_2) = 4$
- $u(v_1, v_4) = 3$
- $u(v_2, t) = 3$
- $u(v_3, v_4) = 1$
- $u(v_4, v_2) = 1$
- $u(v_4, t) = 3$

<u>設定</u>：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$ (非負実数全体の集合)

定義：流 (flow)

ネットワーク (G, u) における s-t **流** とは
次の 2 条件を満たす関数 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと $\rightsquigarrow$ 次頁へ



- $f(s, v_1) = 2$
- $f(s, v_3) = 1$
- $f(s, v_4) = 2$
- $f(v_1, v_2) = 2$
- $f(v_1, v_4) = 0$
- $f(v_2, t) = 3$
- $f(v_3, v_4) = 1$
- $f(v_4, v_2) = 1$
- $f(v_4, t) = 2$

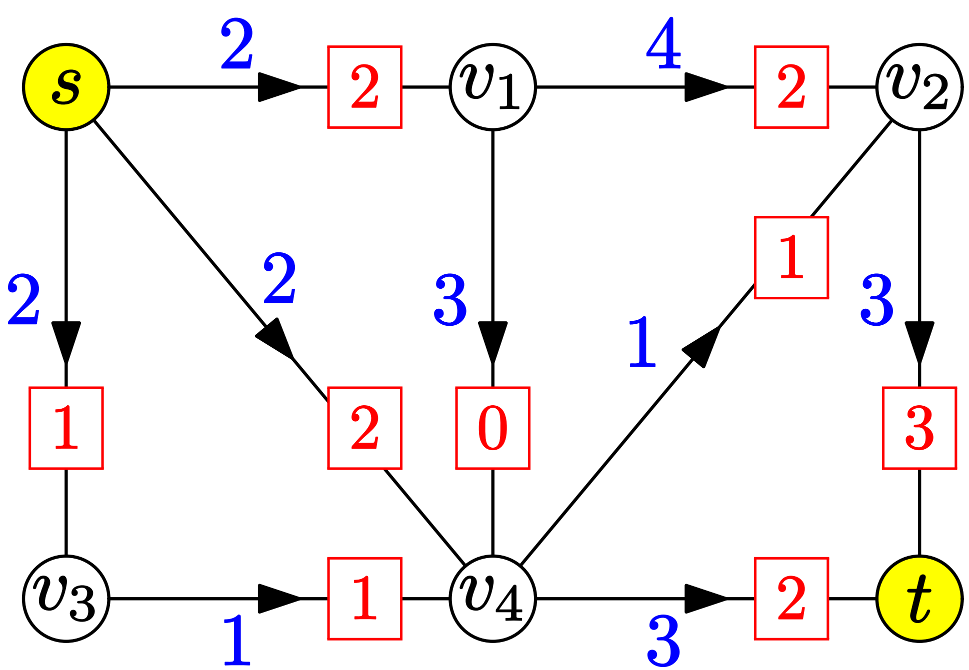
- $u(s, v_1) = 2$
- $u(s, v_3) = 2$
- $u(s, v_4) = 2$
- $u(v_1, v_2) = 4$
- $u(v_1, v_4) = 3$
- $u(v_2, t) = 3$
- $u(v_3, v_4) = 1$
- $u(v_4, v_2) = 1$
- $u(v_4, t) = 3$

流：定義 (2/3)

条件 1：容量制約 (capacity constraint)

任意の弧 $a \in A$ に対して,

$$0 \le f(a) \le u(a)$$



- $f(s, v_1) = 2$
- $f(s, v_3) = 1$
- $f(s, v_4) = 2$
- $f(v_1, v_2) = 2$
- $f(v_1, v_4) = 0$
- $f(v_2, t) = 3$
- $f(v_3, v_4) = 1$
- $f(v_4, v_2) = 1$
- $f(v_4, t) = 2$

- $u(s, v_1) = 2$
- $u(s, v_3) = 2$
- $u(s, v_4) = 2$
- $u(v_1, v_2) = 4$
- $u(v_1, v_4) = 3$
- $u(v_2, t) = 3$
- $u(v_3, v_4) = 1$
- $u(v_4, v_2) = 1$
- $u(v_4, t) = 3$

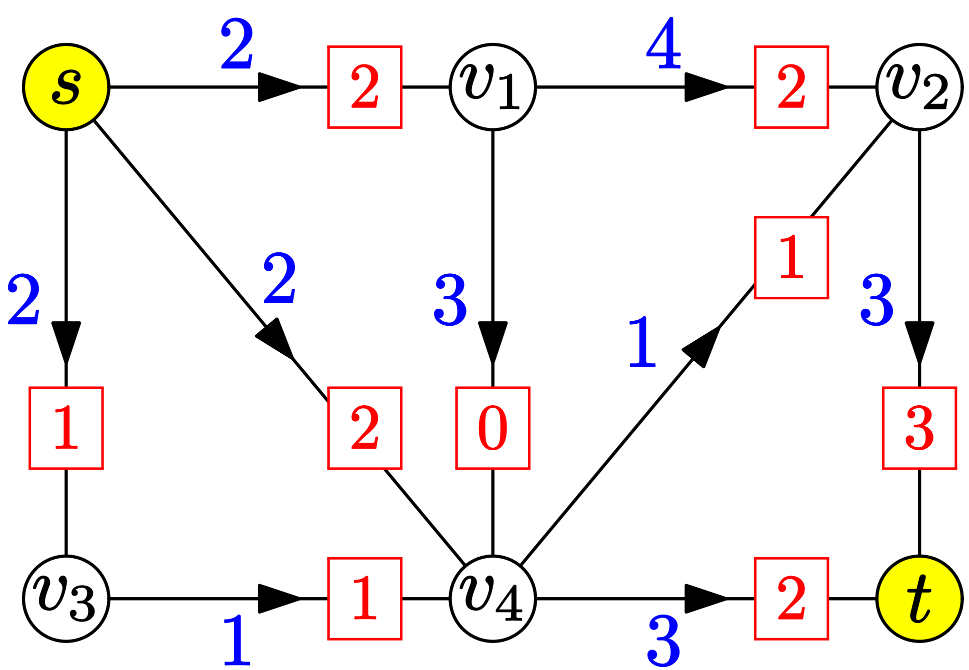
流：定義 (3/3)

条件 2：流量保存制約 (flow conservation constraint)

任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して,

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

v へ入る総流量　　v から出る総流量



- $f(s, v_1) = 2$
- $f(s, v_3) = 1$
- $f(s, v_4) = 2$
- $f(v_1, v_2) = 2$
- $f(v_1, v_4) = 0$
- $f(v_2, t) = 3$
- $f(v_3, v_4) = 1$
- $f(v_4, v_2) = 1$
- $f(v_4, t) = 2$

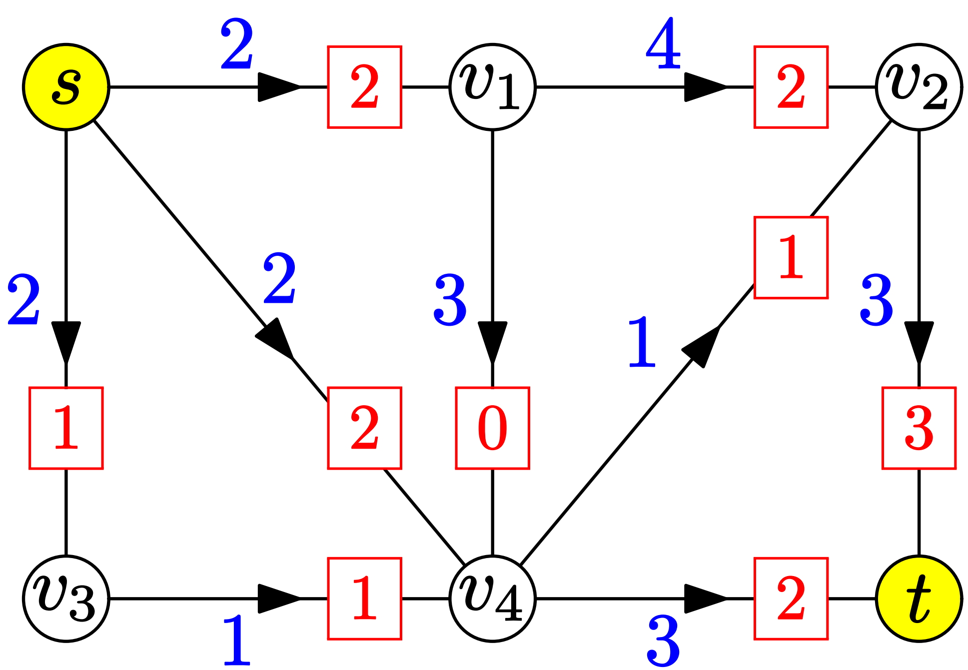
- $u(s, v_1) = 2$
- $u(s, v_3) = 2$
- $u(s, v_4) = 2$
- $u(v_1, v_2) = 4$
- $u(v_1, v_4) = 3$
- $u(v_2, t) = 3$
- $u(v_3, v_4) = 1$
- $u(v_4, v_2) = 1$
- $u(v_4, t) = 3$

条件 2：流量保存制約 (flow conservation constraint)

任意の頂点 $v \in V - \{s,t\}$ に対して，

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

$v = v_1$ のとき，　$f(s,v_1)$　$f(v_1,v_2) + f(v_1,v_4)$



- $f(s,v_1) = 2$
- $f(s,v_3) = 1$
- $f(s,v_4) = 2$
- $f(v_1,v_2) = 2$
- $f(v_1,v_4) = 0$
- $f(v_2,t) = 3$
- $f(v_3,v_4) = 1$
- $f(v_4,v_2) = 1$
- $f(v_4,t) = 2$

- $u(s,v_1) = 2$
- $u(s,v_3) = 2$
- $u(s,v_4) = 2$
- $u(v_1,v_2) = 4$
- $u(v_1,v_4) = 3$
- $u(v_2,t) = 3$
- $u(v_3,v_4) = 1$
- $u(v_4,v_2) = 1$
- $u(v_4,t) = 3$

流：定義 (まとめ)

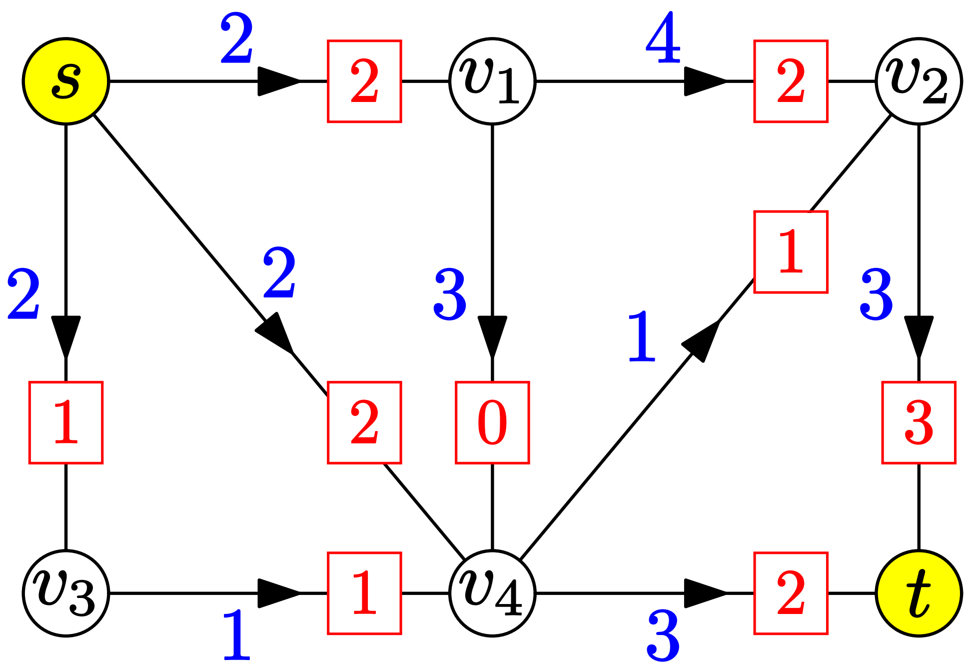
設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$

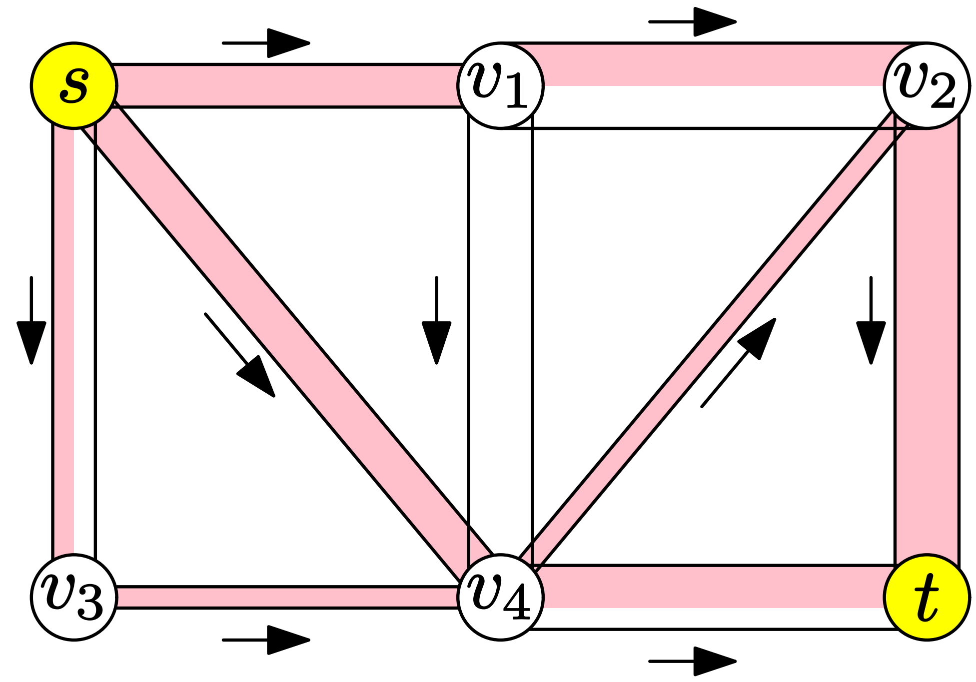
定義：流 (flow)

ネットワーク (G, u) における s-t **流** とは
次の 2 条件を満たす関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ のこと

1. 任意の弧 $a \in A$ に対して
$$0 \le f(a) \le u(a)$$
2. 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して
$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

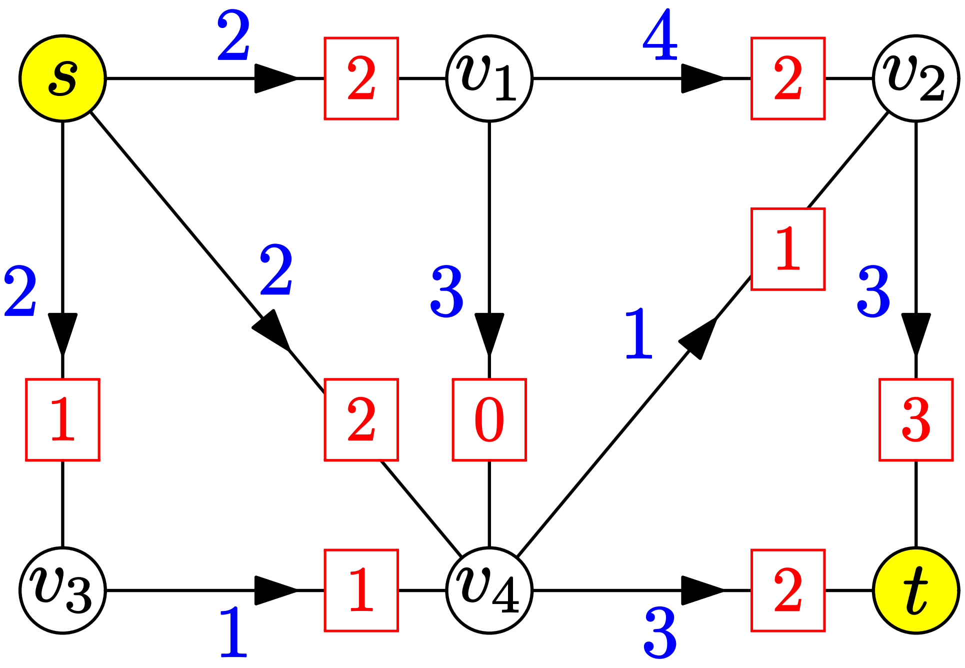
流：水の流れでイメージする





本日の内容

1. 有向グラフ
2. 流
3. **最大流問題**
4. 最小費用流問題



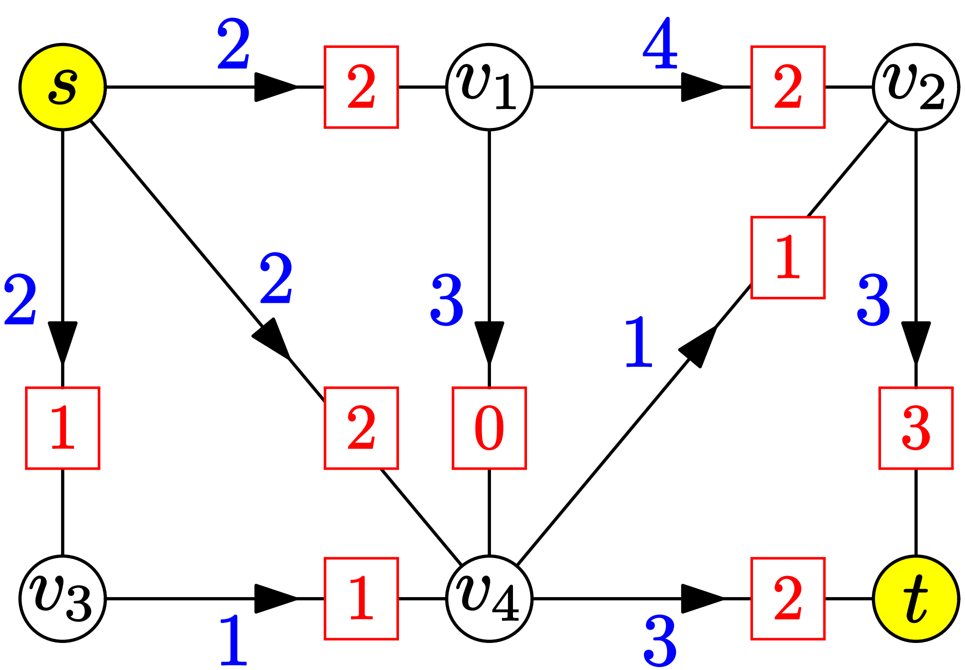
流の値：定義

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u\colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流の値 (value)

s-t 流 f の **値** とは次の量のこと

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$



$\mathrm{val}(f) = (2 + 1 + 2) - 0 = 5$

設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，$s$-$t$ 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：最大流 (maximum flow)

f がネットワーク (G, u) の **最大 s-t 流** であるとは，
次を満たすこと
任意の s-t 流 f' に対して，$\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$

$\boxed{\text{注}}$ 最大 s-t 流が存在することは 当然ではない
$\leadsto$ 最大 s-t 流が必ず存在することを後の講義で証明する

最大流問題：定義

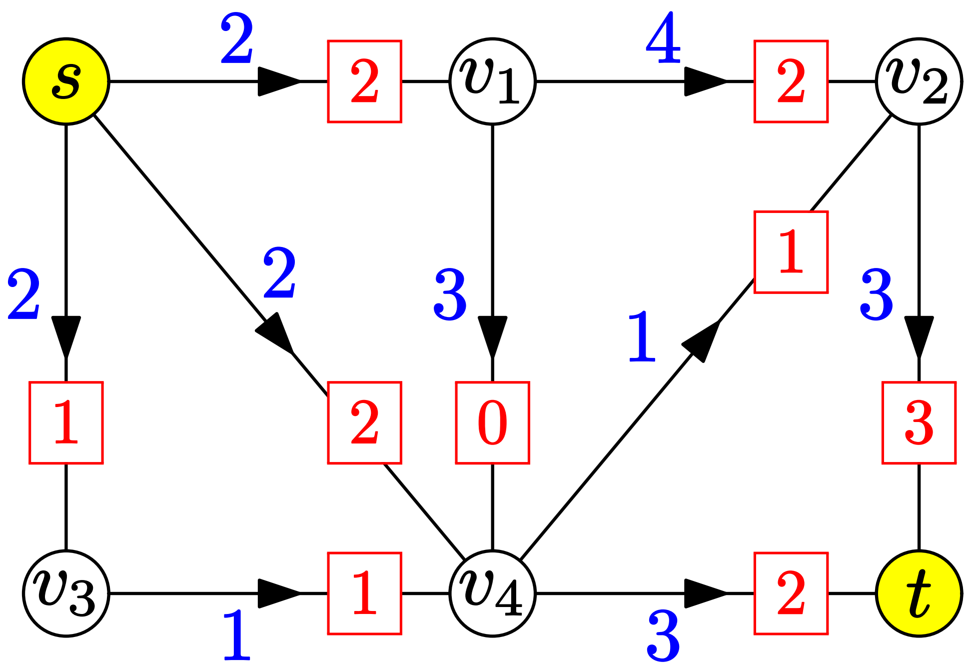
定義：最大流問題 (maximum flow problem)

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$
- 弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$

出力

- ネットワーク (G, u) に対する最大 s-t 流 f^*



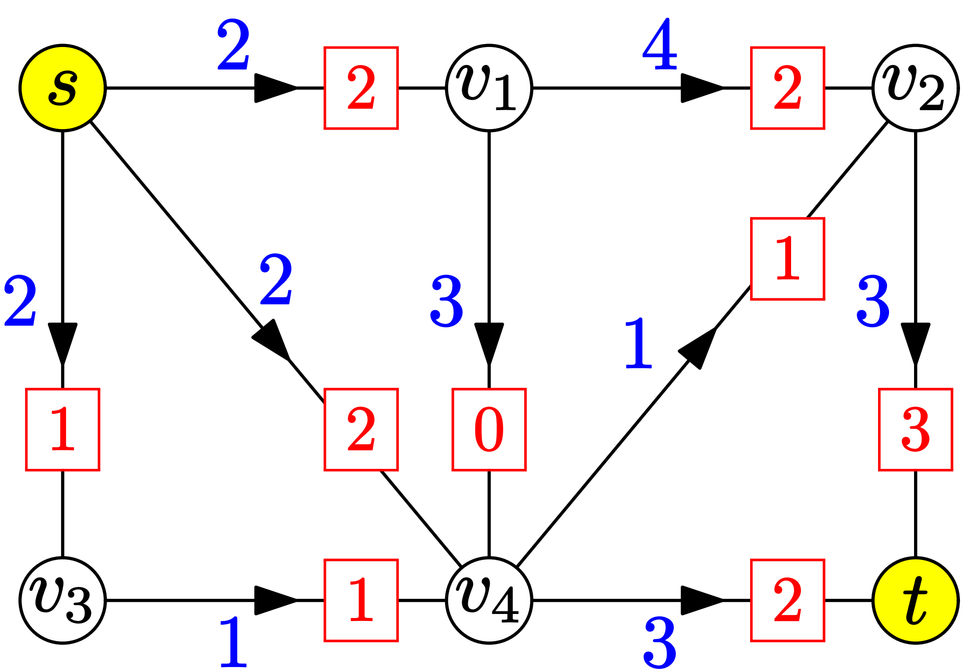
$\mathrm{val}(f) = (2 + 1 + 2) - 0 = 5$

疑問

s-t 流で，f より値の大きいものはあるか？

$\leadsto$ 最適性条件

1. 有向グラフ
2. 流
3. 最大流問題
4. **最小費用流問題**

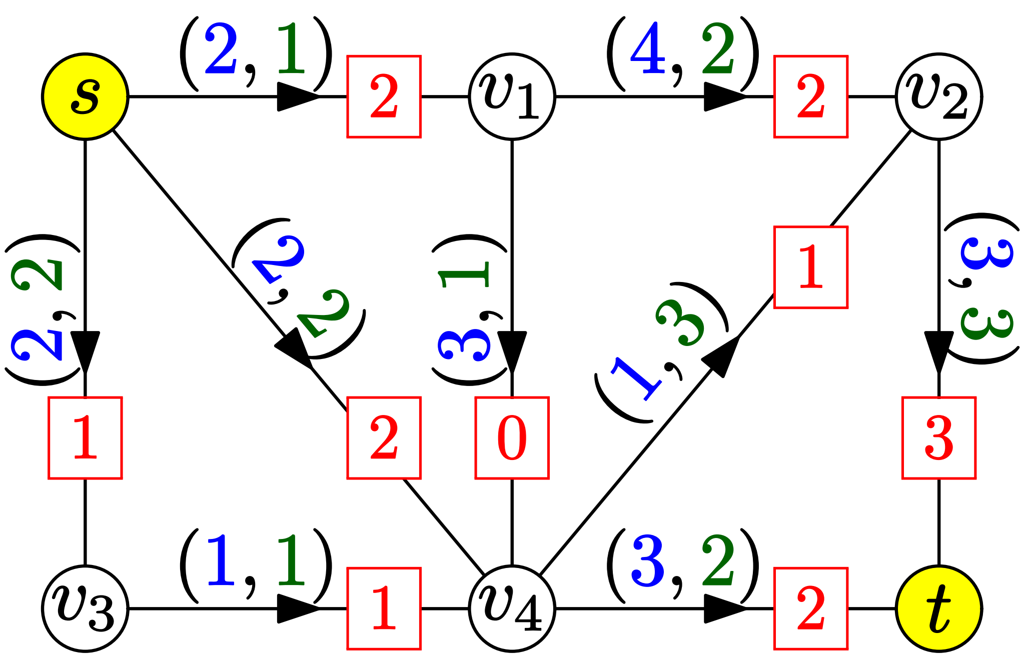


設定：有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$，
弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$

定義：流の費用 (cost)

s-t 流 $f \colon A \to \mathbb{R}_+$ の **費用** とは次で定義される実数

$$\mathrm{cost}(f) = \sum_{a \in A} c(a) f(a)$$



$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(f) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ &\quad + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ &\quad + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ &= 29\end{aligned}$$

(容量, 費用)

最小費用流問題：定義

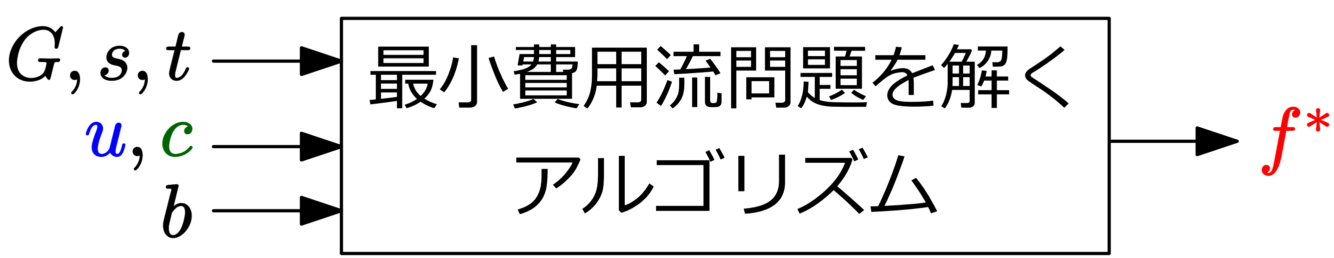
定義：最小費用流問題 (minimum-cost flow problem)

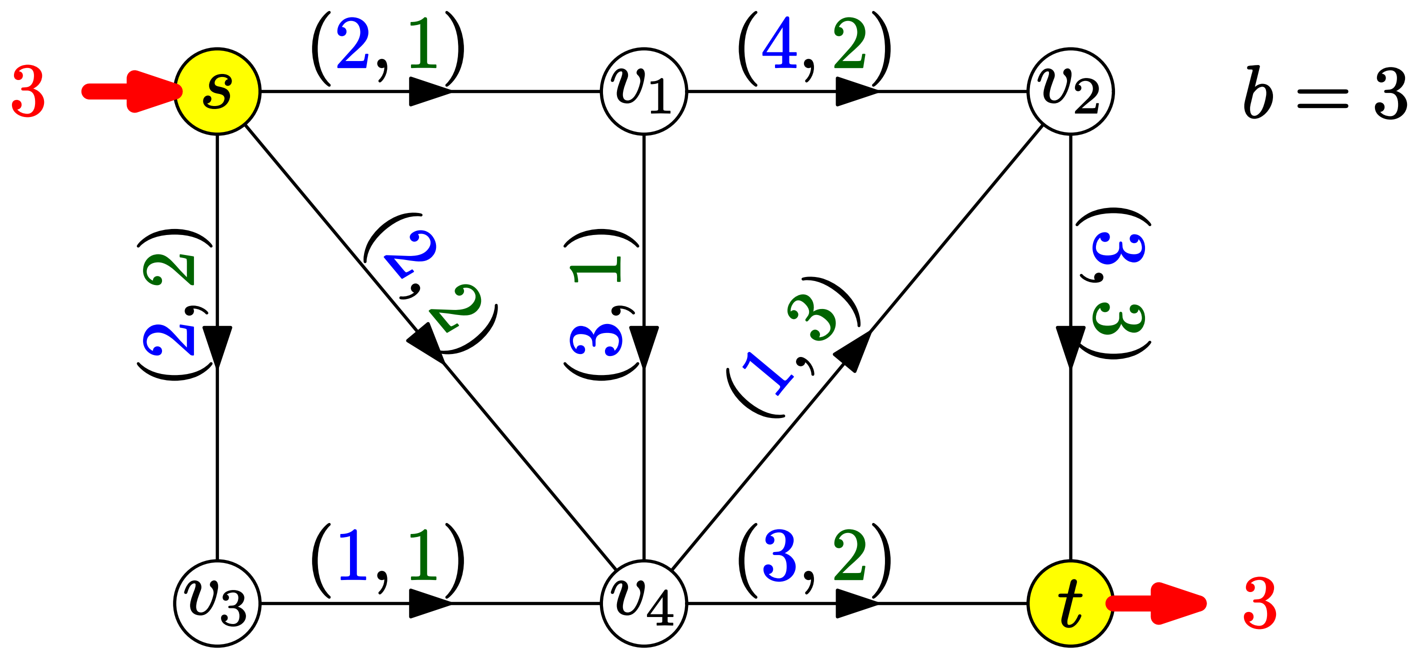
入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，2 頂点 $s, t \in V$
- 弧容量関数 $u \colon A \to \mathbb{R}_+$，弧費用関数 $c \colon A \to \mathbb{R}_+$
- 非負実数 $b \in \mathbb{R}_+$

出力

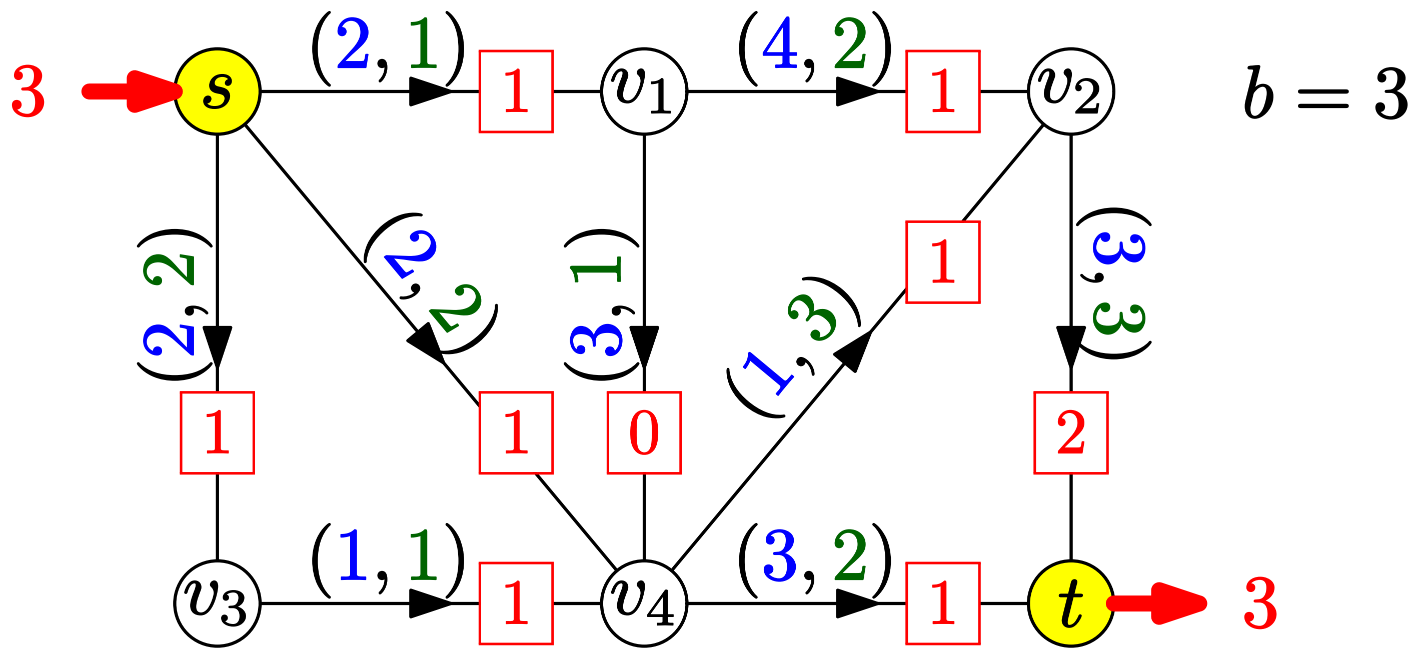
- s-t 流 f^* で次を満たすもの (ない場合は「ない」と出力)
  - $\star$ $\mathrm{val}(f^*) = b$
  - $\star$ $\mathrm{val}(f) = b$ を満たす任意の s-t 流 f に対して $\mathrm{cost}(f^*) \leq \mathrm{cost}(f)$



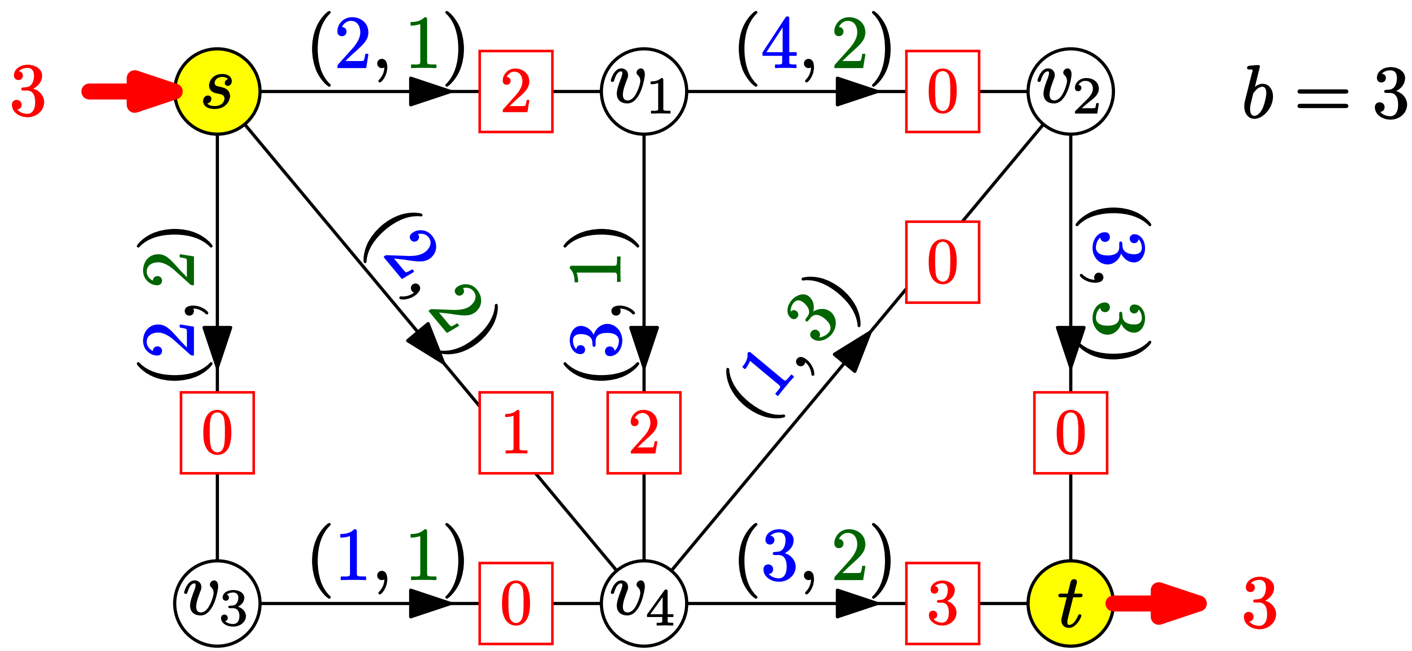


3
s
(2, 1)
v_1
(4, 2)
v_2
$b = 3$
(2, 2)
(2, 2)
(3, 1)
(1, 3)
(3, 3)
v_3
(1, 1)
v_4
(3, 2)
t
3

最小費用流問題：例

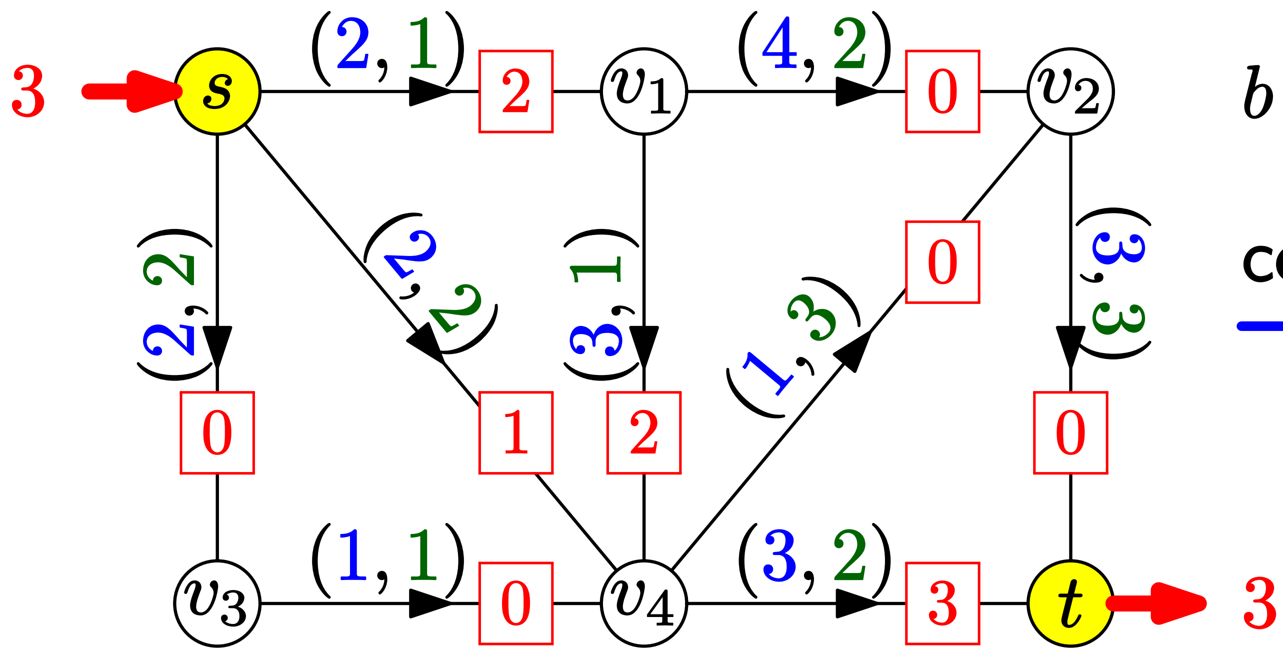


$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(f_1) &= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0\\ &\quad + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1\\ &= 19\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
\mathrm{cost}(f_1) &= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 \\
&\quad + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 \\
&= 19
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cost}(f_2) &= 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 \\
&\quad + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 3 \\
&= 12
\end{aligned}
$$



$b = 3$

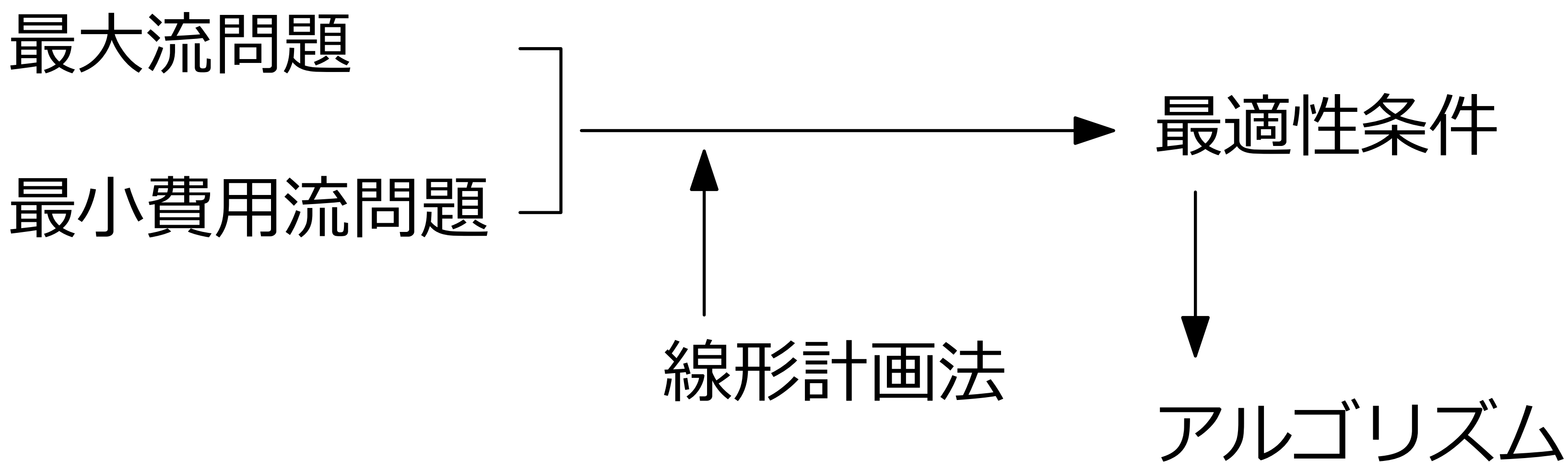
$\mathsf{cost}(f_2) = 12$

疑問

値が 3 の s-t 流で，f_2 より費用の小さいものはあるか？

$\rightsquigarrow$ 最適性条件

次回以降の内容



次回の予告

最大流問題の最適性条件を導出する

- 重要概念：s-t カット
- 重要概念：補助ネットワーク
- 重要概念：増加道

(まだ，線形計画法は使わない)