

離散数理工学 第 3 回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023 年 10 月 31 日

最終更新：2023 年 10 月 22 日 13:18

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

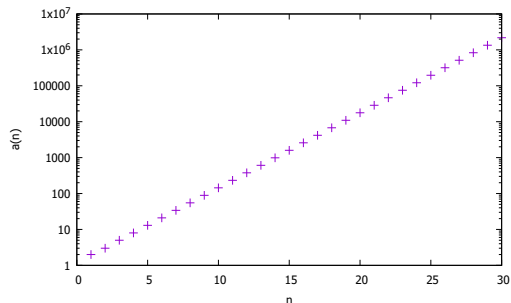
$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方：探る

n	a_n
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987

片対数プロット



\rightsquigarrow 指数関数的に増加する
 (ある $\lambda > 0$ に対して λ^n の形?)

線形漸化式の解き方 (1)

1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち,

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\approx -0.618), \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\approx 1.618)$$

線形漸化式の解き方 (1) : 考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である

線形漸化式の解き方 (1) : 考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \text{ であるので,} \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1) : 考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \text{ であるので,} \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶ $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ を思い出すと, c_1, c_2 が定まる

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする

▶ $a_1 = 2, a_2 = 3$ なので,

$$2 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$3 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする

▶ $a_1 = 2, a_2 = 3$ なので,

$$2 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$3 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

▶ c_1, c_2 を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$$

注 : $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1$, $\lambda_2^2 = \lambda_2 + 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$$

したがって、任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

注 : $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1$, $\lambda_2^2 = \lambda_2 + 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法を用いて解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき})$$

線形漸化式の解き方 (2) : 一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列, x_1, x_2, x_3, \dots と c はベクトル

▶ このとき,

$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$

▶ したがって, A^{n-1} が計算できればよい

線形漸化式の解き方 (2)

2 行列の累乗を計算する

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

- ▶ A の固有値と固有ベクトルを計算する
- ▶ A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$

- ▶ これを解くと, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- ▶ これが A の固有値で, λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (2)

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

λ_2 に対する A の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化： $U = (v_1 \ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち,} \quad A = U\Lambda U^{-1}$$

$$\blacktriangleright A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\blacktriangleright U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので, } U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5 + \sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned}
 A^n &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^n + (5+\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^n + (5-\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

3 まとめる

 $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5+\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{(5+\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5-\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}} \\ \frac{10}{5} & \frac{5}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15-7\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ &= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる ($n = 1, 2$ のときも, この式は正しい)



例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — まとめ

(第2回講義より)

次のように定義

- ▶ $b_n =$ グラフ G_n における独立集合の総数
- ▶ $c_n =$ グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

後は同様に、計算する

線形漸化式の解き方 (2)

計算すると、次が得られる (はずである) : 自然数 $n \geq 1$ に対して

$$b_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2})^n$$
$$c_n = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n$$

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる

(計算量の解析において、欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

線形漸化式から上界を導く

- 1 定数項を取り除く
- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1$$



線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ

線形漸化式から上界を導く

- 1 定数項を取り除く
- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ
- ▶ 注意: ここから f'_n を厳密に求めて, f_n を求めてもよいが, ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式 : $\lambda^2 = \lambda + 1$

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 特性方程式 : $\lambda^2 = \lambda + 1$
- ▶ この方程式はただ 1 つ正の解を持ち, それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは,
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ $f'_1 = 2$
- ▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

線形漸化式から上界を導く

3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ $f'_1 = 2$
- ▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

 $n = 2$ のとき

- ▶ $f'_2 = 2$
- ▶ $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_2 < 2\lambda^2$ となる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$f'_{k+1} = f'_k + f'_{k-1} \quad (f'_k \text{ の定義})$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O(\lambda^n) = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

オーダー記法：復習

 O 記法の定義

非負の値を取る単調非減少数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ と $\{b_n\}_{n \geq 1}$ に対して,

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは,
ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して,
任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の増加率以下である

ユークリッドのアルゴリズムの計算量

漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

直感 : まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるので、
それを探る

- ▶ 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換える
- ▶ $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき, $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注 : $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

ユークリッドのアルゴリズムの計算量：探る

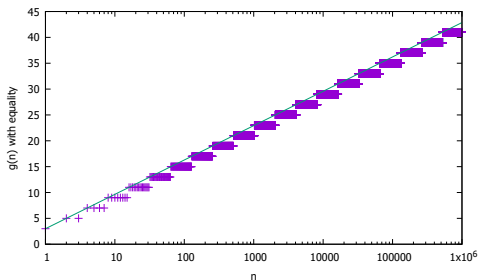
$g'_k = g_{2^k}$ と置き、「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換えると、次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

▶ これは等差数列

▶ 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して、 $g'_k = 3 + 2k$

つまり、 g_n はだいたい $3 + 2 \log_2 n$



証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$$g_n = O(\log n)$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$$g_n = O(\log n)$$

証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ 漸化式より, $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺 \leq 右辺

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$g_{k+1} \leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad (g_n \text{ の定義})$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す})
 \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
 &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理})
 \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
 &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\
 &= 3 + 2 \log_2(k+1) && (\text{整理})
 \end{aligned}$$



目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

数列の母関数

定義：母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の **母関数** とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

デジタル信号処理で「z 変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は (絶対) 収束する

▶ 特に, ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする

▶ つまり, $|x| < r$ のとき, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので, 『微分積分学』, 『解析学』, 『複素関数論』の知識が使える

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に, $a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\frac{1}{1-\alpha x}$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n =$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ