

# 離散数理工学 第 1 回

数え上げの基礎：二項係数と二項定理

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023 年 10 月 10 日

最終更新：2023 年 10 月 2 日 11:54

### 今日の目標

次の2つの数を扱えるようになる

- ▶ 階乗, 二項係数

扱えるとは?

- ▶ 漸近公式と簡単な上界, 下界
- ▶ 二項定理
- ▶ 組合せ的解釈: 全単射による証明, 二重の数え上げによる証明

# 目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ

## 階乗

## 定義：階乗とは？（直観的定義）

自然数  $n \geq 0$  の階乗とは、次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

例：

- ▶  $0! = 1$
- ▶  $1! = 1$
- ▶  $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- ▶  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- ▶ ...

## 階乗：再帰的定義

## 定義：階乗とは？（再帰的定義）

自然数  $n \geq 0$  の階乗とは、次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n - 1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

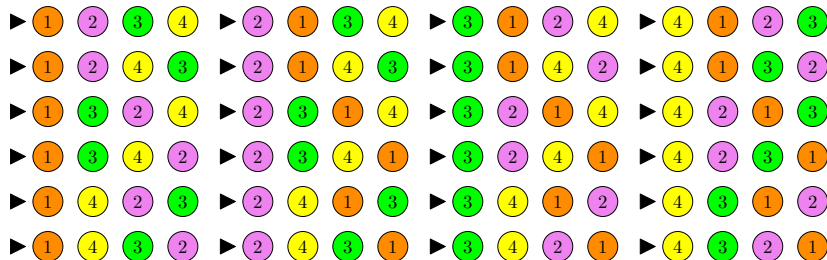
- ▶  $0! = 1$
- ▶  $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶  $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶  $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶  $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

## 組合せ的解釈

## 階乗の組合せ的解釈

$n!$  = 区別できる  $n$  個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$  のとき,  $n! = 24$



## 格言

組合せの等式は、組合せ的解釈で直感的に理解

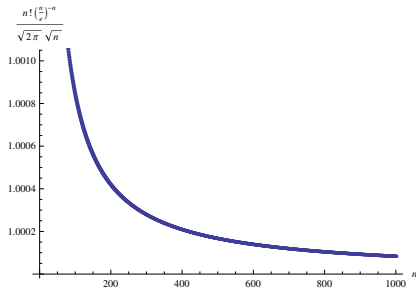
## 階乗：漸近公式

## 階乗の性質：スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$



←  $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$  のプロット

ここで証明は行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left( \frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq en \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

つまり,

- ▶  $en \left( \frac{n}{e} \right)^n$  は  $n!$  の上界
- ▶  $e \left( \frac{n}{e} \right)^n$  は  $n!$  の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しい。簡単な上界・下界を使いこなす。



## 階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$  に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階]  $n = 1$  のとき

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$ に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階]  $n = 1$  のとき

▶  $n! = 1! = 1$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$ に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階]  $n = 1$  のとき

▶  $n! = 1! = 1$

▶  $en \left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上、次のような「荒い評価」で十分なことも多い

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$  に関する帰納法

(下界は演習問題)

[基底段階]  $n = 1$  のとき

- ▶  $n! = 1! = 1$
- ▶  $en \left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$
- ▶ したがって、 $n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$  となる

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$  に関する帰納法[帰納段階] 任意の自然数  $k \geq 1$  を考える

▶  $k! \leq ek \left(\frac{k}{e}\right)^k$  となると仮定

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

## 階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明： $n$  に関する帰納法[帰納段階] 任意の自然数  $k \geq 1$  を考える

▶  $k! \leq ek \left(\frac{k}{e}\right)^k$  となると仮定

## 証明すること (目標)

$$(k+1)! \leq e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

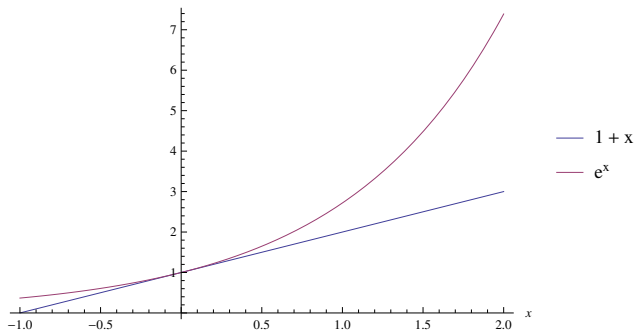
## 有用な不等式

事実：有用な不等式

(演習問題)

任意の実数  $x$  に対して

$$1 + x \leq e^x$$



## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$(k + 1)! = (k + 1) \cdot k!$$



## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\ &\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\
&\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \cdot (e^{-1}) \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

## 階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\
&\leq (k+1) \cdot ek \left(\frac{k}{e}\right)^k && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\leq e \left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e \cdot (e^{-1}) \cdot e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} = e(k+1) \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \quad \square
\end{aligned}$$

# 目次

① 階乗

② 二項係数

③ 二項定理

④ 今日のまとめ



## 二項係数

定義：二項係数とは？

自然数  $a, b$  で  $a \geq b$  を満たすものに対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- ▶  $\binom{a}{b}$  は「 $a$  choose  $b$ 」と読む (のが普通)
- ▶ 「 ${}_aC_b$ 」という記号を高校では (なぜか) 使うが、国際的にはあまり用いられない (通じないか、通じにくい)

## 組合せ的解釈 (1) : 部分集合

## 二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$  = 要素数  $a$  の集合における, 要素数  $b$  の部分集合の総数

$a = 5, b = 2$  のとき :  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  の部分集合で要素数 2 のもの

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\},$   
 $\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

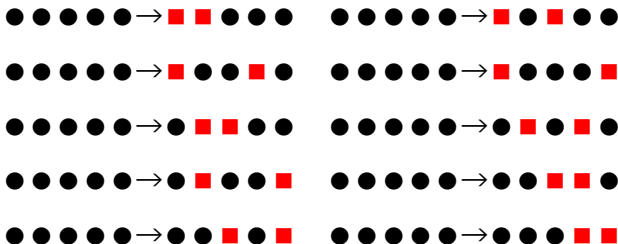
$$\binom{5}{2} = 10$$

## 組合せ的解釈 (2) : 着色

## 二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$  = 区別できる  $a$  個のものの中から  $b$  個に色を塗る方法の総数

$a = 5, b = 2$  のとき



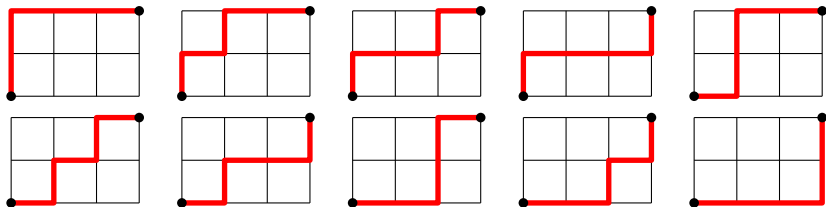
$$\binom{5}{2} = 10$$

## 組合せ的解釈 (3) : 格子道

## 二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b} = (0,0)$  から  $(a-b, b)$  に至る (単調な) 格子道の総数

$a = 5, b = 2$  のとき :  $(0,0)$  から  $(3,2)$  に至る格子道



$$\binom{5}{2} = 10$$

## 二項係数に関する恒等式：対称性

## 性質：二項係数の対称性

任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{a-b} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!}$$

## 二項係数に関する恒等式：対称性

## 性質：二項係数の対称性

任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{a-b} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

## 二項係数に関する恒等式：対称性

## 性質：二項係数の対称性

任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{a-b} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b}$$

□

## 等式に対する組合せ的解釈：全単射による証明

## 性質：二項係数の対称性

任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

組合せ的解釈で証明してみる

## 組合せ的解釈による等式の証明法 (1)

- 1 左辺と右辺が数える組合せ的解釈をそれぞれ定める
- 2 左辺と右辺が数えるものの間の 1 対 1 対応 (全単射) を作る
- 3 それが全単射であることを証明する

これを **全単射による証明** と呼ぶことがある



## 二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せの解釈：着色

## 性質：二項係数の対称性

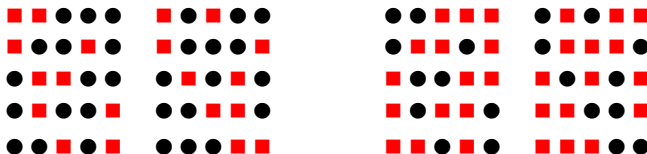
任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

全単射による証明 (着色を用いる):

- ▶ 左辺 =  $a$  個のものの中から色を塗る  $b$  個を選ぶ方法の総数
- ▶ 右辺 =  $a$  個のものの中から色を塗る  $a - b$  個を選ぶ方法の総数

色の有無を入れ替えるという 1 対 1 対応により, 左辺 = 右辺が分かる □



## 二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

## 性質：二項係数の対称性

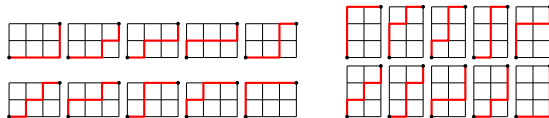
任意の自然数  $a \geq b \geq 0$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

全単射による証明 (格子道を用いる) :

- ▶ 左辺 =  $(0, 0)$  から  $(a-b, b)$  へ至る格子道の総数
- ▶ 右辺 =  $(0, 0)$  から  $(b, a-b)$  へ至る格子道の総数

直線  $y = x$  に関してこの2つは対称なので, 同数となる □



## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!}$$

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \end{aligned}$$

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \end{aligned}$$

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \end{aligned}$$

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$



## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}$$



## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$



## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$

□

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \end{aligned}$$

□

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned} \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \dots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \quad \square \end{aligned}$$

## 等式に対する組合せ的解釈：二重の数のえ上げによる証明

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して、 $a - 1 \geq b$  ならば、

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

組合せ的解釈で証明してみる

## 組合せ的解釈による等式の証明 (2)

- 1 左辺と右辺が数える組合せ的解釈を 1 つ定める
- 2 左辺と右辺がそれぞれ それを数えることを証明する

これを **二重の数のえ上げによる証明** と呼ぶことがある

## 二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 — 組合せ的解釈：着色

## 性質：パスカルの規則

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,  $a - 1 \geq b$  ならば,

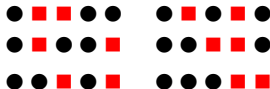
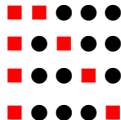
$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる) :

$a$  個のものから  $b$  個に色をつける方法の総数は  $\binom{a}{b}$

- ▶ 最初のを塗る場合だけ見ると,  $\binom{a-1}{b-1}$  通り
- ▶ 最初のを塗らない場合だけ見ると,  $\binom{a-1}{b}$  通り

すなわち, 左辺 = 右辺







## パスカルの三角形

$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
 \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
 \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
 \end{array}$$

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!}$$

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \quad \square$$

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる) :

$a$  個のものの中から  $b-1$  個を赤で, 1 個を青で塗る方法の総数  $N$  を考える

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} b = a \binom{a-1}{b-1}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる) :

$a$  個のものの中から  $b-1$  個を赤で, 1 個を青で塗る方法の総数  $N$  を考える

## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

$$\binom{a}{b} \binom{b}{1} = \binom{a}{1} \binom{a-1}{b-1}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる) :

$a$  個のものの中から  $b-1$  個を赤で, 1 個を青で塗る方法の総数  $N$  を考える



## 二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

## 性質：吸収恒等式

任意の自然数  $a \geq b \geq 1$  に対して,

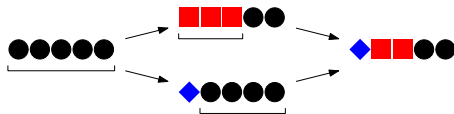
$$\binom{a}{b} \binom{b}{1} = \binom{a}{1} \binom{a-1}{b-1}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる) :

$a$  個のものの中から  $b-1$  個を赤で, 1 個を青で塗る方法の総数  $N$  を考える

- ▶ 左辺 =  $a$  個のものの中から  $b$  個に赤を塗り,  
その  $b$  個の中から 1 個に青を塗る
- ▶ 右辺 =  $a$  個のものの中から 1 個に青を塗り,  
残り  $a-1$  個の中から  $b-1$  個に赤を塗る

この 2 つはどちらも  $N$  に等しいので, 左辺 = 右辺 □



## 二項係数：上界と下界

## 二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数  $a \geq 1$  と任意の自然数  $b \geq 1$  に対して,  $a \geq b$  であるとき,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ▶ ヒント：まず,  $\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$  を証明する
- ▶ ヒント：階乗に対する下界を使う

## 二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (1)

## 二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数  $a \geq 1$  と任意の自然数  $b \geq 1$  に対して、 $a \geq b$  であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明： $b = 1$  のときは次のようにして正しいことが分かる

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = a = \binom{a}{b}$$

あとは、 $b \geq 2$  のときに正しいことを示せばよい

## 二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (2)

## 二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数  $a \geq 1$  と任意の自然数  $b \geq 1$  に対して、 $a \geq b$  であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明： $a + b \geq 4$  に関する数学的帰納法で証明する

- ▶  $a + b = 4$  のとき (つまり、 $a = 2, b = 2$ )

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = 1 = \binom{a}{b}$$

- ▶  $a + b = 5$  のとき (つまり、 $a = 3, b = 2$ )

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = \frac{9}{4} < 3 = \binom{a}{b}$$

## 二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (3)

## 二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数  $a \geq 1$  と任意の自然数  $b \geq 1$  に対して、 $a \geq b$  であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明 (続き)：任意の自然数  $k \geq 5$  を考える

- ▶  $4 \leq a + b \leq k$  のときに、この下界が成り立つと仮定する (累積帰納法)
- ▶  $a + b = k + 1 \geq 6$  のときを考えると

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} \geq \frac{a}{b} \left(\frac{a-1}{b-1}\right)^{b-1} \geq \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{b-1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b \quad \square$$

# 目次

① 階乗

② 二項係数

③ 二項定理

④ 今日のまとめ

## 二項定理

## 性質：二項定理

任意の複素数  $x, y$  と任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## 証明：演習問題

- ▶ ヒント：  $n$  に関する数学的帰納法 + パスカルの規則

## 二項定理の応用 (1)

## 例題 1

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

証明 : 二項定理の式において,  $x = y = 1$  とすると

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

□



## 例題 1 : 組合せ的解釈 (着色)

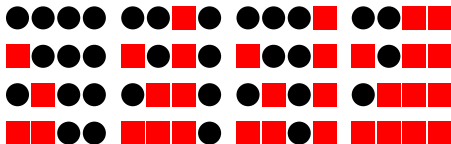
## 例題 1

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

二重の数え上げによる証明 (概略) :

- ▶ 右辺 =  $n$  個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- ▶ 左辺の第  $k$  項 =  $n$  個のものの中から  $k$  個に色を塗る方法の総数



## 例題 1 : 組合せ的解釈 (着色)

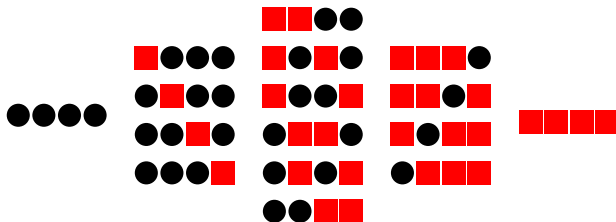
## 例題 1

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

二重の数え上げによる証明 (概略) :

- ▶ 右辺 =  $n$  個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- ▶ 左辺の第  $k$  項 =  $n$  個のものの中から  $k$  個に色を塗る方法の総数



## 二項定理の応用 (2)

## 例題 2

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

## 二項定理の応用 (2)

## 例題 2

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において,  $x = -1, y = 1$  とすると

$$0 = (-1 + 1)^n$$

## 二項定理の応用 (2)

## 例題 2

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において,  $x = -1, y = 1$  とすると

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

## 二項定理の応用 (2)

## 例題 2

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明 : 二項定理の式において,  $x = -1, y = 1$  とすると

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad \square$$

## 二項定理の応用 (3)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

## 二項定理の応用 (3)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x + 1)^{2n}$$



## 二項定理の応用 (3)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

## 二項定理の応用 (3)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

## 二項定理の応用 (3)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明 : 二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に,  $(x+1)^{2n}$  における  $x^n$  の係数は  $\binom{2n}{n}$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n(x + 1)^n$$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n(x + 1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right)$$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における  $x^n$  の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における  $x^n$  の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$$



## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における  $x^n$  の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

## 二項定理の応用 (3) : 証明の続き

一方,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= (x+1)^n(x+1)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり, この式における  $x^n$  の係数は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

したがって,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

□

## 例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二重の数え上げによる証明 (アイデア) :

- ▶ 右辺 =  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  へ至る格子道の総数



## 例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

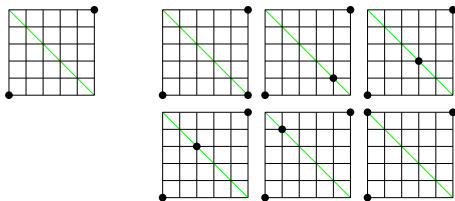
## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二重の数え上げによる証明 (アイディア) :

- ▶ 左辺の第  $k$  項 =  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  へ至る格子道の中で,  
 $(k, n - k)$  を通るものの総数



## 例題 3 : 組合せ的解釈 (格子道)

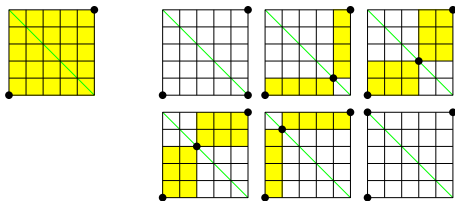
## 例題 3

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二重の数え上げによる証明 (アイディア) :

- ▶ 左辺の第  $k$  項 =  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  へ至る格子道の中で,  
 $(k, n - k)$  を通るものの総数



# 目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

次の2つの数を扱えるようになる

- ▶ 階乗, 二項係数

扱えるとは?

- ▶ 漸近公式と簡単な上界, 下界
- ▶ 二項定理
- ▶ 組合せ的解釈: 全単射による証明, 二重の数え上げによる証明

## 格言

組合せの等式は, 組合せ的解釈で直感的に理解

## 格言

漸近公式は難しい. 簡単な上界・下界を使いこなす.

# 目次

- ① 階乗
- ② 二項係数
- ③ 二項定理
- ④ 今日のまとめ