# 離散数理工学　第 13 回

## 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2024 年 1 月 23 日

最終更新：2024 年 1 月 14 日　17:57



## 今日の目標

**今日の目標**

マルコフ連鎖について以下ができるようになる
- 「ギャンブラーの破産」において，破産確率を計算できる
- 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において，到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は
「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの



## マルコフ連鎖：例

次の状況を考える
- ある街の天気は「晴れ (F)」，「曇り (C)」，「雨 (R)」のいずれか
- 天気は毎日，確率的に変わる
  - 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/2$
  - 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/3$
  - 晴れの日の翌日の天気が雨　である確率 $= 1/6$
  - 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/3$
  - 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/3$
  - 曇りの日の翌日の天気が雨　である確率 $= 1/3$
  - 雨　の日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/4$
  - 雨　の日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/2$
  - 雨　の日の翌日の天気が雨　である確率 $= 1/4$
- 問：今日が雨であるとき，2 日後も雨である確率はどれだけか？

**ポイント**

次の日の天気 (に関する確率) は，前の日の天気だけから決まる



## マルコフ連鎖：例 — 推移行列

見にくいので，行列で表現する

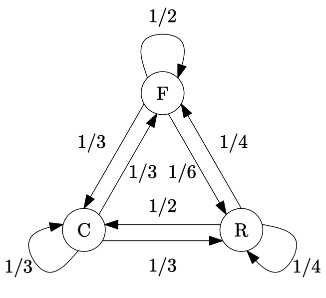
$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{F} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{R} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \mathrm{C} & \mathrm{R} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

「行」から「列」へ推移する



## マルコフ連鎖：例 — 状態遷移図

見にくいので，状態遷移図で表現する




「始点」から「終点」へ推移する





## 目次







## ギャンブラーの破産：設定

**設定**
- 1 人のギャンブラー，所持金 $n$ 万円
- 賭けを行うごとに，
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円増加
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円減少
- 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

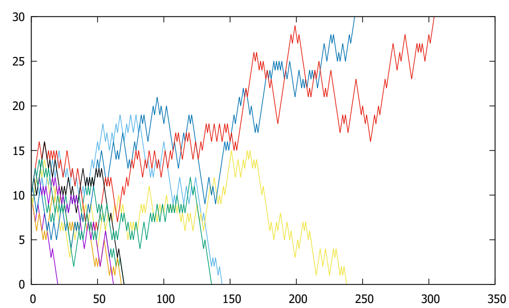
**問題**
1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？





## ギャンブラーの破産：とりあえず，シミュレーション

$n = 10$ の場合

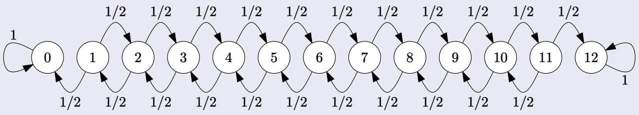



10 回の試行中，破産は 8 回

## ギャンブラーの破産：マルコフ連鎖としてのモデル化

- 状態空間は $\{0, 1, \dots, n, \dots, 3n\}$
- $X_t = t$ 回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

**状態遷移図：$n = 4$ のとき**







## ギャンブラーの破産：興味の対象

**問題**

1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

興味の対象

1. $p_n = \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = n)$ (確率)
2. $T_n = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

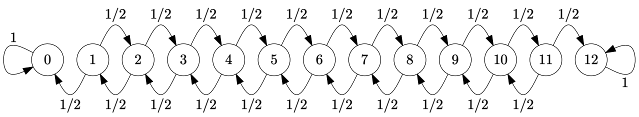




## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式

$p_k =$ 所持金が $k$ 万円であるとき，0 万円で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



- このとき，次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$





## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式 (詳細)

$1 \leq k \leq 3n-1$ のとき，

$$\begin{aligned} & p_k = \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_0 = k) \\ &= \sum_{h=0}^{3n} \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = h) \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k-1) \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) + \\ &\quad \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k+1) \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_1 = k-1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists\, t \geq 1\colon X_t = 0 \mid X_1 = k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = k-1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists\, t \geq 0\colon X_t = 0 \mid X_0 = k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \end{aligned}$$





## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

- つまり，$1 \leq k \leq 3n-1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- $q_k = p_{k+1} - p_k$ と置くと

$$\begin{aligned} q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\ q_k &= q_{k-1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

- つまり，$p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので，…
  (次のページへ続く)





## 最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- つまり，$p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0, \\ p_2 &= p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0, \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0, \\ &\vdots \\ 0 = p_{3n} &= 1 + 3nq_0 \end{aligned}$$

- したがって，$q_0 = -\dfrac{1}{3n}$
- したがって，$p_k = 1 - \dfrac{k}{3n}$，特に，$p_n = 1 - \dfrac{n}{3n} = \dfrac{2}{3}$





## 終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (1)

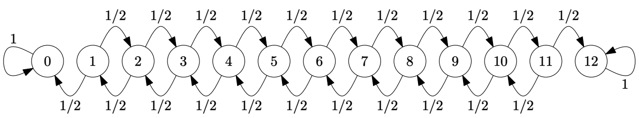
**興味の対象**

$T_n = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- このとき，$T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



- また，直感的には，$1 \leq k \leq 3n-1$ のとき，次が成り立つ？

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}$$





## 終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (2)

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \\ &= \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\ &= \sum_{h=0}^{3n} \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\ &= \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0{=}k, X_1{=}k{+}1] \Pr(X_1{=}k{+}1 \mid X_0{=}k) + \\ &\quad \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0{=}k, X_1{=}k{-}1] \Pr(X_1{=}k{-}1 \mid X_0{=}k) \\ &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} \end{aligned}$$

**演習問題**

任意の自然数値確率変数 $X, Y$ と事象 $A$ に対して，$\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

## 終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (1)

**解くべき漸化式**

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{1}{2} T_{n,k+1} + \frac{1}{2} T_{n,k-1} & (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは，$T_{n,n}$

- $1 \leq k \leq 3n-1$ のとき，
$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$
- $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$ と置くと，
$$1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき，} U_k = U_{k-1} - 2$$





## 終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (2)

$$\begin{aligned} T_{n,1} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0, \\ T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \\ T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \\ &\vdots \\ T_{n,k} &= T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1), \\ &\vdots \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$





## 終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \qquad (k \in \{1, 2, \ldots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

- したがって，$U_0 = 3n - 1$
- したがって，$k \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ のとき，
$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$
- $T_{n,0} = 0$ なので，$k \in \{0, 1, 2, \ldots, 3n\}$ のとき，
$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

つまり，$T_n = T_{n,n} = n(3n-n) = 2n^2$





## ギャンブラーの破産：設定

**設定**

- 1 人のギャンブラー，所持金 $n$ 万円
- 賭けを行うごとに，
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円増加
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円減少
- 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

**問題と解答**

1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
   $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？
   $\rightsquigarrow 2n^2$





## 目次



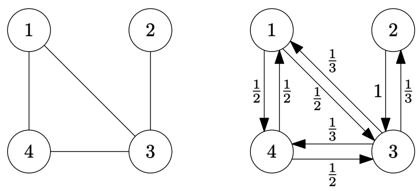




## 有限グラフ上の単純ランダムウォーク：設定

有限無向グラフ $G = (V, E)$：$V$ は $G$ の頂点集合，$E$ は $G$ の辺集合

- 時刻 $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して，次のように駒を動かす
  - $t = 0$ のとき，駒はある決められた頂点 $u \in V$ に置かれている
  - $t = k$ のとき，駒が頂点 $v \in V$ に置かれているとすると，
    $t = k + 1$ のとき，駒は $v$ の隣接頂点へ等確率で動かされる
- 時刻 $t$ において駒の置かれる頂点を $X_t$ とすると，
  $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ は確率過程




- この確率過程を $G$ 上の **単純ランダムウォーク** と呼ぶ





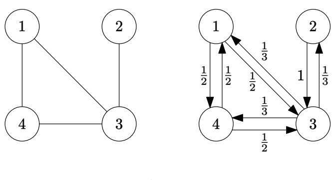
## 有限グラフ上の単純ランダムウォーク：興味の対象

有限無向グラフ $G = (V, E)$

**定義：到達時刻 とは？**

$G$ 上の単純ランダムウォークにおいて，
頂点 $u \in V$ から頂点 $v \in V$ への **到達時刻** とは，

$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$




- これの期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- 「$t \geq 0$」ではなく「$t \geq 1$」とする場合もある



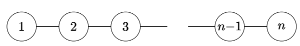


## 到達時刻：問題

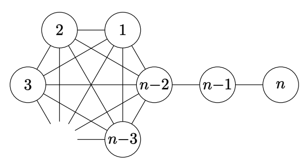
**問題**

次の 2 つのグラフを考えるとき，
頂点 1 から頂点 $n$ への到達時刻の期待値が大きいのはどちらか？

頂点数 $n$ の道

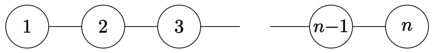



頂点数 $n-2$ の完全グラフ + 長さ 2 の道



## 到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数 $n$ の道)




左端の頂点を 1，右端の頂点を $n$ として，$\mathrm{E}[\tau_{1,n}]$ を計算する

- グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- したがって，期待値の線形性より

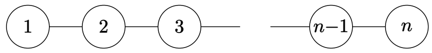
$$\mathrm{E}[\tau_{1,n}] = \mathrm{E}[\tau_{1,2}] + \mathrm{E}[\tau_{2,3}] + \cdots + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}]$$

- つまり，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対する $\mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]$ が分かればよい





## 到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出




- まず，$\mathrm{E}[\tau_{1,2}] = 1$
- 次に，$i \in \{2, \ldots, n-1\}$ のとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + \mathrm{E}[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{E}[\tau_{i-1,i}] + \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]) \\ \therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] &= 2 + \mathrm{E}[\tau_{i-1,i}] \end{aligned}$$





## 到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- したがって，$a_i = \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \ldots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

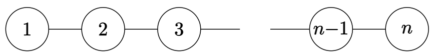
- これを解くと，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$a_i = 2i - 1$

**証明したこと**

任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$\mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

以上の考察をまとめると，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= \mathrm{E}[\tau_{1,2}] + \mathrm{E}[\tau_{2,3}] + \cdots + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1) = (n-1)^2 \end{aligned}$$

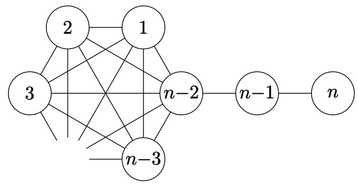







## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数 $n-2$ の完全グラフに長さ 2 の道を追加，$n \geq 3$)




$\mathrm{E}[\tau_{1,n}]$ を計算する

- グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,n-2} + \tau_{n-2,n-1} + \tau_{n-1,n}$$

- したがって，期待値の線形性から

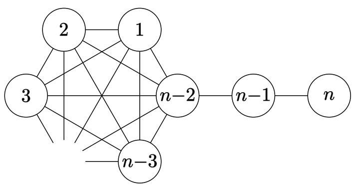
$$\mathrm{E}[\tau_{1,n}] = \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] + \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}]$$

- つまり，$\mathrm{E}[\tau_{1,n-2}], \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}], \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}]$ が分かればよい





## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)

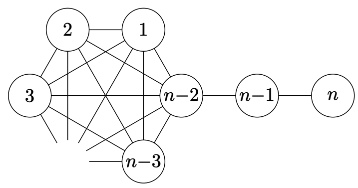



$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] &= \frac{1}{n-3} \cdot 1 + \frac{n-4}{n-3} \cdot (1 + \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}]) \\ (n-3)\mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] &= n - 3 + (n-4)\mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] \\ \therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] &= n - 3 \end{aligned}$$





## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)

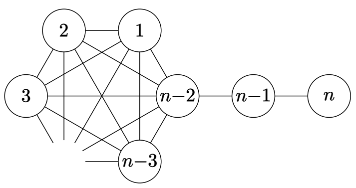



$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] &= \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2}(1 + \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] + \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}]) \\ (n-2)\mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] &= n - 2 + (n-3)\mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] + (n-3)\mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] \\ &= n - 2 + (n-3)^2 + (n-3)\mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] \\ \therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] &= n - 2 + (n-3)^2 = (n-2)(n-3) + 1 \end{aligned}$$





## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)

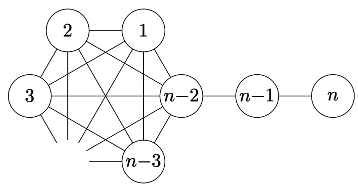



$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}]) \\ 2\mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] &= 2 + \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] \\ &= 2 + (n-2)(n-3) + 1 + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] \\ \therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] &= (n-2)(n-3) + 3 \end{aligned}$$





## 到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (5)

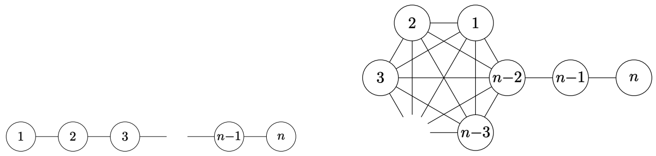



したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= \mathrm{E}[\tau_{1,n-2}] + \mathrm{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] \\ &= (n-3) + ((n-2)(n-3) + 1) + ((n-2)(n-3) + 3) \\ &= 2n^2 - 9n + 13 \end{aligned}$$

## 到達時刻の比較

- 頂点数 $n$ の道：
  到達時刻の期待値 $= (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$
- 頂点数 $n{-}2$ の完全グラフ $+$ 長さ 2 の道：
  到達時刻の期待値 $= 2n^2 - 9n + 13$




教訓：辺を多くすると，到達時刻の期待値が増えることがある





## 目次







## 今日の目標

**今日の目標**

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- 「ギャンブラーの破産」において，破産確率を計算できる
- 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において，
  到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は
「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの