離散数理工学　第 6 回

離散代数：有限幾何

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023 年 11 月 21 日

最終更新：2023 年 11 月 13 日　13:20

今日の目標

有限射影平面について次ができるようになる

- 有限体を用いて構成できるようになる
- 基本的な性質を証明できるようになる

目次

問題：次の性質を満たす集合の集合は存在するか？

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

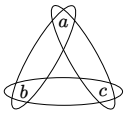
問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

例：$X = \{a, b, c\}$，$v = 3$，$m = 3$，$q = 1$

$A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{a, c\}, A_3 = \{b, c\}$



これをなぜ考えるのか？

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

X を「点の集合」，A_i を「直線」だと思うと…

- 異なる 2 直線は 1 点で交わる
- 異なる 2 点を通る直線は 1 つ

$\rightsquigarrow$ 点と直線の関係を表しているように見える

これをなぜ考えるのか？

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

例：$q = 2$

今から行うこと

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

今から行うこと

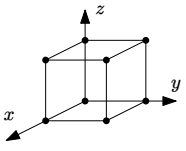
有限体を使って，この問題を部分的に解決する

今回は，$+$，$\cdot$ を単に $+$，$\cdot$ と書き，$\cdot$ はよく省略する

射影平面：例 — 考える空間は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ を考える

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$



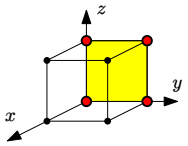
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ は線形空間 (和とスカラー倍がとれる)

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



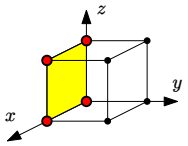
$$\{(x,y,z) \mid x=0\} = \{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



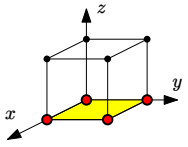
$$\{(x,y,z) \mid y=0\} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



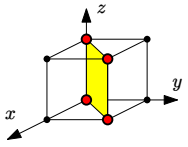
$$\{(x,y,z) \mid z=0\} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



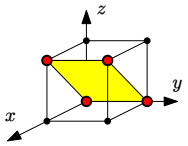
$$\{(x,y,z) \mid x+y=0\} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



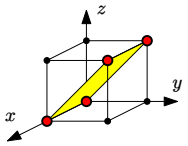
$$\{(x,y,z) \mid x+z=0\} = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



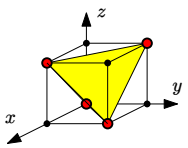
$$\{(x,y,z) \mid y+z=0\} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における平面

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られる



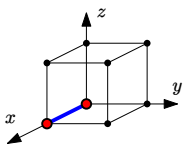
$$\{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} = \{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，
  $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x=ka, y=kb, z=kc\}$$

  と書ける
- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(k,0,0) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(1,0,0)\}$$

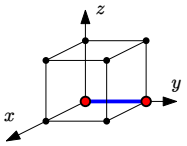
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(0,k,0) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(0,1,0)\}$$

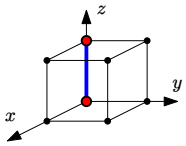
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(0,0,k) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$$

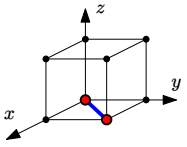
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(k,k,0) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(1,1,0)\}$$

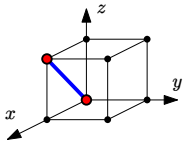
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(k,0,k) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(1,0,1)\}$$

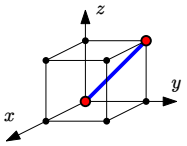
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(0,k,k) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(0,1,1)\}$$

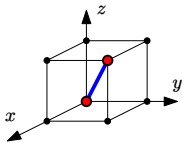
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

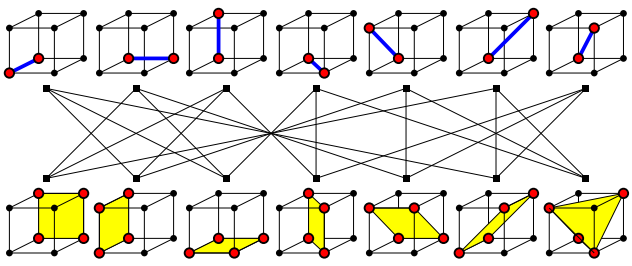
と書ける

- 異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られる



$$\{(k,k,k) \mid k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$$

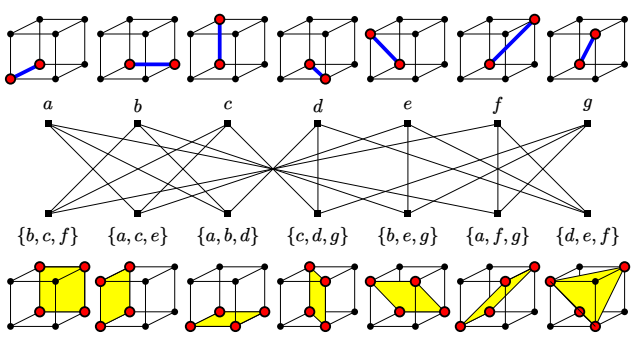
射影平面：例 — $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ における直線と平面の接続関係



観察

- どの直線も 3 つの平面に含まれる
- どの平面も 3 つの直線を含む
- 2 つの平面に含まれる直線はちょうど 1 つ
- 2 つの直線を含む平面はちょうど 1 つ

射影平面：例 — $q = 2$ のときの構成法



$v = 7$，$m = 7$，$q = 2$ の場合の構成になっている

目次

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線

- $\mathbb{F}_q^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る直線は，$(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid \text{ある } k \in \mathbb{F}_q \text{ が存在して，} \ x = ka, y = kb, z = kc\}$$

と書ける（これを $L(a,b,c)$ とする）

考えるべきこと

異なる (a,b,c) に対して，異なる直線が得られるか？

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線 (2)

例：$q = 3$ のとき，$\mathbb{F}_3$ において

$$\begin{aligned} L(2,1,1) &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_3 : \ x = 2k, y = k, z = k\} \\ &= \{(0,0,0), (2,1,1), (1,2,2)\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_3 : \ x = k, y = 2k, z = 2k\} \end{aligned}$$

例：$q = 5$ のとき，$\mathbb{F}_5$ において

$$\begin{aligned} L(4,1,3) &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_5 : \ x = 4k, y = k, z = 3k\} \\ &= \{(0,0,0), (4,1,3), (3,2,1), (2,3,4), (1,4,2)\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_5 : \ x = k, y = 4k, z = 2k\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_5 : \ x = 2k, y = 3k, z = 4k\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_5 : \ x = 3k, y = 2k, z = k\} \end{aligned}$$

つまり，同じ直線がちょうど $q-1$ 個だけ現れる？

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線の数

性質：$\mathbb{F}_q^3$ における原点を通る直線の数は？

$\dfrac{q^3-1}{q-1}$ （すなわち，q^2+q+1）

例

- $q = 2$：$q^2+q+1 = 7$
- $q = 3$：$q^2+q+1 = 13$
- $q = 4$：$q^2+q+1 = 21$
- $q = 5$：$q^2+q+1 = 31$

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線の数 (補題)

まず，次の補題を証明する

補題 L

任意の $(a,b,c), (a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$L(a,b,c) = L(a',b',c') \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{ある } \lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\} \text{ が存在して，} \\ a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'\end{array}$$

$\Leftarrow$ の証明：そのような λ が存在すると仮定．このとき，

$$\begin{aligned} L(a,b,c) &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_q : \ x = ka, y = kb, z = kc\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k \in \mathbb{F}_q : \ x = k\lambda a', y = k\lambda b', z = k\lambda c'\} \\ &= \{(x,y,z) \mid \exists k' \in \mathbb{F}_q : \ x = k'a', y = k'b', z = k'c'\} \\ &= L(a',b',c') \end{aligned}$$

□

注：$k \mapsto k\lambda$ は $\mathbb{F}_q$ 上の全単射 ($\because k \mapsto k\lambda^{-1}$ が逆写像)

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線の数 (補題) 続

まず，次の補題を証明する

補題 L

任意の $(a,b,c), (a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$L(a,b,c) = L(a',b',c') \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{ある } \lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\} \text{ が存在して，} \\ a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'\end{array}$$

$\Rightarrow$ の証明：$L(a,b,c) = L(a',b',c')$ であると仮定

- 特に，$(a',b',c') \in L(a',b',c') = L(a,b,c)$
- ある $k \in \mathbb{F}_q - \{0\}$ が存在して，$a' = ka, b' = kb, c' = kc$

□

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における直線 (証明)

$\mathbb{F}_q^3$ における原点を通る直線の数は？

$\dfrac{q^3-1}{q-1}$ （すなわち，q^2+q+1）

証明：

- $|\mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}| = q^3 - 1$
- 補題 L より，その中の $q-1$ 個の要素は同じ直線を与える
- したがって，異なる直線の数は $\dfrac{q^3-1}{q-1}$

□

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面

- $\mathbb{F}_q^3$ において，原点 $(0,0,0)$ を通る平面は，$(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ を使って

$$\{(x,y,z) \mid ax + by + cz = 0\}$$

と書ける（これを $P(a,b,c)$ をする）

考えるべきこと

異なる (a,b,c) に対して，異なる平面が得られるか？

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面 (2)

例：$q = 3$ のとき，$\mathbb{F}_3$ において

$$\begin{aligned} 2x + y + z = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot (2x + y + z) = 2 \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0 \end{aligned}$$

例：$q = 5$ のとき，$\mathbb{F}_5$ において

$$\begin{aligned} 4x + y + 3z = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot (4x + y + 3z) = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot (4x + y + 3z) = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot (4x + y + 3z) = 4 \cdot 0 \Leftrightarrow x + 4y + 2z = 0 \end{aligned}$$

同じ平面がちょうど $q - 1$ 個だけ現れる？

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面の数

$\mathbb{F}_q^3$ における原点を通る平面の数は？

$\dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$ (すなわち，$q^2 + q + 1$)

例

- $q = 2$：$q^2 + q + 1 = 7$
- $q = 3$：$q^2 + q + 1 = 13$
- $q = 4$：$q^2 + q + 1 = 21$
- $q = 5$：$q^2 + q + 1 = 31$

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面の数 (補題)

まず，次の補題を証明する

補題 P

任意の $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$P(a, b, c) = P(a', b', c') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } \lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\} \text{ が存在して，} \\ a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c' \end{array}$$

$\Leftarrow$ の証明：そのような λ が存在すると仮定．このとき，

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid \lambda a'x + \lambda b'y + \lambda c'z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid a'x + b'y + c'z = 0\} \\ &= P(a', b', c') \end{aligned}$$

□

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面の数 (補題) 続

まず，次の補題を証明する

補題 P

任意の $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$P(a, b, c) = P(a', b', c') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } \lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\} \text{ が存在して，} \\ a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c' \end{array}$$

$\Rightarrow$ の証明：$P(a, b, c) = P(a', b', c')$ を仮定

- $a \neq 0$ と仮定 ($b \neq 0$ や $c \neq 0$ の場合も同様に証明できる)
- $\lambda = a'a^{-1}$ とする (つまり，$a' = \lambda a$)
- $(a^{-1}b, -1, 0), (a^{-1}c, 0, -1) \in P(a, b, c) = P(a', b', c')$ である (なぜ？)
- 仮定より，$a' \cdot (a^{-1}b) + b' \cdot (-1) = 0$，$a' \cdot (a^{-1}c) + c \cdot (-1) = 0$
- このとき，$b' = a'a^{-1}b = \lambda b$ であり，$c' = a'a^{-1}c = \lambda c$

□

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：$\mathbb{F}_q^3$ における平面 (証明)

$\mathbb{F}_q^3$ における原点を通る平面の数は？

$\dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$ (すなわち，$q^2 + q + 1$)

証明：

- $|\mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}| = q^3 - 1$
- 補題 P より，その中の $q - 1$ 個の要素は同じ平面を与える
- したがって，異なる平面の数は $\dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$

□

2 つの直線を含む平面は一意に存在

次のことを証明する

性質：2 つの直線を含む平面は一意に存在

任意の異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，
$L(a, b, c)$ と $L(a', b', c')$ が異なるとき，
ある $(a'', b'', c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ が存在して，

$$L(a, b, c) \subseteq P(a'', b'', c''), \quad L(a', b', c') \subseteq P(a'', b'', c'')$$

そのような (a'', b'', c'') はスカラー倍を除いて一意

2 つの直線を含む平面は一意に存在：存在性

性質：2 つの直線を含む平面は一意に存在

任意の異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，
$L(a, b, c)$ と $L(a', b', c')$ が異なるとき，
ある $(a'', b'', c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ が存在して，

$$L(a, b, c) \subseteq P(a'', b'', c''), \quad L(a', b', c') \subseteq P(a'', b'', c'')$$

そのような (a'', b'', c'') はスカラー倍を除いて一意

証明 (存在性)：仮定を満たす $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ を考える

- $a'' = bc' - b'c, b'' = ca' - c'a, c'' = ab' - a'b$ とおく
- このとき，$(a'', b'', c'') \neq \mathbf{0}$ (なぜ？)
- さらに，$a''a + b''b + c''c = 0$ かつ $a''a' + b''b' + c''c' = 0$
- したがって，$L(a, b, c) \subseteq P(a'', b'', c'')$ かつ
  $L(a', b', c') \subseteq P(a'', b'', c'')$

□

2 つの直線を含む平面は一意に存在：一意性 (1)

性質：2 つの直線を含む平面は一意に存在

任意の異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，
$L(a, b, c)$ と $L(a', b', c')$ が異なるとき，
ある $(a'', b'', c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ が存在して，

$$L(a, b, c) \subseteq P(a'', b'', c''), \quad L(a', b', c') \subseteq P(a'', b'', c'')$$

そのような (a'', b'', c'') はスカラー倍を除いて一意

証明 (一意性)：異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ を考える

- (a'', b'', c'') が条件を満たすとする
- このとき，

$$\begin{aligned} a'' \cdot a + b'' \cdot b + c'' \cdot c &= 0, \quad (1) \\ a'' \cdot a' + b'' \cdot b' + c'' \cdot c' &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

2 つの直線を含む平面は一意に存在：一意性 (2)

証明 (一意性)：異なる $(a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ を考える

- (a'',b'',c'') が条件を満たすとする
- このとき，

$$a'' \cdot a + b'' \cdot b + c'' \cdot c = 0, \quad (1)$$
$$a'' \cdot a' + b'' \cdot b' + c'' \cdot c' = 0 \quad (2)$$

- $a \neq 0$ のときを考える ($b \neq 0, c \neq 0$ のときも同様)
- このとき，式 (1) より，$a'' = -a^{-1}(b''b + c''c)$
- これと式 (2) より，$-a^{-1}(b''b + c''c)a' + b''b' + c''c' = 0$
- $\therefore (a'b - ab')b'' = (c'a - ca')c''$
- つまり，ある $k \in \mathbb{F}_q$ が存在して，$b'' = k(c'a - ca'), c'' = k(a'b - ab')$
- このとき，
  $a'' = -a^{-1}(k(c'a - ca')b + k(a'b - ab')c) = k(b'c - bc')$ □

2 つの平面に含まれる直線は一意に存在

次の性質の証明は演習問題

性質：2 つの平面に含まれる直線は一意に存在

任意の異なる $(a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，
$P(a,b,c)$ と $P(a',b',c')$ が異なるとき，
ある $(a'',b'',c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ が存在して，

$$L(a'',b'',c'') \subseteq P(a,b,c), \quad L(a'',b'',c'') \subseteq P(a',b',c')$$

そのような (a'',b'',c'') はスカラー倍を除いて一意

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面：まとめ

$\mathbb{F}_q^3$ において

- 原点を通る直線の数 $= q^2 + q + 1$
- 原点を通る平面の数 $= q^2 + q + 1$
- 原点を通る 2 平面が含む，原点を通る直線の数 $= 1$
- 原点を通る 2 直線を含む，原点を通る平面の数 $= 1$

ここで作った直線と平面の集合を $\mathbb{F}_q$ **上の射影平面** と呼ぶ

問題：次の性質を満たす集合の集合は存在するか？

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面を考えることで，次の場合の存在が分かる

- q は素数のべき，$m = q^2 + q + 1$，$v = q^2 + q + 1$

目次

問題：次の性質を満たす集合の集合は存在するか？

正整数 m, q，有限集合 X，$|X| = v$

問題

m 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq X$ で次を満たすものは存在するか？

- $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = q + 1$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して
  $x \in A_i \cap A_j$ となる $x \in X$ が一意に存在する
- 任意の異なる $x, y \in X$ に対して
  $x, y \in A_i$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ が一意に存在する

定義：有限射影平面

$v = m = q^2 + q + 1$ のとき，
これを満たすものを **位数 q の有限射影平面** と呼ぶ

ここまでのまとめ：q が素数のべき ⇒ 位数 q の有限射影平面は存在

有限射影平面：未解決問題

定義：有限射影平面

$v = m = q^2 + q + 1$ のとき，
これを満たすものを **位数 q の有限射影平面** と呼ぶ

ここまでのまとめ：q が素数のべき ⇒ 位数 q の有限射影平面は存在

未解決問題：次は正しいか？

位数 q の有限射影平面が存在 ⇒ q は素数のべき

知られていること

- $q = 6$ のときは存在しない
- $q = 10$ のときは存在しない (Lam '91)
- $q = 12$ のときに存在しないか，未解決
- $q = 14$ のときは存在しない

非存在について，Bruck-Ryser の定理 ('49) が知られている (内容は省略)

目次

今日のまとめ

今日の目標

有限射影平面について次ができるようになる

- 有限体を用いて構成できるようになる
- 基本的な性質を証明できるようになる

有限射影平面の一般化として，より次元の高い
有限射影空間を考えることもできる
(ただ，平面の場合よりもかなりややこしい)