離散数理工学　第 4 回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023 年 11 月 7 日

最終更新：2023 年 10 月 29 日　18:49

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる
- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

目次

数列の母関数

定義：母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の **母関数** とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は (絶対) 収束する
- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので，『微分積分学』，『解析学』，『複素関数論』の知識が使える

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \dots$	1	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \dots$	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \dots$	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

目次

道 — まとめ　(第 2 回講義より)

a_n = グラフ P_n における独立集合の総数　とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる
- 特性方程式を用いた方法 (前回)
- 行列を用いた方法 (前回)
- 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

0. a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする
- このとき，$a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$
- つまり，上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore \quad a_n x^n &= a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \quad \text{において} \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore \quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore \quad A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき，$-\frac{x+1}{x^2+x-1}$ の部分分数展開が必要

- 「分母 $= 0$」を x について解くと，$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- したがって，ある定数 a, b が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \therefore \quad -(x+1) &= a\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \therefore \quad -x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} -1 &= a + b \quad \text{かつ} \\ -1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \end{aligned}$$

これを a, b に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \square$$

目次

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1：直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- $\ldots$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

したがって，考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1：書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore \quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n \quad \text{において}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n\geq 0} a_n x^n - x \sum_{n\geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore \quad (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって，

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n$$

□

例題 2

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2：直感を得る

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- $\ldots$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 2nx^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a_n x^n &= \sum_{n\geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 2nx^n \quad \text{において} \\ \text{左辺} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n\geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2x\sum_{n\geq 0} nx^n + 2x\sum_{n\geq 0} x^n \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2x\sum_{n\geq 0} nx^n + 2x\sum_{n\geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数展開を試みる，つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので，それを定める (次のページ)

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数展開

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + b(1-3x) + c(1-x)^2 \end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- $x = 0$ とすると，$0 = a + b + c$
- $x = 1$ とすると，$2 = -2b$
- $x = \frac{1}{3}$ とすると，$\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって，$a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き 2)

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot 3^n - \frac{3}{2} - n\right)x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

目次

例題 3

例題 3

整数 $n \geq 0$ に対して

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この数列の一般項 a_n を 1 つの閉じた式で表せるか？

例題 3：母関数を用いた解法 (1)

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにすると

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + 4x + 3x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 + x^6 + 4x^7 + 3x^8 + \cdots \\ &= (1 + 4x + 3x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \\ &= (1 + 4x + 3x^2)\frac{1}{1 - x^3} \\ &= \frac{1 + 4x + 3x^2}{1 - x^3} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 3：母関数を用いた解法 (2)

部分分数展開をするために，「分母 $= 0$」の解を求める

- $1 - x^3 = 0$ を解くと，$x = 1, \omega, \omega^2$ (ただし，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$)

したがって，

$$\frac{1 + 4x + 3x^2}{1 - x^3} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{\omega - x} + \frac{c}{\omega^2 - x}$$

となる，a, b, c が一意に存在するので，それを定める

$1 - x^3 = (1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)$ なので，

$$\begin{aligned} 1 + 4x + 3x^2 &= a(\omega - x)(\omega^2 - x) + b(1 - x)(\omega^2 - x) \\ &\quad + c(1 - x)(\omega - x) \end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つ

例題 3：母関数を用いた解法 (3)

$1 - x^3 = (1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)$ なので，

$$\begin{aligned} 1 + 4x + 3x^2 &= a(\omega - x)(\omega^2 - x) + b(1 - x)(\omega^2 - x) \\ &\quad + c(1 - x)(\omega - x) \end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つ

- $x = 1$ とすると，$8 = a(\omega - 1)(\omega^2 - 1)$
- $x = \omega$ とすると，$1 + 4\omega + 3\omega^2 = b(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)$
- $x = \omega^2$ とすると，$1 + 4\omega^2 + 3\omega^4 = c(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)$

したがって，

$$a = \frac{8}{(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}, \quad b = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)}, \quad c = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega^4}{(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)}$$

例題 3：母関数を用いた解法 (4)

ここで，$\omega^3 = 1$ と $1 + \omega + \omega^2 = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} a &= \frac{8}{(\omega - 1)(\omega^2 - 1)} = \frac{8}{\omega^3 - \omega^2 + \omega + 1} = \frac{8}{1 - (-\omega - 1) - \omega + 1} = \frac{8}{3}, \\ b &= \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)} = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{-\omega(\omega^2 - 2\omega + 1)} = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{-\omega((-\omega - 1) - 2\omega + 1)} \\ &= \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{3\omega^2} = \frac{\omega + 4\omega^2 + 3}{3} = \frac{\omega + 4(-\omega - 1) + 3}{3} = \frac{-1 - 3\omega}{3}, \\ c &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega^4}{(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{(1 - (-1 - \omega))(\omega - (-1 - \omega))} \\ &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{(2 + \omega)(1 + 2\omega)} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{2 + 5\omega + 2\omega^2} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{2 + 5\omega + 2(-1 - \omega)} \\ &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{3\omega} = \frac{\omega^2 + 4\omega + 3}{3} = \frac{(-1 - \omega) + 4\omega + 3}{3} = \frac{2 + 3\omega}{3} \end{aligned}$$

例題 3：母関数を用いた解法 (5)

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{8}{3}\frac{1}{1 - x} + \frac{-1 - 3\omega}{3}\frac{1}{\omega - x} + \frac{2 + 3\omega}{3}\frac{1}{\omega^2 - x} \\ &= \frac{8}{3}\frac{1}{1 - x} + \frac{-1 - 3\omega}{3\omega}\frac{1}{1 - x/\omega} + \frac{2 + 3\omega}{3\omega^2}\frac{1}{1 - x/\omega^2} \\ &= \frac{8}{3}\frac{1}{1 - x} + -\frac{2 - \omega}{3}\frac{1}{1 - x/\omega} - \frac{3 + \omega}{3}\frac{1}{1 - x/\omega^2} \\ &= \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{2 - \omega}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega}\right)^n x^n - \frac{3 + \omega}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{2 - \omega}{3}\left(\frac{1}{\omega}\right)^n - \frac{3 + \omega}{3}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{2 - \omega}{3}\omega^{2n} - \frac{3 + \omega}{3}\omega^n\right) x^n \end{aligned}$$

例題 3：まとめ

例題 3

整数 $n \geq 0$ に対して

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この数列の一般項 a_n を 1 つの閉じた式で表せるか？

解答例

任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$a_n = \frac{8}{3} - \frac{2 - \omega}{3}\omega^{2n} - \frac{3 + \omega}{3}\omega^n$$

ただし，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$

この記述を得ることを，**逆離散フーリエ変換** と呼ぶことがある

例題 3：確認

求めた一般項から，数列の各項を計算してみる

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^0 - \frac{3+\omega}{3}\omega^0 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3} - \frac{3+\omega}{3} = 1 \\
a_1 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^2 - \frac{3+\omega}{3}\omega^1 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\omega^2 + \frac{1}{3} - \omega - \frac{1}{3}\omega^2 = 3 - \omega^2 - \omega \\
&= 4 \\
a_2 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^4 - \frac{3+\omega}{3}\omega^2 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \omega^2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\omega - \frac{2}{3}\omega^2 \\
&= \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3
\end{aligned}$$

目次

例題 4

例題 4

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0\text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1\text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない

実際，$n \geq 1$ のとき，$a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$ であるので，

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1}x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

a_n の代わりに，次の b_n を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして，b_n の母関数 $B(x)$ を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- $B(x)$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の指数型母関数と呼ぶことがある
- 一方で，$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の通常型母関数と呼ぶことがある

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 4

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0\text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1\text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

例題 4：書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n = 0\text{ のとき}) \\ \dfrac{na_{n-1}}{n!} + \dfrac{3n}{n!} - \dfrac{2}{n!} = b_{n-1} + \dfrac{3}{(n-1)!} - \dfrac{2}{n!} & (n \geq 1\text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} \\
\therefore \quad b_n x^n &= b_{n-1}x^n + \frac{3}{(n-1)!}x^n - \frac{2}{n!}x^n
\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}x^n$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 2

2. 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}x^n \quad \text{において}$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!}x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!}x^n - \frac{2}{0!} \right) \\
&= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2
\end{aligned}$$

復習：テイラー展開

任意の実数 x に対して　$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $B(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}
B(x) - 4 &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \\
\therefore \quad (1-x)B(x) &= 3xe^x - 2e^x + 6 \\
\therefore \quad B(x) &= \frac{3x}{1-x}e^x - \frac{2}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
&= \frac{-3(1-x)+3}{1-x}e^x - \frac{2}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x}
\end{aligned}$$

$B(x)$ を x の関数として表現できた

例題 4：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}x^\ell\right) + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 6\right)x^n
\end{aligned}$$

したがって， 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

例題 4：母関数を用いた解法 まとめ

b_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

a_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = 6n! + \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} - 3$

目次

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる
- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

注意

今日扱ったのは，母関数に関する初歩
- 母関数にまつわる理論は膨大
- 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは，『複素関数論』が重要な役割を果たす