

離散数理工学 第3回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023年10月31日

最終更新：2023年10月22日 13:18

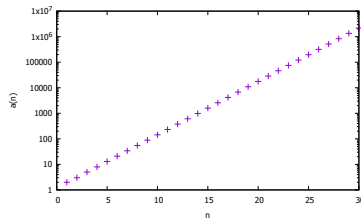
目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

線形漸化式の解き方：探る

| n | a_n |
|-----|-------|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 8 |
| 5 | 13 |
| 6 | 21 |
| 7 | 34 |
| 8 | 55 |
| 9 | 89 |
| 10 | 144 |
| 11 | 233 |
| 12 | 377 |
| 13 | 610 |
| 14 | 987 |

片対数プロット



↪ 指数関数的に増加する
(ある $\lambda > 0$ に対して λ^n の形?)

線形漸化式の解き方 (1)

② 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (\approx -0.618), \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\approx 1.618)$$

今日の目標

- ① 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- ② 数列の母関数が導出できる

道 — まとめ

(第2回講義より)

a_n = グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (1)

① a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち,

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の特性方程式と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)：考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば, $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \text{ であるので,} \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶ $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ を思い出すと, c_1, c_2 が定まる

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする

▶ $a_1 = 2, a_2 = 3$ なので,

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, \\ 3 &= c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 \end{aligned}$$

▶ c_1, c_2 を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法を用いて解いてみる

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列, x_1, x_2, x_3, \dots と c はベクトル

▶ このとき,

$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$

▶ したがって, A^{n-1} が計算できればよい

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

4 整理する

$$\text{▶ } c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{▶ } c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

したがって, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

[注] : $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1, \lambda_2^2 = \lambda_2 + 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \lambda_2 = -1$

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

2 行列の累乗を計算する

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする

▶ A の固有値と固有ベクトルを計算する

▶ A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$

▶ これを解くと, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

▶ これが A の固有値で, λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

λ_2 に対する A の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化: $U = (v_1 \ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち, } A = U\Lambda U^{-1}$$

$$\blacktriangleright A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\blacktriangleright U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので, } U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5 + \sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

線形漸化式の解き方 (2)

3 まとめる

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5+\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{(5+\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5-\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}} \\ \frac{15-7\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15-7\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例: $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — まとめ

(第2回講義より)

次のように定義

- $\blacktriangleright b_n =$ グラフ G_n における独立集合の総数
- $\blacktriangleright c_n =$ グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

計算すると, 次が得られる (はずである): 自然数 $n \geq 1$ に対して

$$b_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n$$

$$c_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^n + (5+\sqrt{5})\lambda_2^n}{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{(5+\sqrt{5})\lambda_1^n + (5-\sqrt{5})\lambda_2^n} \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n & \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n \\ &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる ($n=1, 2$ のときも, この式は正しい) □

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

後は同様に, 計算する

目次

① 線形漸化式の厳密解法

② 漸化式より上界を導出する方法

③ 母関数

④ 今日のまとめ

アルゴリズム A

```

1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end

```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる
(計算量の解析において、欲しいものは上界(で十分なこと)が多い)

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式: $\lambda^2 = \lambda + 1$

▶ この方程式はただ 1 つ正の解を持ち、それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは、
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

証明の続き: 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} \quad (f'_k \text{ の定義}) \\
&\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) \quad (\text{整理}) \\
&= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 \quad (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\
&= 2\lambda^{k+1} \quad (\text{整理})
\end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O(\lambda^n) = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

漸化式

$$g_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

直感: まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるの、
それを探る

▶ 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換える

▶ $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき, $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注: $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

1 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ

▶ 注意: ここから f'_n を厳密に求めて、 f_n を求めてもよい
が、ここではそうしない

3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $f'_n \leq 2\lambda^n$

証明: $n = 1$ のとき

▶ $f'_1 = 2$

▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

▶ したがって, $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

$n = 2$ のとき

▶ $f'_2 = 2$

▶ $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$

▶ したがって, $f'_2 < 2\lambda^2$ となる

O 記法の定義

非負の値を取る単調非減少数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ と $\{b_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは、
ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して、
任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

 $a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の増加率以下である

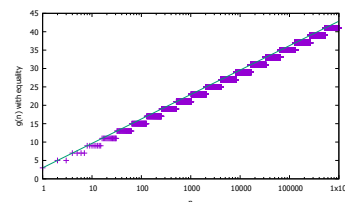
$g'_k = g_{2^k}$ と置き、「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換えると、次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

▶ これは等差数列

▶ 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して, $g'_k = 3 + 2k$

つまり, g_n はだいたい $3 + 2 \log_2 n$



今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$$g_n = O(\log n)$$

証明: $n = 1$ のとき

- ▶ 漸化式より, $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺 \leq 右辺

目次

- 線形漸化式の厳密解法
- 漸化式より上界を導出する方法
- 母関数
- 今日のまとめ

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に, $a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\frac{1}{1-\alpha x}$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $l \leq k$ に対して $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2 (k+1)$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\ &= 5 + 2(\log_2 (k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\ &= 3 + 2 \log_2 (k+1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

□

数列の母関数

定義: 母関数とは?

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の **母関数** とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

デジタル信号処理で「 z 変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は (絶対) 収束する

- ▶ 特に, ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- ▶ つまり, $|x| < r$ のとき, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので, 『微分積分学』, 『解析学』, 『複素関数論』の知識が使える

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は?

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

目次

- 線形漸化式の厳密解法
- 漸化式より上界を導出する方法
- 母関数
- 今日のまとめ

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる