離散数理工学　第 1 回

数え上げの基礎：二項係数と二項定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2023 年 10 月 10 日

最終更新：2023 年 10 月 2 日　11:54

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈：全単射による証明，二重の数え上げによる証明

目次

階乗

定義：階乗とは？ (直観的定義)

自然数 $n \geq 0$ の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- ...

階乗：再帰的定義

定義：階乗とは？ (再帰的定義)

自然数 $n \geq 0$ の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ...

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n!$ = 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$ のとき，$n! = 24$

- 1 2 3 4　▶ 2 1 3 4　▶ 3 1 2 4　▶ 4 1 2 3
- 1 2 4 3　▶ 2 1 4 3　▶ 3 1 4 2　▶ 4 1 3 2
- 1 3 2 4　▶ 2 3 1 4　▶ 3 2 1 4　▶ 4 2 1 3
- 1 3 4 2　▶ 2 3 4 1　▶ 3 2 4 1　▶ 4 2 3 1
- 1 4 2 3　▶ 2 4 1 3　▶ 3 4 1 2　▶ 4 3 1 2
- 1 4 3 2　▶ 2 4 3 1　▶ 3 4 2 1　▶ 4 3 2 1

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

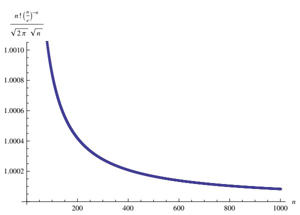
階乗：漸近公式

階乗の性質：スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$



$\leftarrow \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ のプロット

ここで証明は行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

つまり，

- $\mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の上界
- $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法　(下界は演習問題)

[基底段階]　$n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}\cdot 1\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$
- したがって，$n! \leq \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq \mathrm{e}k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ となると仮定

証明すること (目標)

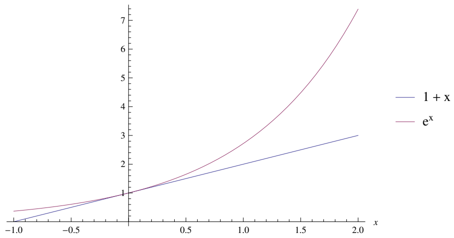
$$(k+1)! \leq \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}$$

有用な不等式

事実：有用な不等式　(演習問題)

任意の実数 x に対して

$$1 + x \leq \mathrm{e}^x$$



階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\leq \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\cdot(\mathrm{e}^{-1})\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} = \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

目次

二項係数

定義：二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_a\mathrm{C}_b$」という記号を高校では (なぜか) 使うが，国際的にはあまり用いられない (通じないか，通じにくい)

組合せ的解釈 (1)：部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における，要素数 b の部分集合の総数

$a = 5$, $b = 2$ のとき：$\{1,2,3,4,5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \\ \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (2)：着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5$, $b = 2$ のとき

●●●●●→■■●●●　●●●●●→■●■●●
●●●●●→■●●■●　●●●●●→■●●●■
●●●●●→●■■●●　●●●●●→●■●■●
●●●●●→●■●●■　●●●●●→●●■■●
●●●●●→●●■●■　●●●●●→●●●■■

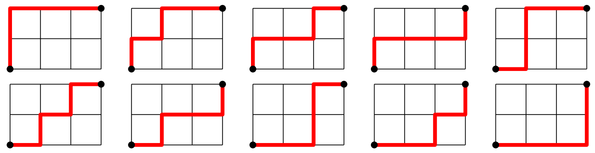
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3)：格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = $(0,0)$ から $(a-b, b)$ に至る (単調な) 格子道の総数

$a=5,\ b=2$ のとき：$(0,0)$ から $(3,2)$ に至る格子道



$\binom{5}{2} = 10$

二項係数に関する恒等式：対称性

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{a-b} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b}$$ □

等式に対する組合せ的解釈：全単射による証明

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

組合せ的解釈で証明してみる

組合せ的解釈による等式の証明法 (1)

1. 左辺と右辺が数える組合せ的解釈をそれぞれ定める
2. 左辺と右辺が数えるものの間の 1 対 1 対応 (全単射) を作る
3. それが全単射であることを証明する

これを **全単射による証明** と呼ぶことがある

二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

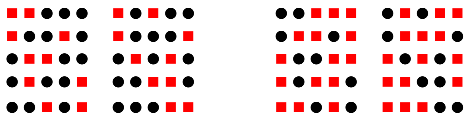
性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

全単射による証明 (着色を用いる)：
- 左辺 = a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ方法の総数
- 右辺 = a 個のものの中から色を塗る $a-b$ 個を選ぶ方法の総数

色の有無を入れ替えるという 1 対 1 対応により，左辺 = 右辺が分かる □



二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

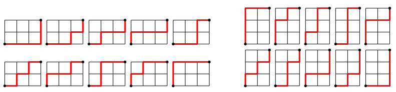
性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

全単射による証明 (格子道を用いる)：
- 左辺 = $(0,0)$ から $(a-b, b)$ へ至る格子道の総数
- 右辺 = $(0,0)$ から $(b, a-b)$ へ至る格子道の総数

直線 $y = x$ に関してこの 2 つは対称なので，同数となる □



二項係数に関する恒等式：パスカルの規則

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 (証明の続き)

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b}
\end{aligned}$$ □

等式に対する組合せ的解釈：二重の数え上げによる証明

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

組合せ的解釈で証明してみる

組合せ的解釈による等式の証明 (2)

1. 左辺と右辺が数える組合せ的解釈を 1 つ定める
2. 左辺と右辺がそれぞれ それを数えることを証明する

これを **二重の数え上げによる証明** と呼ぶことがある

二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 — 組合せ的解釈：着色

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる)：
a 個のものから b 個に色をつける方法の総数は $\binom{a}{b}$

- 最初のものを塗る場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初のものを塗らない場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り

すなわち，左辺 = 右辺 □

パスカルの三角形

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b}$$ □

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

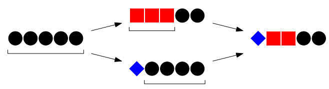
任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

二重の数え上げによる証明 (着色を用いる)：
a 個のものの中から b−1 個を赤で，1 個を青で塗る方法の総数 N を考える

- 左辺 = a 個のものの中から b 個に赤を塗り，
  その b 個の中から 1 個に青を塗る
- 右辺 = a 個のものの中から 1 個に青を塗り，
  残り a−1 個の中から b−1 個に赤を塗る

この 2 つはどちらも N に等しいので，左辺 = 右辺 □



二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ヒント：まず，$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (1)

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：$b = 1$ のときは次のようにして正しいことが分かる

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = a = \binom{a}{b}$$

あとは，$b \geq 2$ のときに正しいことを示せばよい

二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (2)

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：$a + b \geq 4$ に関する数学的帰納法で証明する

- $a + b = 4$ のとき (つまり，$a = 2, b = 2$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = 1 = \binom{a}{b}$$

- $a + b = 5$ のとき (つまり，$a = 3, b = 2$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = \frac{9}{4} < 3 = \binom{a}{b}$$

二項係数：上界と下界 — 下界の証明 (3)

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明 (続き)：任意の自然数 $k \geq 5$ を考える

- $4 \leq a + b \leq k$ のときに，この下界が成り立つと仮定する (累積帰納法)
- $a + b = k + 1 \geq 6$ のときを考えると

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \geq \frac{a}{b}\left(\frac{a-1}{b-1}\right)^{b-1} \geq \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{b-1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b$$ □

目次

二項定理

性質：二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ヒント：n に関する数学的帰納法 ＋ パスカルの規則

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

証明：二項定理の式において，$x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

例題 1：組合せ的解釈 (着色)

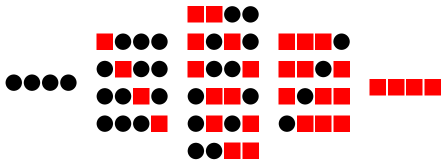
例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

二重の数え上げによる証明 (概略)：

- 右辺 ＝ n 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 ＝ n 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に，$(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \square$$

例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

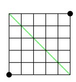
例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二重の数え上げによる証明 (アイディア)：

- 右辺 ＝ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数



例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

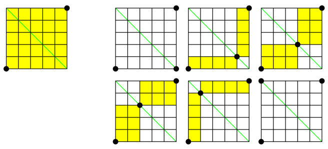
例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二重の数え上げによる証明 (アイディア)：

- 左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
  $(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈：全単射による証明，二重の数え上げによる証明

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．