

提出締切：2024 年 1 月 23 日 午前 9:00

以下の演習問題では、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  とする。

**授業内問題 12.1** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t | t \in \mathbb{N})$  を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け。
- 条件つき確率  $\Pr(X_2 = 2 | X_0 = 1)$  が何であるか、答えよ。
- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

**授業内問題 12.2**  $n \times n$  推移行列  $P$  を持つマルコフ連鎖を考える (ただし、 $n$  は 1 以上の整数)。確率分布  $\pi$  と  $\mu$  がこのマルコフ連鎖の定常分布であるとき、 $(\pi + \mu)/2$  もこのマルコフ連鎖の定常分布であることを証明せよ。(注：まず、 $(\pi + \mu)/2$  が確率分布であることを確認する必要がある。)

**復習問題 12.3** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t | t \in \mathbb{N})$  を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- 条件つき確率  $\Pr(X_2 = 3 | X_0 = 3)$  が何であるか、答えよ。
- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

**復習問題 12.4** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t | t \in \mathbb{N})$  を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

**復習問題 12.5** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし、次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t | t \in \mathbb{N})$  を考える。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ。

- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
- このマルコフ連鎖において、極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

**補足問題 12.6** 任意の事象  $A, B, C$  に対して、 $\Pr(B \cap C) \neq 0$  のとき

$$\Pr(A \cap B | C) = \Pr(A | B \cap C) \Pr(B | C)$$

が成り立つことを証明せよ。

**補足問題 12.7** 状態空間  $\mathcal{S}$  を  $\{1, \dots, n\}$  とするマルコフ連鎖  $(X_t | t \in \mathbb{N})$  の推移行列が  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  であるとする。このとき、任意の  $t \in \mathbb{N}$  に対して、 $\Pr(X_t = j | X_0 = i)$  が行列積  $P^t$  の第  $i, j$  成分に等しいことを証明せよ。

**追加問題 12.8** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし, 次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$  を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか, すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において, 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ. 存在する場合, その極限が何であるか, 答えよ.

**追加問題 12.9** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし, 次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$  を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか, すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において, 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ. 存在する場合, その極限が何であるか, 答えよ.

**追加問題 12.10** 状態空間を  $\{1, 2, 3\}$  とし, 次の推移行列を持つマルコフ連鎖  $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$  を考える.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか, すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において, 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  が存在するかどうか答えよ. 存在する場合, その極限が何であるか, 答えよ.