離散数理工学 (11) **2024 年 1 月 9 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2024 年 1 月 16 日 午前 9:00

授業内問題 11.1 整数 $n \geq 1$ と $d \geq 0$ を考える．任意の n 変数 d 次多項式において，項の総数が高々 $\binom{d+n}{n}$ であることを証明せよ．

授業内問題 11.2 整数 $n \geq 1$ を考える．任意の有限集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ を考える．このとき，任意の (異なるとは限らない) $r_1, r_2, \dots, r_n \in S$ に対して，$p(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$ となるような n 変数多項式を 1 つ構成せよ．(ヒント：$S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ として，p の次数が k となるように考えてみよ．)

復習問題 11.3 整数 $n \geq 1$ と $d \geq 0$ に対して，p を n 変数実多項式で，次数が高々 d であるものとする．(ただし，次数はすべての変数に対する次数の和として定義する．) 任意の有限集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ を考える．このとき，S から一様分布に従って独立に n 個の実数を選び，それらを $r_1, r_2, \dots, r_n$ とする．多項式 p が恒等的に 0 ではない，すなわち，ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq 0$ であるとき，

$$\Pr(p(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.4 自然数 $n \geq 1$ と $d \geq 0$ に対して，p, q を n 変数実多項式で，次数が高々 d であるものとする．(ただし，次数はすべての変数に対する次数の和として定義する．) 多項式 p と q が同じであるか，つまり，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) = q(x)$ が成り立つか，判定する問題を考える．問題 11.3 の結果を利用して，次の性質を持つ乱択アルゴリズムを設計せよ．

- p と q が同じであるとき，正しく「同じである」と必ず判定する．
- p と q が同じではないとき，正しく「同じでない」と判定する確率が 1/2 以上である．
- p と q をある 1 点でしか評価しない．

ただし，n と d はアルゴリズムの入力として与えられるとする．

復習問題 11.5 演習問題 11.4 の乱択アルゴリズムを考える．このアルゴリズムを K 回反復実行することで，p と q が同じではないときに，正しく「同じでない」と判定する確率を $1 - (1/2)^K$ 以上にできることを証明せよ．

補足問題 11.6 二部グラフ $G = (A, B, E)$ は $|A| = |B| = n$ を満たすとする ($n \geq 1$ は自然数)．集合 A, B は $A = \{1, 2, \dots, n\}, B = \{1', 2', \dots, n'\}$ とする．二部グラフ G のエドモンズ行列 $M = (m_{i,j})$ は次のように定義される $n \times n$ 行列である．すなわち，任意の i, j に対して

$$m_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} & (\{i, j'\} \in E \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{そうでないとき}). \end{cases}$$

ただし，辺 $\{i, j'\}$ に対して，$x_{i,j}$ は変数 (不定元) であるとする．

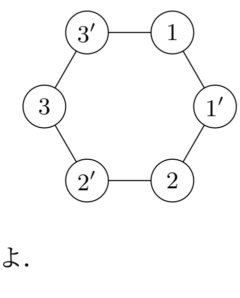
二部グラフ G が完全マッチングを持つとき，そのときに限り，$\det(M)$ が多項式として恒等的に 0 ではないことを証明せよ．

追加問題 11.7 自然数 $n \geq 1$ と $d \geq 0$ に対して，p を n 変数実多項式とする．ここで，多項式 p の次数列 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次のように定義する．まず，d_1 を，p における x_1 の次数とし，$x_1^{d_1}$ の係数を p_1 とする．次に，d_2 を，p_1 における x_2 の次数とし，p_1 における $x_2^{d_2}$ の係数を p_2 とする．そして，d_3 を，p_2 における x_3 の次数として，$\dots$ と続けていく．任意の有限集合 $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}$ を考える．このとき，各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して S_i から一様分布に従って実数を選び r_i とする．このとき，$r_1, r_2, \dots, r_n$ の選択は互いに独立であるとする．多項式 p が恒等的に 0 ではない，すなわち，ある $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(x) \neq 0$ であるとき，

$$\Pr(p(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0) \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{d_i}{|S_i|}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 11.8 演習問題 11.6 で定義した行列 M を考える．次に示すグラフを G とする．



以下の問いに答えよ．

1. グラフ G に対して，行列 M とその行列式 $\det(M)$ を具体的に書き下してみよ．
2. $S = \{1, 2\}$ として，多項式 $\det(M)$ の各変数に S の要素を一様分布に従って独立に割り当てることを

考える．このとき，$\det(M) = 0$ となる確率を計算せよ．