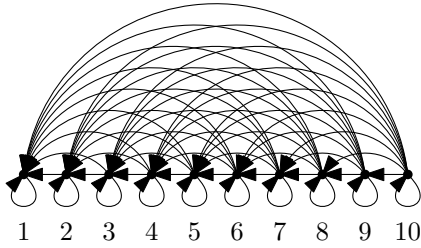


提出締切：2024年1月9日 午前9:00

授業内問題 10.1 次の有向グラフにおける前進問題を考える。対象とする有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であり、 $i \leq j$ であるとき、頂点 j から頂点 i に向かう辺が存在する。このグラフにおいて、頂点 n から始めて、向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい。下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している。



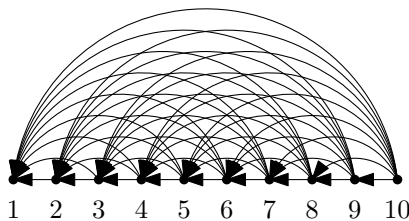
乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び、移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え、このアルゴリズムがたどる辺の数を R_n とする。以下の問いに答えよ。

- $E[R_1] = 0, E[R_2] = 2$ であることを証明せよ。
- 任意の $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ に対して、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$E[R_k] = 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E[R_i].$$

- 上の漸化式から、任意の $n \geq 2$ に対して、 $E[R_n] = 1 + H_{n-1}$ となることを証明せよ。ただし、 H_{n-1} は第 $n-1$ 調和数である。

復習問題 10.2 次の有向グラフにおける前進問題を考える。対象とする有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であり、 $i < j$ であるとき、頂点 j から頂点 i に向かう辺が存在する。このグラフにおいて、頂点 n から始めて、向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい。下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している。



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び、移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考

え、このアルゴリズムがたどる辺の数を R_n とする。以下の問いに答えよ。

- $E[R_1] = 0, E[R_2] = 1$ であることを証明せよ。
- 任意の $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ に対して、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$E[R_k] = 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} E[R_i].$$

- 上の漸化式から、任意の $n \geq 2$ に対して、 $E[R_n] = H_{n-1}$ となることを証明せよ。ただし、 H_{n-1} は第 $n-1$ 調和数である。
- 任意の $n \geq 2$ に対して、 $E[2^{R_n}] = n$ であることを証明せよ。
- このアルゴリズムがたどる辺の数が $2 \log_2 n$ 未満となる確率が $1 - \frac{1}{n}$ 以下であることを証明せよ。

復習問題 10.3 次の疑似コードで記述される乱択クイックソートを考える。

```

1: def qsort(A) # A: array of distinct numbers
2:   return nil if length(A) == 0
3:   p = a number in A chosen uniformly at random
4:   delete p from A
5:   foreach e in A {
6:     print "G"
7:     if e < p then add e to A1 else add e to A2
8:   }
9:   return qsort(A1) + p + qsort(A2)
10: end
    
```

配列 A を入力としたときに画面に書かれる G の数を確率変数 X_A で表し、

$$x_n = \max\{E[X_A] \mid |A| = n\}$$

とする。以下の問いに答えよ。

- $x_0 = 0$ であることを証明せよ。
- $n \geq 1$ であるとき、

$$x_n \leq n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i$$

が成り立つことを証明せよ。

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n \geq 0}$ を考える.

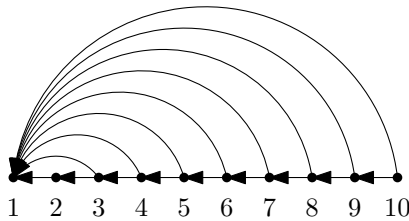
$$t_0 = 0$$

$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 数学的帰納法.)

4. 数列 $\{t_n\}_{n \geq 0}$ の一般項を求めよ.
5. 以上から, $x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ.

追加問題 10.4 次のような前進問題の変種を考える. 考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であり, 頂点 1 以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 1 へ向かうものしか存在しない. このグラフにおいて, 頂点 n から始めて, 向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい. 下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している.



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び, 移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え, このアルゴリズムがたどる辺の数を確率変数 R_n で表す. 以下の問いに答えよ.

1. $E[R_1] = 0, E[R_2] = 1$ であることを証明せよ.
2. 任意の $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ に対して, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$E[R_k] = 1 + \frac{1}{2} E[R_{k-1}].$$

3. 数列 $\{E[R_n]\}_{n \geq 1}$ の一般項が何であるか, 答えよ.
4. 数列 $\{E[2^{R_n}]\}_{n \geq 1}$ の一般項が何であるか, 答えよ.

追加問題 10.5 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは, 停止するとき, 入力の配列 A の最小値を返す. (この事実は以下の議論で使用してもよい.) 入力において, A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する.

```

1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x

```

8: end

ここで, 4 行目における $A-\{p\}$ は, 入力配列 A から要素 p を削除して得られる配列を表すものとする.

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる G の数を X_A で表し, $x_n = \max\{E[X_A] \mid |A| = n\}$ とする. このとき, $x_1 = 0$ であることを証明せよ.
2. $n \geq 2$ であるとき,

$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} x_n$$

が成り立つことを証明せよ.

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ を考える.

$$t_1 = 0$$

$$t_n = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} t_n \quad (n \geq 2)$$

このとき, 任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ.

4. 数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ の一般項を求めよ.
5. 以上から, $x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ.