提出締切： 2023 年 12 月 19 日 午前 9:00

以降の問題では，自然数 $n \in \mathbb{N}$ と実数 $p \in (0,1)$ に対して，頂点数が n，辺確率が p であるような，エルデシュとレニィのランダム・グラフを $\mathbb{G}(n,p)$ で表す．

授業内問題 9.1 $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．このとき，辺数 $|E|$ が次を満たすことを証明せよ．

$$\mathsf{E}[|E|] = \binom{n}{2}p.$$

授業内問題 9.2 $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．このとき，p が定数であるならば，辺数 $|E|$ が次を満たすことを証明せよ．

$$\Pr(|E| \geq pn(n-1)) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

復習問題 9.3 $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して，その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ．
$$\mathsf{E}[\deg(v)] = (n-1)p.$$
2. p が定数であるとき，任意の頂点 $v \in V$ に対して，その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ．
$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

復習問題 9.4 任意の (離散) 確率変数 X と正実数 $t > 0$ に対して，$\mathsf{E}[X]$ と $\mathsf{E}[X^2]$ が存在するとき，

$$\Pr(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2}{t^2}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：マルコフの不等式を利用せよ．)

復習問題 9.5 $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．

1. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0,1)$ を考える．$p \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ であるとき，
$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$
となることを証明せよ．
2. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0,1)$ を考える．$p \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ であるとき，
$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 1 \quad (n \to \infty)$$
となることを証明せよ．(ヒント：演習問題 9.4 を用いるとよい．)

追加問題 9.6 $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．0 以上 n 未満の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，G における次数 k の頂点数の期待値を求めよ．

追加問題 9.7 無向グラフ $G=(V,E)$ における三角形とは，異なる 3 頂点 $u,v,w \in V$ で，$\{u,v\},\{v,w\},\{u,w\} \in E$ を満たすもののことである．

$\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフ $G=(V,E)$ を考える．

1. 異なる 3 頂点 $u,v,w \in V$ に対して，次の確率変数 X_{uvw} を考える．
$$X_{uvw} = \begin{cases} 1 & (G \text{ において } u,v,w \text{ が三角形である}) \\ 0 & (\text{そうではない}). \end{cases}$$
このとき，$\mathsf{E}[X_{uvw}]$ を求めよ．
2. G における三角形の総数を確率変数 X で表す．このとき，$\mathsf{E}[X]$ を求めよ．
3. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0,1)$ を考える．$p \leq \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ であるとき，
$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$
となることを証明せよ．
4. 異なる 3 頂点 $u,v,w \in V$ と異なる 3 頂点 $u',v',w' \in V$ に対して，$|\{u,v,w\} \cap \{u',v',w'\}| = 0$ のとき，$\mathsf{E}[X_{uvw}X_{u'v'w'}]$ を求めよ．
5. 異なる 3 頂点 $u,v,w \in V$ と異なる 3 頂点 $u',v',w' \in V$ に対して，$|\{u,v,w\} \cap \{u',v',w'\}| = 1$ のとき，$\mathsf{E}[X_{uvw}X_{u'v'w'}]$ を求めよ．
6. 異なる 3 頂点 $u,v,w \in V$ と異なる 3 頂点 $u',v',w' \in V$ に対して，$|\{u,v,w\} \cap \{u',v',w'\}| = 2$ のとき，$\mathsf{E}[X_{uvw}X_{u'v'w'}]$ を求めよ．
7. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0,1)$ を考える．$p \geq \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ であるとき，
$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \to 1 \quad (n \to \infty)$$
となることを証明せよ．(ヒント：演習問題 9.4 を用いるとよい．)