離散数理工学 (7) **2023 年 11 月 28 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2023 年 12 月 5 日 午前 9:00

素数べき q を位数とする有限体 $\mathbb{F}_q$ を考える．有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面とは次の点と直線から成る．

- 点の集合 X は $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ である．
- 直線の集合 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \{L(a,b) \mid a,b \in \mathbb{F}_q\} \cup \{L(c) \mid c \in \mathbb{F}_q\}$$

  であり，ここで，
  - $L(a,b) = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{F}_q, y = ax+b\}$,
  - $L(c) = \{(c,y) \mid y \in \mathbb{F}_q\}$

  であるとする．

本演習問題では，$\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面を考えるとき，この記法を用いるものとする．

授業内問題 7.1 有限体 $\mathbb{F}_5$ 上のアフィン平面について，次の問いに答えよ．

1. このアフィン平面の点の総数を答えよ．
2. このアフィン平面の直線の総数を答えよ．
3. 2 点 $(2,4)$ と $(1,2)$ を含む直線をすべて答えよ．

授業内問題 7.2 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面において，任意の直線 $L \in \mathcal{L}$ に含まれる点の数が q であることを証明せよ．

授業内問題 7.3 正整数 $v \geq 2, k \geq 2, \lambda \geq 1$ に対して，任意の (v,k,λ) デザイン $(X,\mathcal{D})$ を考える．このとき，

$$|\mathcal{D}| = \frac{v(v-1)\lambda}{k(k-1)}$$

が成り立つことを証明せよ．（ヒント：問題 7.4 の結果を用いてもよい．）

復習問題 7.4 正整数 $v \geq 2, k \geq 2, \lambda \geq 1$ に対して，任意の (v,k,λ) デザイン $(X,\mathcal{D})$ を考える．このとき，任意の点 $x \in X$ に対して，x を要素として含むブロックの総数は x に依らず一定で，

$$\frac{(v-1)\lambda}{k-1}$$

であることを証明せよ．

復習問題 7.5 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面において，(a,b) と (a',b') が異なるとき，$L(a,b) \neq L(a',b')$ となることを証明せよ．

復習問題 7.6 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面において，任意の異なる 2 点 $(x,y),(x',y') \in X$ を含む直線が一意に存在することを証明せよ．

復習問題 7.7 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面は $(q^2,q,1)$ デザインである (この事実は用いてよい)．そのアフィン平面が分解可能であることを証明せよ．

補足問題 7.8 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面において，c と c' が異なるとき，$L(c) \neq L(c')$ となることを証明せよ．

補足問題 7.9 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面において，$L(a,b) \neq L(c)$ となることを証明せよ．

追加問題 7.10 正整数 $v \geq 2, k \geq 2, \lambda \geq 1$ に対して，任意の (v,k,λ) デザイン $(X,\mathcal{D})$ を考える．集合 $\overline{\mathcal{D}}$ を

$$\overline{\mathcal{D}} = \{X - B \mid B \in \mathcal{D}\}$$

と定義するとき，$(v-2k)(v-1)+k(k-1) \geq 1$ ならば，$(X,\overline{\mathcal{D}})$ がある正整数 v',k',λ' に対して (v',k',λ') デザインとなることを証明せよ．そのとき，v',k',λ' を v,k,λ を用いて表せ．（ヒント：問題 7.3 と 7.4 の結果を用いてもよい．）

追加問題 7.11 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のアフィン平面を考える．任意の $i \in \mathbb{F}_q$ に対して，$\mathcal{L}_i = \{L(i,b) \mid b \in \mathbb{F}_q\}$ とする．このとき，$i \neq i'$ ならば，任意の $L \in \mathcal{L}_i$ と $L' \in \mathcal{L}_{i'}$ に対して，$|L \cap L'| = 1$ が成り立つことを証明せよ．