

提出締切：2023年11月28日午前9:00

この演習問題において、次に挙げる記法を用いる。 q は素数のべきであるとして、 \mathbb{F}_q で位数 q の有限体を表す。任意の $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{(0, 0, 0)\}$ に対して、

$$L(a, b, c) = \{(ka, kb, kc) \in \mathbb{F}_q^3 \mid k \in \mathbb{F}_q\},$$

$$P(a, b, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_q^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

と定義する。空間 \mathbb{F}_q^3 において、 $L(a, b, c)$ は原点を通る直線であり、 $P(a, b, c)$ は原点を通る平面である。この記法は断らずに用いる。

授業内問題 6.1 有限体 \mathbb{F}_5 に対して、次の問いに答えよ。

1. 集合 $L(1, 2, 3)$ の要素をすべて挙げよ。
2. 集合 $P(3, 4, 1)$ の要素をすべて挙げよ。
3. 原点を通る平面で、 $L(1, 2, 3)$ と $L(3, 1, 0)$ を含むものは何か？すべて答えよ。
4. 原点を通る直線で、 $P(3, 4, 1)$ と $P(0, 2, 4)$ に含まれるものは何か？すべて答えよ。

授業内問題 6.2 有限体 \mathbb{F}_q に対して、任意の $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{(0, 0, 0)\}$ を考える。直線 $L(a, b, c)$ の要素数が q であることを証明せよ。(ヒント： $L(a, b, c)$ と \mathbb{F}_q の間に全単射が存在することを示せばよい。)

復習問題 6.3 有限体 \mathbb{F}_2 に対して、次の問いに答えよ。

1. \mathbb{F}_2^3 において、原点を通る直線をすべて挙げよ。そのような直線の総数を答えよ。
2. \mathbb{F}_2^3 において、原点を通る平面をすべて挙げよ。そのような平面の総数を答えよ。

復習問題 6.4 任意の $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{(0, 0, 0)\}$ を考える。条件 $L(a, b, c) = L(a', b', c')$ が成り立つための必要十分条件は、ある $\lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\}$ が存在して、 $a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'$ となることであることを証明せよ。

復習問題 6.5 空間 \mathbb{F}_q^3 において、原点を通る異なる直線の数が $q^2 + q + 1$ であることを証明せよ。(ヒント：演習問題 6.4 の結果を用いてもよい。)

復習問題 6.6 任意の $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{(0, 0, 0)\}$ を考える。条件 $P(a, b, c) = P(a', b', c')$ が成り立つための必要十分条件は、ある $\lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\}$ が存在して、 $a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'$ となることであることを証明せよ。

復習問題 6.7 空間 \mathbb{F}_q^3 において、原点を通る異なる平面の数が $q^2 + q + 1$ であることを証明せよ。(ヒント：演習問題 6.6 の結果を用いてもよい。)

復習問題 6.8 異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{0\}$ に対して、 $L(a, b, c)$ と $L(a', b', c')$ が異なる場合を考える。以下の問いに答えよ。

1. ある $(a'', b'', c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{0\}$ が存在して、 $L(a, b, c) \subseteq P(a'', b'', c'')$ と $L(a', b', c') \subseteq P(a'', b'', c'')$ を満たすことを証明せよ。
2. 前小問にあるような (a'', b'', c'') はスカラー倍を除いて一意であることを証明せよ。

補足問題 6.9 異なる $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{0\}$ に対して、 $P(a, b, c)$ と $P(a', b', c')$ が異なる場合を考える。以下の問いに答えよ。

1. ある $(a'', b'', c'') \in \mathbb{F}_q^3 - \{0\}$ が存在して、 $L(a'', b'', c'') \subseteq P(a, b, c)$ と $L(a'', b'', c'') \subseteq P(a', b', c')$ を満たすことを証明せよ。
2. 前小問にあるような (a'', b'', c'') はスカラー倍を除いて一意であることを証明せよ。

追加問題 6.10 有限体 \mathbb{F}_q に対して、任意の $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{(0, 0, 0)\}$ を考える。平面 $P(a, b, c)$ の要素数が q^2 であることを証明せよ。(ヒント： $P(a, b, c)$ と \mathbb{F}_q^2 の間に全単射が存在することを示せばよい。)