**離散数理工学 (4)** **2023 年 11 月 7 日**
**演習問題** **岡本 吉央**

**提出締切：** 2023 年 11 月 14 日 午前 9:00

**授業内問題 4.1** 次の漸化式を考える．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $t_n$ を閉じた形で与えよ．

**授業内問題 4.2** 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $b_n$ を閉じた形で与えよ．

---

**復習問題 4.3** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.4** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.5** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.6** 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.7** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_n/n!$ とする．母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $b_n$ を閉じた形で与えよ．
2. 小問 1 の結果を用いて，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

---

**追加問題 4.8** 次の漸化式を考える．

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $c_n$ を閉じた形で与えよ．

**追加問題 4.9** 次の数列 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$e_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 4 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 4 = 1 \text{ のとき}), \\ 2 & (n \bmod 4 = 2 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 4 = 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $e_n$ を閉じた形で与えよ．

**追加問題 4.10** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 2n + (-1)^n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_n/n!$ とする．母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $b_n$ を閉じた形で与えよ．
2. 小問 1 の結果を用いて，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題（発展）4.11** 実定数 $a, b, c$ に対して，次の数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

$$x_n = \begin{cases} a & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ b & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ c & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によると，ある複素数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ が存在して，$x_n$ は

$$x_n = \hat{a} + \hat{b}\,\omega^n + \hat{c}\,\omega^{2n} \quad (n \geq 0)$$

と書けることが分かる（これが正しいことは認めてよい）．ただし，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 3(|\hat{a}|^2 + |\hat{b}|^2 + |\hat{c}|^2).$$

複素数の絶対値の定義に注意せよ．（ヒント：「発展」と書いてあるが，難しいわけではない．）(補足：これはフーリエ解析において「パーセヴァルの等式」と呼ばれるものの離散版の特殊な場合である．)