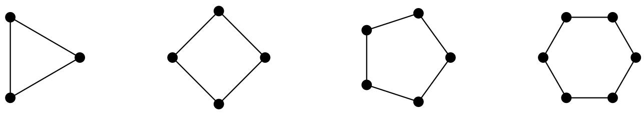
離散数理工学 (2) **2023 年 10 月 24 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2023 年 10 月 31 日 午前 9:00

授業内問題 2.1 自然数 $n \geq 3$ に対して，頂点数 n の閉路を C_n と表記することにする．



C_3 C_4 C_5 C_6

グラフ C_n における独立集合の総数を a'_n とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ (ただし，$n \geq 3$ とする)．

$$a'_n = \begin{cases} 4 & (n = 3 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-3} & (n \geq 4 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで，a_n は 問題 2.3 で定義される数である．

授業内問題 2.2 次のアルゴリズムを考える．

```
def f(n)
  print "Q"
  if n > 2 & n % 2 == 0
    f(n/2)
    f(n/2)
  elsif n > 2 & n % 2 == 1
    f(n-1)
  end
end
```

自然数 $n \geq 0$ に対して，`f`(n) が出力する `Q` の総数を q_n で表す．次の式が成り立つことを証明せよ．

$$q_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1, 2 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + 2q_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

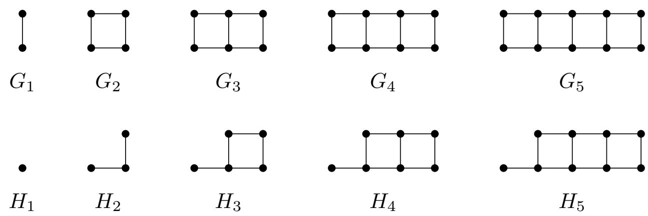
復習問題 2.3 自然数 $n \geq 1$ に対して，頂点数 n の道を P_n と表記することにする．

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5

グラフ P_n における独立集合の総数を a_n としたとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.4 自然数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ G_n と H_n を考える．



グラフ G_n における独立集合の総数を b_n とし，グラフ H_n における独立集合の総数を c_n とする．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.5 次のアルゴリズムを考える．

```
def fnct(n)
  print "a"
  if n > 2
    fnct(n-1)
    fnct(n-2)
  end
end
```

自然数 $n \geq 0$ に対して，`fnct`(n) を実行したときに出力される「`a`」の数を f_n とする．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 2.6 自然数 $a, b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ のとき，

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$a \bmod b$ は a を b で割った余りを表す．(注：問題 2.9 の結果を使ってもよい．)

復習問題 2.7 次のアルゴリズムを考える．

```
def gcd(a, b) # precondition: a >= b >= 0
  print "G"
  if b == 0
    return a
  else
    gcd(b, a % b)
  end
end
```

そして，任意の自然数 $n \geq 0$ に対して次の量を考える．

$$g_n = \max_{\substack{a \geq 1, \\ b \leq n}} \{\texttt{gcd}(a,\, b) \text{ の実行で出力される } \texttt{G} \text{ の数}\}$$

このとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$g_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(注：問題 2.6 の結果を使ってもよい．)

補足問題 2.8 自然数 $a, b \geq 1$ の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す．任意の自然数 $a > b \geq 1$ に対して，$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ が成り立つことを証明せよ．(注意：この事実から，ユークリッドのアルゴリズムの正当性が導かれる．)

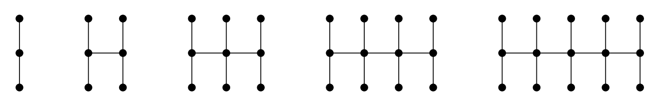
補足問題 2.9 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 2.10 問題 2.3 と同様に，a_n で頂点数 n の道における独立集合の総数を表すとする．このとき，任意の自然数 $k \geq 1$ に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$a_{2k+1} = a_k^2 + a_{k-1}^2.$$

(ヒント：問題 2.3 にある漸化式を用いて，数学的帰納法で証明する方法か，組合せ的解釈に基づく証明を考えてみよ．組合せ的解釈に基づく場合は，頂点数 $2k+1$ の道を考えて，その「中央」に位置する頂点が独立集合に要素として含まれる場合と含まれない場合を分けて数え上げてみよ．)

追加問題 2.11 自然数 $n \geq 1$ に対して，次の図で表されるグラフ T_n を考える．



T_1　T_2　T_3　T_4　T_5

グラフ T_n における独立集合の総数を t_n とするとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

追加問題 2.12 次のアルゴリズムを考える．

```
def fnct2(n)
  print "K"
  if n == 0
    return
  elsif n % 2 == 0
    fnct2(n/2)
  else
    fnct2(n-1)
  end
end
```

自然数 $n \geq 0$ に対して，$\texttt{fnct2}(n)$ が出力する K の総数を p_n で表す．次の式が成り立つことを証明せよ．

$$p_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + p_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$