離散数理工学 (1) **2023 年 10 月 10 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2023 年 10 月 17 日 午前 9:00

授業内問題 1.1 任意の自然数 n, a, b を考える．

1. $n \geq a+b$ ならば，次の等式が成り立つことを，二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．
$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b} = \binom{n}{b}\binom{n-b}{a} = \binom{n}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$
2. 小問 1 の等式に対して，組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

授業内問題 1.2 任意の自然数 n, r を考える．

1. $n \geq r$ ならば，次の等式が成り立つことを，二項係数の定義に基づいて式変形により，証明せよ．
$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$
(ヒント：数学的帰納法を用いてもよい．)
2. 小問 1 の等式に対して，組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

授業内問題 1.3 任意の自然数 n, k を考える．$n \geq k$ ならば，次の不等式が成り立つことを証明せよ．
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq (1+n)^k.$$
(ヒント：$\binom{n}{i} \leq n^i$ が正しいことをまず確認してみよ．)

復習問題 1.4 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，
$$n! \leq \mathrm{e}n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
が成り立つことを証明せよ．演習問題 1.12 を用いてよい．

復習問題 1.5 任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，
$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.6 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば
$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式の組合せ的解釈に基づく証明を与えよ．(部分集合の選択，着色，格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.7 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して
$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$
が成り立つことを二項係数の定義に基づき式変形により証明せよ．また，この等式を
$$\binom{a}{b}b = a\binom{a-1}{b-1}$$
と変形することで，組合せ的解釈による証明も与えよ．(部分集合の選択, 着色, 格子道のどれかを用いて考えてみよ．)

復習問題 1.8 任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，
$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$
が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 1.7 を用いてよい．)

復習問題 1.9 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
が成り立つことを，二項定理を用いて証明せよ．また，この等式に対して，二重の数え上げによる証明を与えよ．

復習問題 1.10 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．

復習問題 1.11 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また, この等式に対して, 二重の数え上げによる証明を与えよ．

補足問題 1.12 任意の実数 x に対して，$1+x \leq \mathrm{e}^x$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.13 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$

が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.14 自然数 a と b が $a \geq 1$，$b \geq 1$，$a \geq b$ を満たすとする．

1. 不等式 $\dbinom{a}{b} \leq \dfrac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ．
2. 不等式 $\dfrac{a^b}{b!} \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．演習問題 1.12 を用いてよい．
3. 上の 2 つの小問より，$\dbinom{a}{b} \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.15 [**二項定理**] 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 1.6 を用いてもよい．)

追加問題 1.16 次を証明せよ．演習問題 1.12 を用いてよい．

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1+\frac{1}{n})^n \leq \mathrm{e}$.
2. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq \mathrm{e}$.（ヒント：$1+\frac{1}{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ．）
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.（ヒント：上の 2 つの小問を用いよ．）

追加問題 1.17 問題 1.10 にある等式は係数が -1 である項を移項させると，

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{ 偶数}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{ 奇数}}}^{n} \binom{n}{k}$$

となる．この等式の両辺に対して組合せ的解釈を与え，等式自体を全単射による証明で導いてみよ．

追加問題 1.18 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また, この等式に対して, 二重の数え上げによる証明を与えよ．

追加問題 1.19

1. 任意の自然数 $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$

が成り立つことを証明せよ．また，この等式に対する，二重の数え上げによる証明を与えよ．

2. 任意の自然数 $a \geq c \geq 0$ に対して，

$$\sum_{b=c}^{a} \binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c} 2^{a-c}$$

が成り立つことを証明せよ．(今まで出てきた等式を用いてもよい．）また，この等式に対する，二重の数え上げによる証明を与えよ．