

9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.

携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中に入れておくこと.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 整数 m, n は $1 \leq m \leq n$ を満たすとす
る. このとき,

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{m-k} = \binom{n+m}{m}$$

が成り立つことを次の2つの方法で証明せよ.

1. 二項定理によって.
2. 組合せ的解釈に基づく二重の数え上げによ
って.

問題 2 素数べき q を位数とする有限体 \mathbb{F}_q を考
える. 有限体 \mathbb{F}_q 上のアフィン平面とは次の点と
直線から成る.

- 点の集合 X は $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ である.
- 直線の集合 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \{L(a, b) \mid a, b \in \mathbb{F}_q\} \cup \{L(c) \mid c \in \mathbb{F}_q\}$$

であり, ここで,

$$\begin{aligned} - L(a, b) &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{F}_q, y = ax + b\}, \\ - L(c) &= \{(c, y) \mid y \in \mathbb{F}_q\} \end{aligned}$$

であるとする.

有限体 \mathbb{F}_{67} 上のアフィン平面について, 次の問い
に答えよ.

1. このアフィン平面の点の総数を答えよ.
2. このアフィン平面の直線の総数を答えよ.
3. 2点 $(12, 5)$ と $(7, 31)$ を含む直線をすべて答
えよ.
4. 2直線 $L(12, 5)$ と $L(7, 31)$ が共有する点をす
べて答えよ.

(ヒント: 67は素数である.)

問題 3 次の漸化式を考える.

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列 $\{c_n\}_{n \geq 0}$ の一般
項 c_n を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いる方
法によらない解答であっても, 部分点を与える.)

問題 4 任意の (v, k, λ) デザイン (X, \mathcal{D}) を考
える. ただし, v, k, λ は $v \geq 2, k \geq 2, \lambda \geq 1$ を満た
す整数であるとする. 以下の問いに答えよ.

1.

$$|\mathcal{D}| = \frac{v(v-1)\lambda}{k(k-1)}$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 任意
の点 $x \in X$ に対して, x を要素として含むブ
ロックの総数は x に依らず一定で,

$$\frac{(v-1)\lambda}{k-1}$$

であることを用いてもよい.)

2. 集合 $\overline{\mathcal{D}}$ を

$$\overline{\mathcal{D}} = \{X - B \mid B \in \mathcal{D}\}$$

と定義するとき, $(v-2k)(v-1)+k(k-1) \geq 1$
ならば, $(X, \overline{\mathcal{D}})$ がある正整数 v', k', λ' に対し
て (v', k', λ') デザインとなることを証明せよ.
そのとき, v', k', λ' を v, k, λ を用いて表せ.

以上