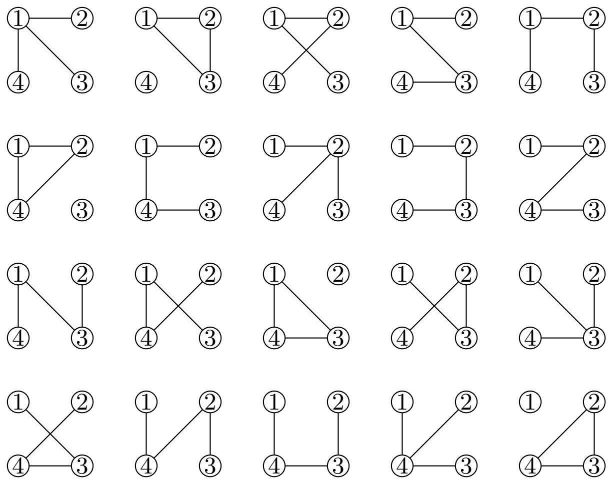
離散数理工学 **2024 年 2 月 6 日**
期末試験 **岡本 吉央**

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は **電源を切って** カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 A と B の 2 人がじゃんけんを 1 回行うと，確率 1/3 で A が勝つ．以下の問いに答えよ．

1. A が勝つまでじゃんけんを繰り返すとする．そのとき，行うじゃんけんの回数の期待値を答えよ．
2. $n \geq 1$ は整数であるとする．A と B の 2 人が n 回じゃんけんを行うとする．n 回のじゃんけんの中で，A が勝った回数が $n/2$ 以上となる確率が $n \to \infty$ の極限において 0 に収束することを証明せよ．

問題 2 正整数 n と m が $n \geq 2$ と $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ を満たすものとする．頂点数が n，辺数が m であるようなランダム・グラフ $\mathbb{G}(n,m)$ を次のように定義する．すなわち，これは頂点集合を $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ として，辺の数が m であるようなグラフを一様分布に従って生成することによって得られるものである．例えば，$n = 4, m = 3$ の場合は，$\mathbb{G}(n,m)$ では次のグラフの中の 1 つが確率 1/20 で得られる．



$\mathbb{G}(n,m)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 任意の異なる 2 頂点 u, v を考える．このとき，確率 $\Pr(\{u,v\} \in E)$ を n, m を使った式で表せ．
2. 任意の頂点 v に対して，その次数の期待値 $\mathsf{E}[\deg(v)]$ を n, m を使った式で表せ．

[裏面に続く]

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし，次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える.

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\;1 & \;\;\;2 & \;\;\;3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

以下の問いに答えよ.

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ.
3. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ.

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは，停止するとき，入力の配列 A の最小値を返す．(この事実は以下の議論で使用してもよい．) 入力において，A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する.

```
1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x
8: end
```

ここで，4 行目における `A-{p}` は，入力配列 A から要素 p を削除して得られる配列を表すものとする.

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる `G` の数を X_A で表し，$x_n = \max\{\mathsf{E}[X_A] \mid |A| = n\}$ とする．このとき，$x_1 = 0$ であることを証明せよ.
2. $n \geq 2$ であるとき，
$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} x_n$$
が成り立つことを証明せよ.
3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ を考える.
$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_n &= t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} t_n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$
このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ.
4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めよ.
5. 以上から，$x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ.

以上