離散最適化基礎論

第 12 回

ラグランジュ緩和 (1)：原理

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2023 年 1 月 10 日

最終更新：2023 年 1 月 10 日　10:08

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

* 休み (国内出張) (12/27)
* 休み (冬季休業) (1/3)

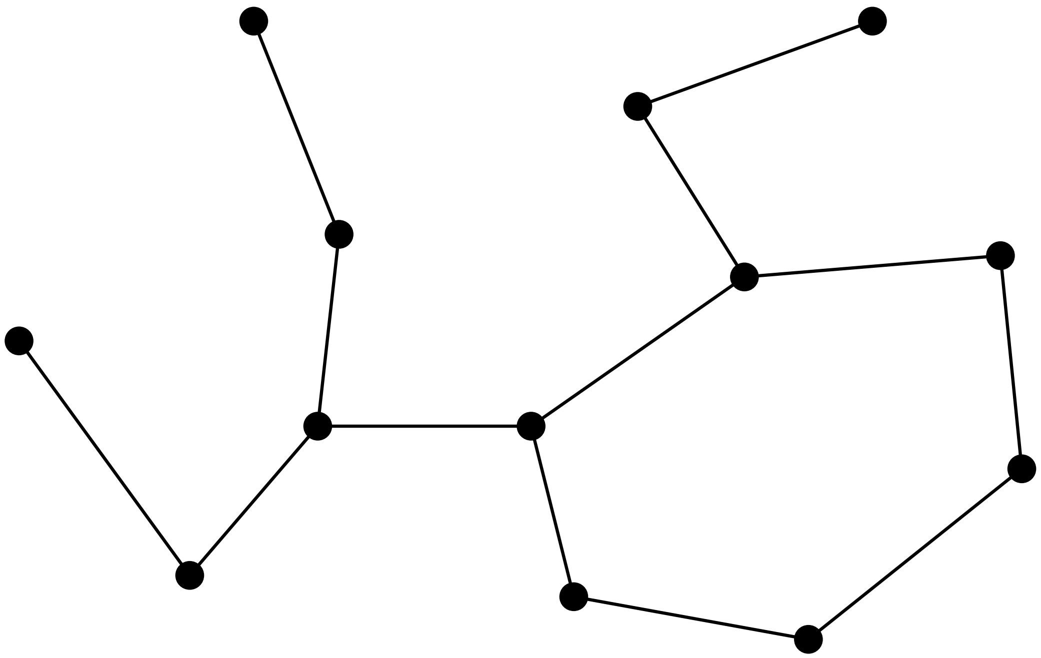
12. ラグランジュ緩和 (1) : 原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2) : 最適ラグランジュ緩和 (1/17)
14. 前求解 (1/24)

<まとめ>

15. 期末試験 (1/31)

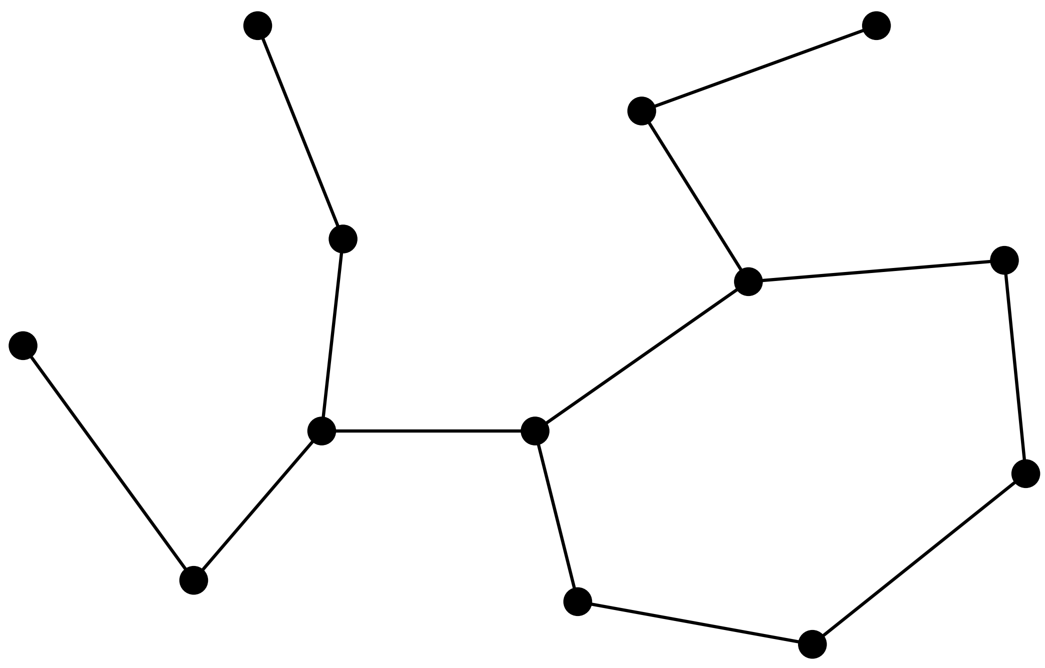
今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



今日の内容

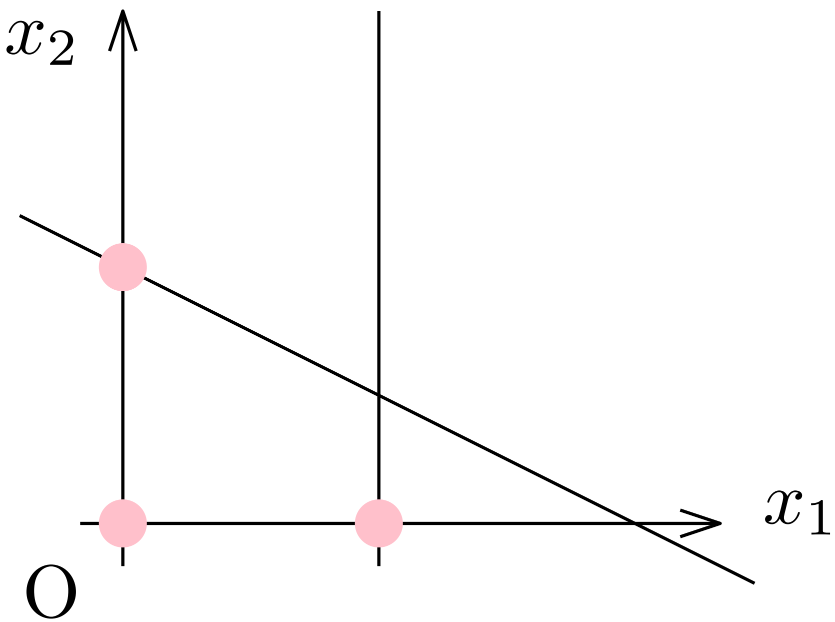
- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



線形計画緩和：例

整数計画問題 P

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



線形計画緩和：例

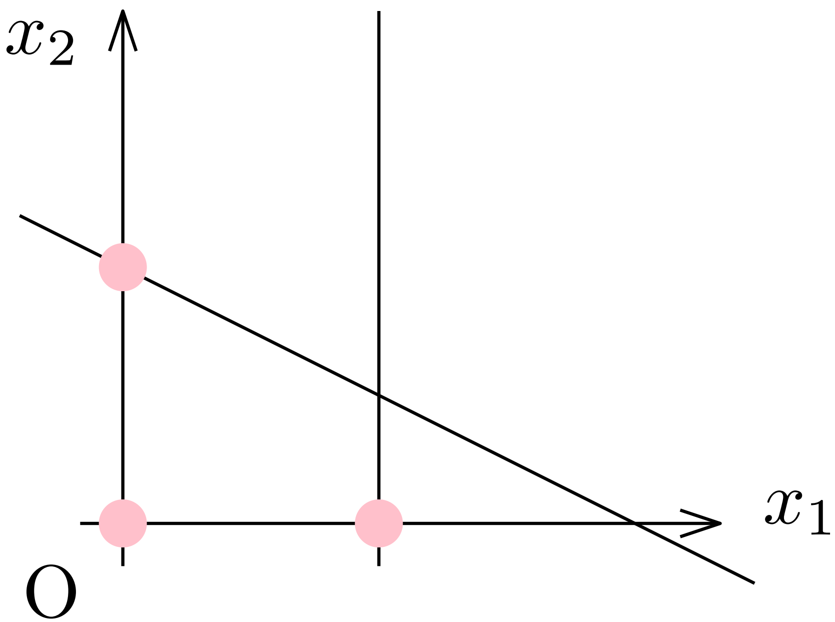
整数計画問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

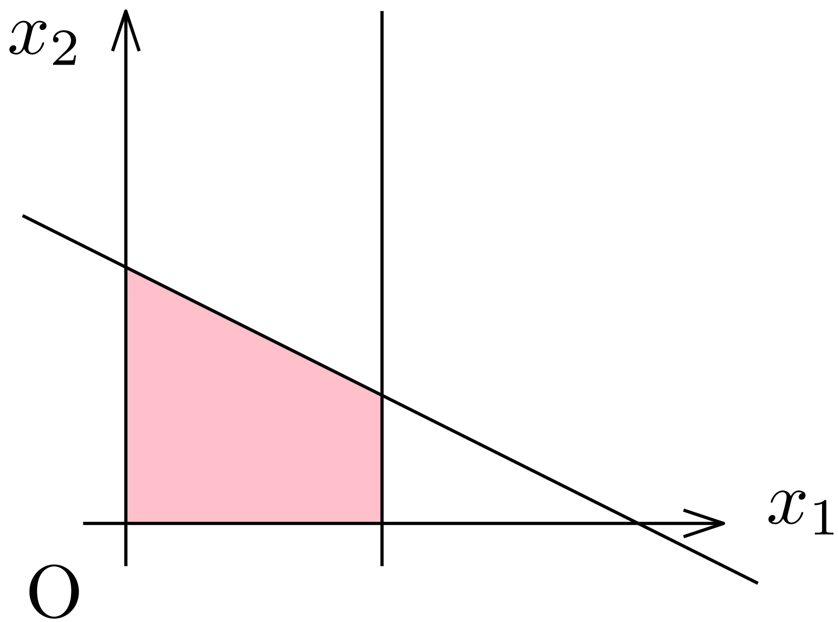
P:

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

R:

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$





緩和問題に求められる性質

整数計画問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

緩和問題に求められる性質

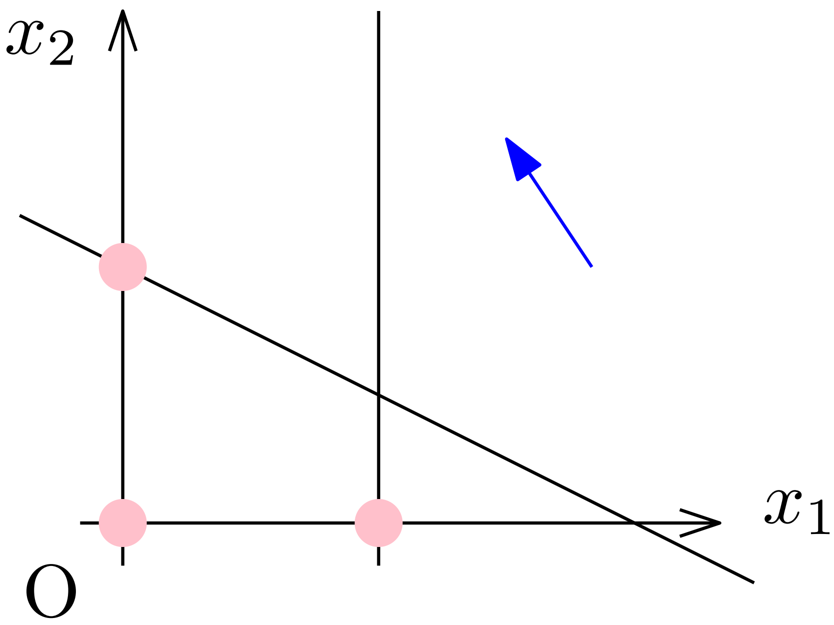
- 解きたい問題 P の許容領域 $\subseteq$ 緩和問題の許容領域
- 解きたい問題 P の最適値 $\ge$ 緩和問題の最適値
- 解きたい問題 P よりも 緩和問題の方が解きやすい

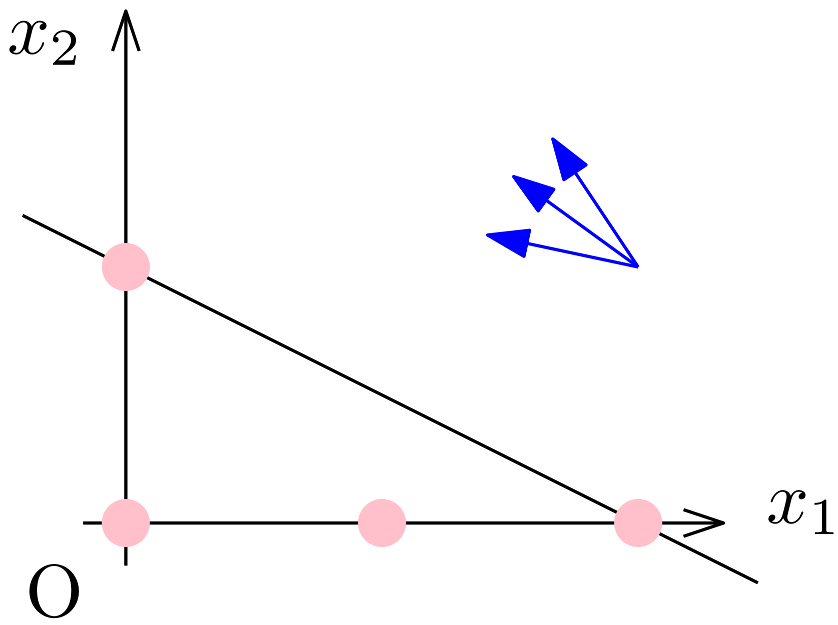
ラグランジュ緩和：例

整数計画問題 P ⟶ ラグランジュ緩和 L(λ)

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

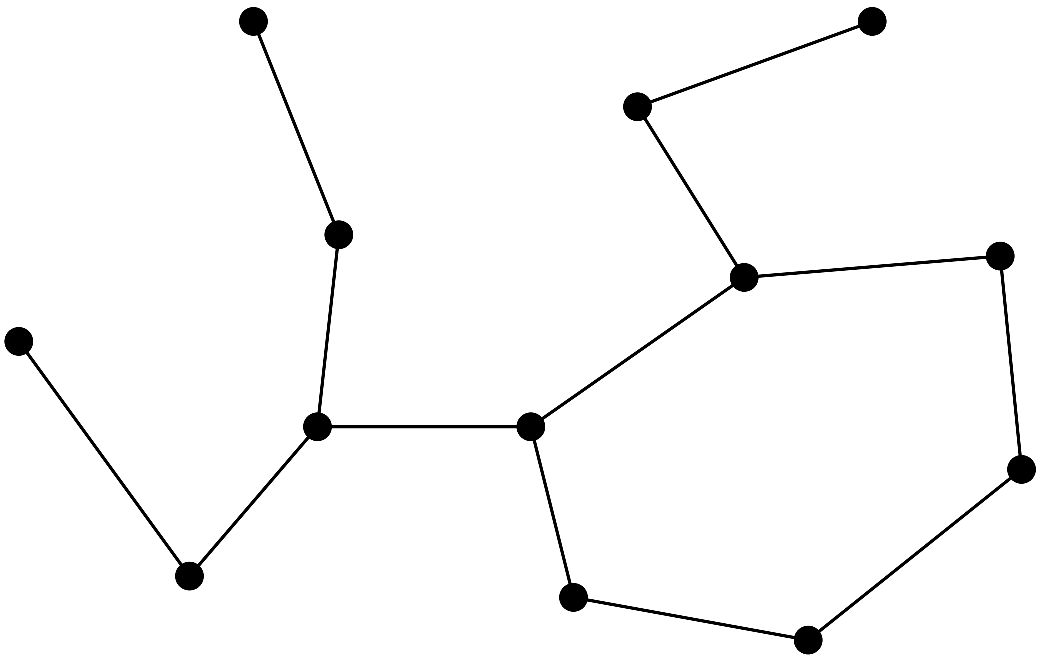
$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & 2x_1 - 3x_2 + \lambda(x_1 - 1) \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$





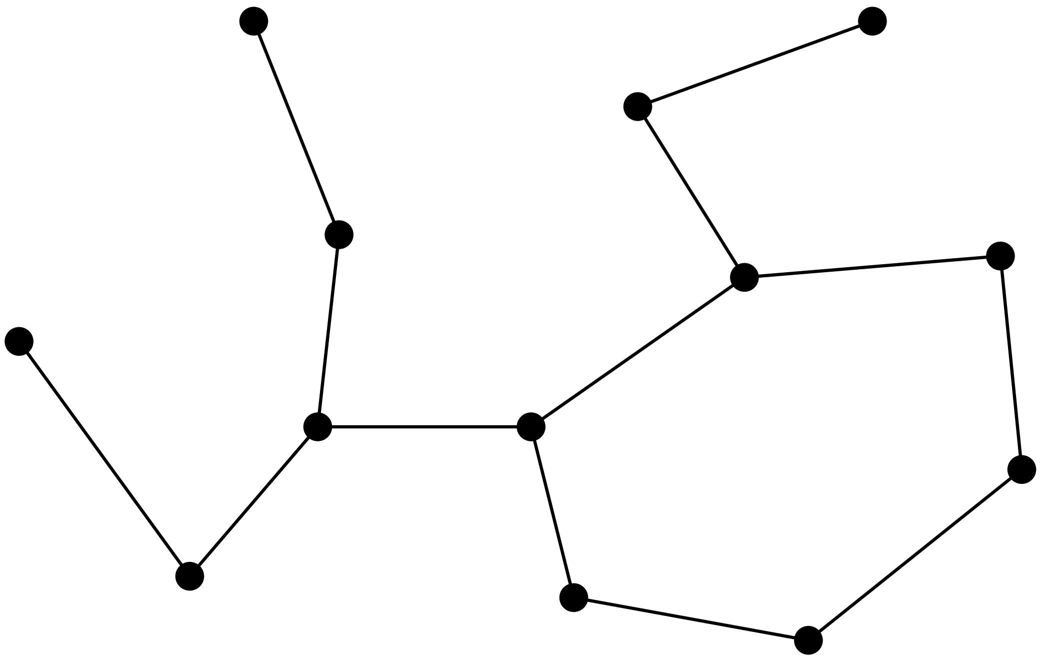
今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



ラグランジュ緩和：定義 (不等式標準形)

整数計画問題 P

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

変数： $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

定数： $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

ラグランジュ緩和：定義 (不等式標準形)

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

(Lagrangian relaxation)

変数： $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

定数： $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_2}$, $\underline{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}}$ 重要

直感

P における制約の非充足 $\longrightarrow$ L($\boldsymbol{\lambda}$) における罰則

ラグランジュ緩和：性質

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L$(\boldsymbol{\lambda})$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

性質

P と L$(\boldsymbol{\lambda})$ が最適解を持つ $\Rightarrow$ P の最適値 $\geq$ L$(\boldsymbol{\lambda})$ の最適値

ラグランジュ緩和：性質

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

性質

P と L($\boldsymbol{\lambda}$) が最適解を持つ $\Rightarrow$ P の最適値 $\geq$ L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値

証明： $\boldsymbol{x}^*$ を P の最適解とすると，$\boldsymbol{x}^*$ は L($\boldsymbol{\lambda}$) の許容解

$$\therefore \text{L}(\boldsymbol{\lambda}) \text{ の最適値} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}_{\geq \boldsymbol{0}}\underbrace{(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}^*)}_{\leq \boldsymbol{0}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \text{P の最適値} \quad \square$$

ラグランジュ緩和：性質 (続)

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

緩和問題に求められる性質

- 解きたい問題 P の許容領域 $\subseteq$ 緩和問題の許容領域
- 解きたい問題 P の最適値 $\geq$ 緩和問題の最適値
- 解きたい問題 P よりも 緩和問題の方が解きやすい

ラグランジュ双対問題

整数計画問題 P → ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値として得られる
P の最適値の下界として
最大のものを求める問題

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \geq 0} \left(\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \right)$$

(Lagrangian dual)

最強ラグランジュ緩和

整数計画問題 P $\longrightarrow$ 最強ラグランジュ緩和 L$(\boldsymbol{\lambda}^*)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + {\boldsymbol{\lambda}^*}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

L$(\boldsymbol{\lambda})$ の最適値として得られる
P の最適値の下界として
最大のものを求める問題

$\boldsymbol{\lambda}^*$ = LD の最適解

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \geq 0} \begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(Lagrangian dual)

ラグランジュ緩和：定義 (等式標準形)

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(Lagrangian relaxation)

変数： $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

定数： $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_2}$ ($\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}$ である必要はない)

ラグランジュ緩和：性質

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

性質

P と L($\boldsymbol{\lambda}$) が最適解を持つ $\Rightarrow$ P の最適値 $\geq$ L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値

証明： $\boldsymbol{x}^*$ を P の最適解とすると，$\boldsymbol{x}^*$ は L($\boldsymbol{\lambda}$) の許容解

$\therefore$ L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値 $\leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\underbrace{\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}^*}_{=\boldsymbol{0}}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* =$ P の最適値 $\quad\square$

ラグランジュ双対問題

整数計画問題 P $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値として得られる
P の最適値の下界として
最大のものを求める問題

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{x}}. & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

制約なし

(Lagrangian dual)

最強ラグランジュ緩和

整数計画問題 P $\longrightarrow$ 最強ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}^*$)

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値として得られる
P の最適値の下界として
最大のものを求める問題

$\boldsymbol{\lambda}^* =$ LD の最適解

ラグランジュ双対 LD

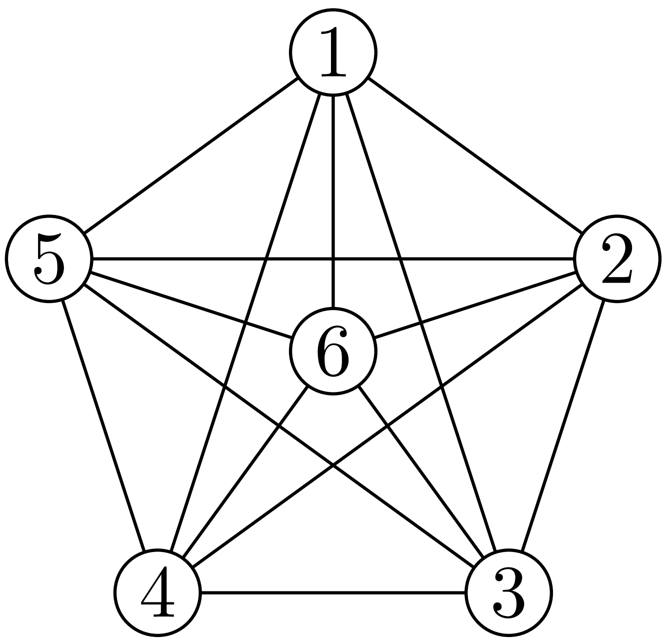
$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\ \left\{ \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}.\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \right.$$

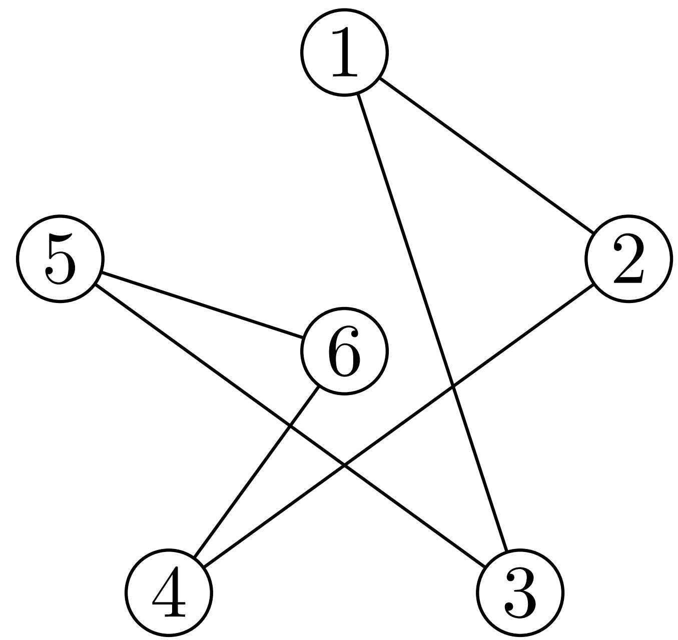
制約なし

(Lagrangian dual)

対称 TSP：グラフの問題として

対称巡回セールスマン問題もグラフの問題とみなす





無向グラフ $G = (V, E)$

$V =$ 都市集合

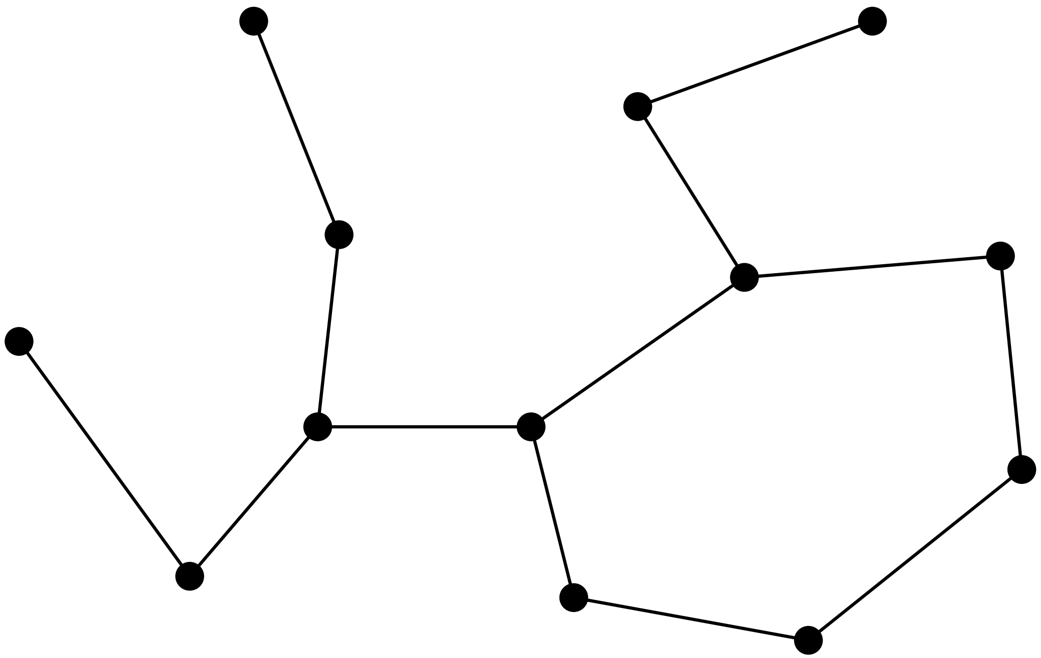
$E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$

すべての頂点を通る単一の閉路

ハミルトン閉路とも呼ばれる

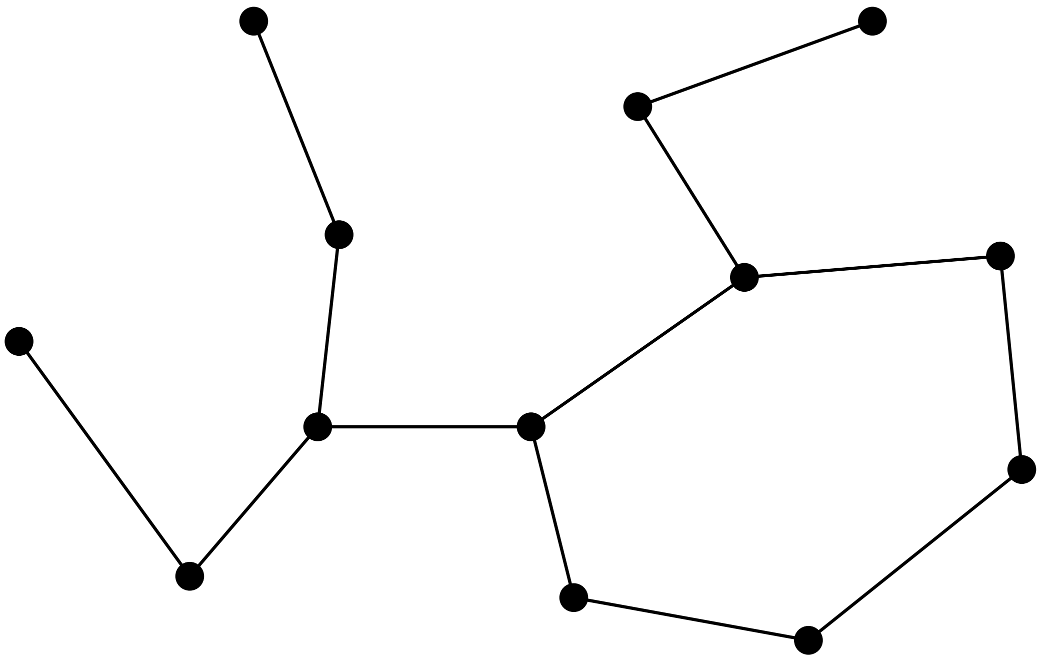
今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



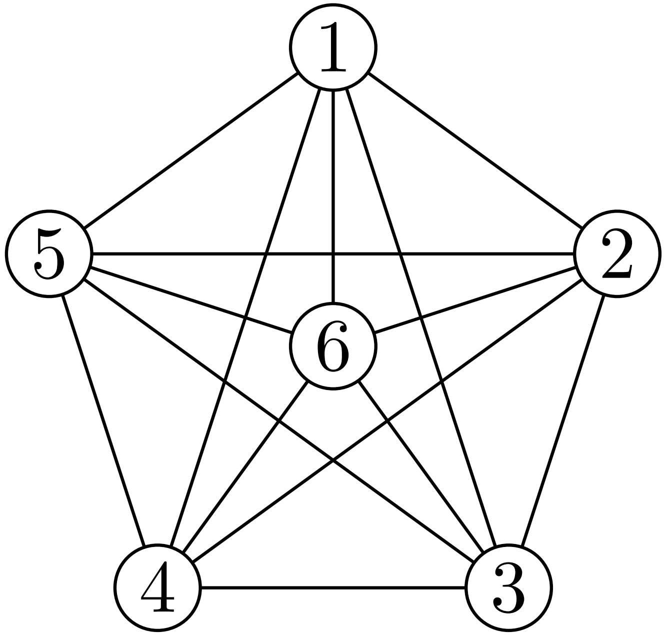
今日の内容

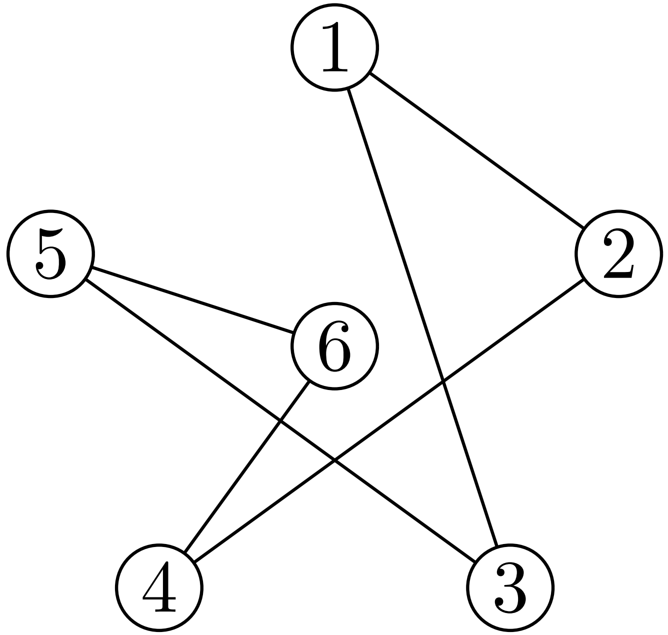
- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



対称 TSP：グラフの問題として

対称巡回セールスマン問題もグラフの問題とみなす





無向グラフ $G = (V, E)$

$V =$ 都市集合

$E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$

すべての頂点を通る単一の閉路

ハミルトン閉路とも呼ばれる

対称 TSP：01 整数計画モデル

Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

minimize $\displaystyle\sum_{e \in E} d(e) x_e$

subject to $\displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{\{i,j\}} = 2 \qquad \forall\, i \in V$

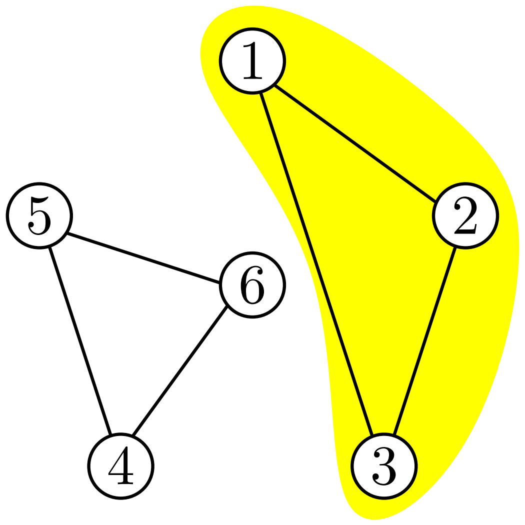
$\displaystyle\sum_{\{i,j\} \subseteq S} x_{\{i,j\}} \leq |S| - 1 \qquad \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\}$

$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e \in E$

部分巡回路除去制約

変数の総数 $= |E| = \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$

制約の総数 $= |V| + 2^{|V|} - 2$



対称 TSP：01 整数計画モデル

Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

minimize $\displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e$

subject to

$$\underline{\sum_{j\in V-\{i\}} x_{\{i,j\}} = 2} \qquad \forall\, i \in V$$

$$\underline{\sum_{\{i,j\}\subseteq S} x_{\{i,j\}} \le |S| - 1} \qquad \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\}$$

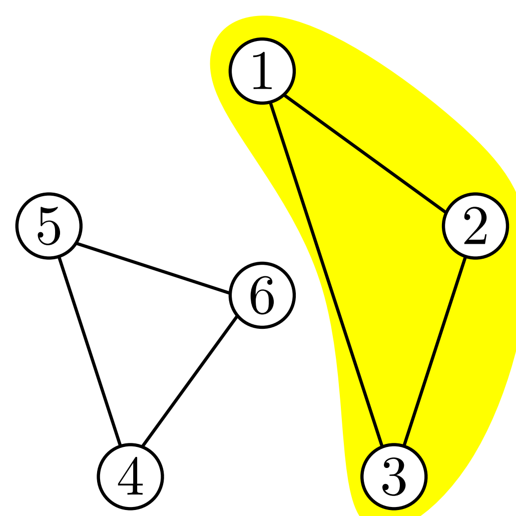
$$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e \in E$$

別の書き方

部分巡回路除去制約

$$\sum_{e\in \underline{\delta(i)}} x_e = 2$$

i を端点とする辺の集合



対称 TSP：線形計画緩和

解きたい問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2 & \forall\, i \\ & \displaystyle\sum_{e\subseteq S} x_e \le |S|-1 & \forall\, S \\ & x_e \in \{0,1\} & \forall\, e \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2 & \forall\, i \\ & \displaystyle\sum_{e\subseteq S} x_e \le |S|-1 & \forall\, S \\ & 0 \le x_e \le 1 & \forall\, e \end{array}$$

緩和問題の性質

- 解きたい問題 P の許容領域 $\subseteq$ 緩和問題の許容領域
- 解きたい問題 P の最適値 $\geq$ 緩和問題の最適値
- 解きたい問題 P よりも 緩和問題の方が解きやすい

ラグランジュ緩和と 1-木

この節の目標

巡回セールスマン問題のラグランジュ緩和として
よいものを作る

これは Held, Karp ('70, '71) によるアイディア

よさ の基準

- 得られる下界が大きい
- 効率よく解ける
- 運がよいと,
  巡回路が得られる

解きたい問題 P

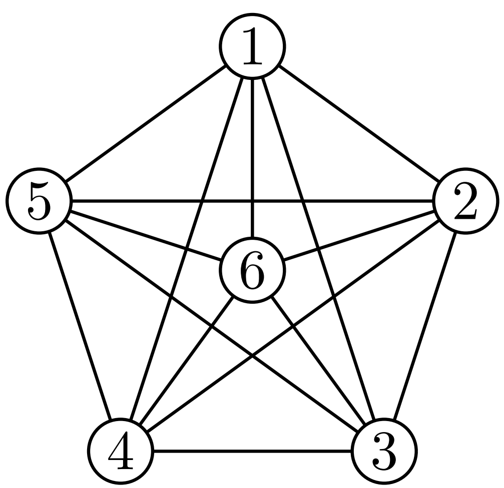
$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{e \in E} d(e) x_e & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 & \forall\, i \\
& \displaystyle\sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1 & \forall\, S \\
& x_e \in \{0, 1\} & \forall\, e
\end{array}
$$

問題の書き換え

解きたい問題 P $\longrightarrow$ 許容領域が同じ問題 P

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 && \forall\, i \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \le |S| - 1 && \forall\, S \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall\, e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 && \forall\, i \neq 1 \\
& \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \le |S| - 1 && \forall\, S \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall\, e
\end{aligned}
$$



無向グラフ $G = (V, E)$

制約の除去

許容領域が同じ問題 P $\longrightarrow$ 制約を除去した問題 P'

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 && \forall\, i \neq 1 \\
& \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1 && \forall\, S \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall\, e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 && \forall\, i \neq 1 \\
& \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1 && \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall\, e
\end{aligned}
$$

P の最適値 $\geq$ P' の最適値

ラグランジュ緩和

制約を除去した問題 P' $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e & \\
\text{s.t.} & \boxed{\displaystyle\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2} & \forall\, i \neq 1 \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(1)} x_e = 2 & \\
& \displaystyle\sum_{e\in E} x_e = |V| & \\
& \displaystyle\sum_{e\subseteq S} x_e \leq |S| - 1 & \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0,1\} & \forall\, e
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e + \sum_{i\neq 1} \lambda_i \left(\boxed{2 - \sum_{e\in\delta(i)} x_e} \right) & \\
\text{s.t.} & & \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(1)} x_e = 2 & \\
& \displaystyle\sum_{e\in E} x_e = |V| & \\
& \displaystyle\sum_{e\subseteq S} x_e \leq |S| - 1 & \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0,1\} & \forall\, e
\end{array}
$$

P' の最適値 $\geq$ L($\boldsymbol{\lambda}$) の最適値

ラグランジュ緩和：何を求めているか？

ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

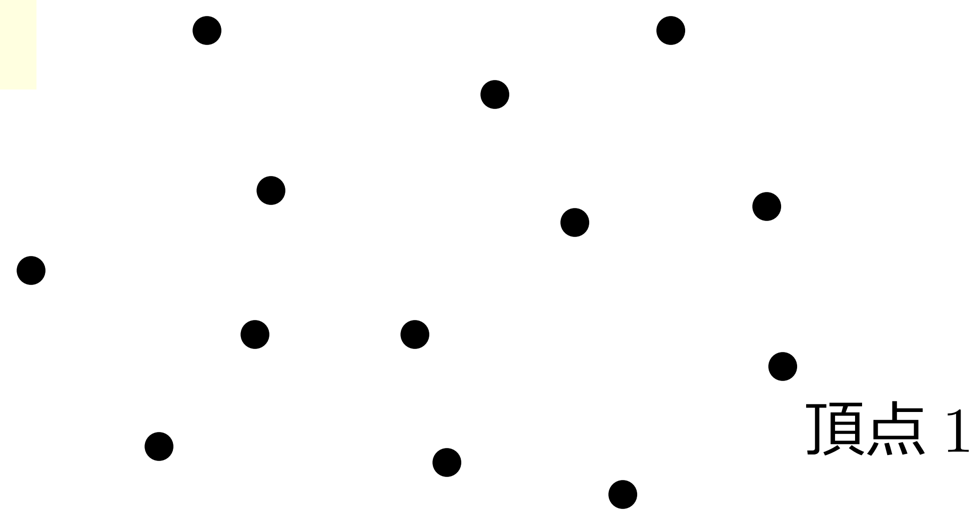
$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \left(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e \right) = \sum_{e \in E} \underbrace{\left(d(e) - \sum_{\substack{i \neq 1: \\ e \in \delta(i)}} \lambda_i \right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ } =: d'(e)} x_e + \underbrace{2 \sum_{i \neq 1} \lambda_i}_{\text{定数}} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1 \qquad \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e
\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和：何を求めているか？

ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} d(e) x_e + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \left(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& \sum_{e \in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1 \qquad \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{e \in E} \underbrace{\left(d(e) - \sum_{\substack{i \neq 1 : \\ e \in \delta(i)}} \lambda_i \right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ} \;=:\, d'(e)} x_e + \underbrace{2 \sum_{i \neq 1} \lambda_i}_{\text{定数}}
$$

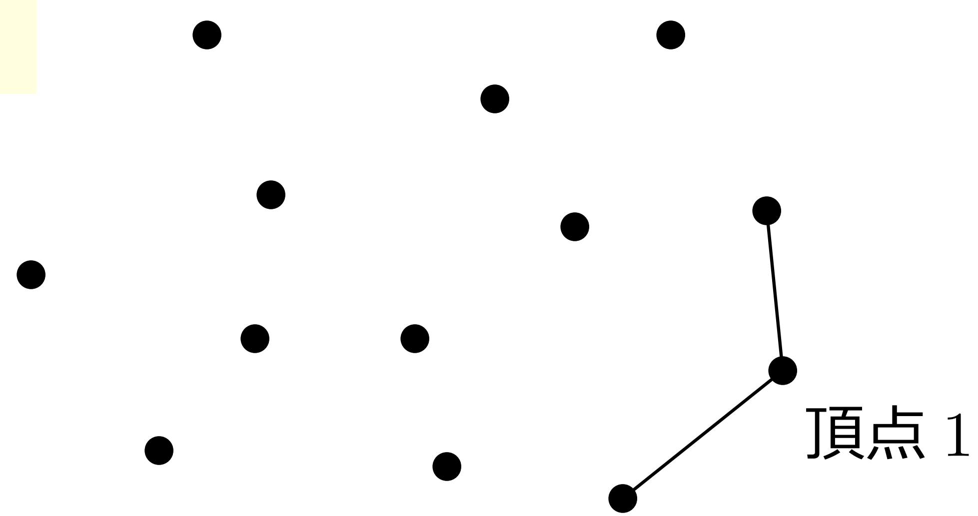


ラグランジュ緩和：何を求めているか？

ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{e\in E} d(e)x_e + \sum_{i\neq 1}\lambda_i\left(2 - \sum_{e\in\delta(i)} x_e\right) = \sum_{e\in E}\underbrace{\left(d(e) - \sum_{\substack{i\neq 1:\\ e\in\delta(i)}}\lambda_i\right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ } =: d'(e)} x_e + \underbrace{2\sum_{i\neq 1}\lambda_i}_{\text{定数}} \\
\text{s.t.}\quad & \boxed{\sum_{e\in\delta(1)} x_e = 2} \\
& \sum_{e\in E} x_e = |V| \\
& \sum_{e\subseteq S} x_e \le |S| - 1 \qquad \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0,1\} \qquad \forall\, e
\end{aligned}
$$

頂点 1 に接続する辺の数 $= 2$



ラグランジュ緩和：何を求めているか？

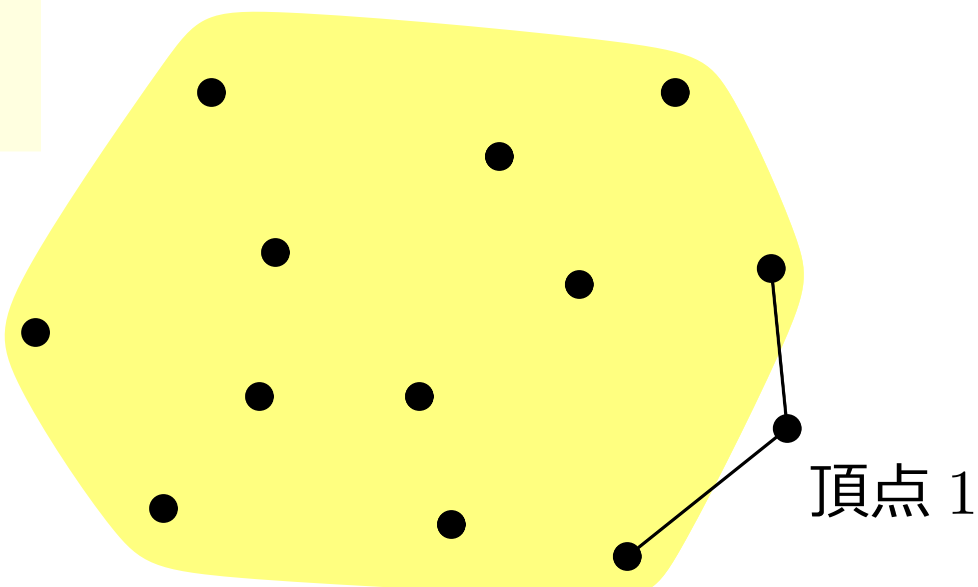
ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \sum_{e\in E} d(e)x_e + \sum_{i\neq 1}\lambda_i\left(2-\sum_{e\in\delta(i)} x_e\right) = \sum_{e\in E}\underbrace{\left(d(e)-\sum_{\substack{i\neq 1:\\ e\in\delta(i)}}\lambda_i\right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ } =:\, d'(e)} x_e + 2\underbrace{\sum_{i\neq 1}\lambda_i}_{\text{定数}} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{e\in\delta(1)} x_e = 2 \\
& \boxed{\sum_{e\in E} x_e = |V|} \\
& \sum_{e\subseteq S} x_e \leq |S|-1 \qquad \forall\, S \not\ni 1 \\
& x_e \in \{0,1\} \qquad \forall\, e
\end{aligned}
$$

頂点 1 に接続する辺の数 $= 2$

辺の総数 $= |V|$

この中から $|V|-2$ 個の辺



ラグランジュ緩和：何を求めているか？

ラグランジュ緩和 $\mathsf{L}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\text{min.} \quad \sum_{e \in E} d(e) x_e + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \left(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e \right) = \sum_{e \in E} \underbrace{\left(d(e) - \sum_{\substack{i \neq 1 : \\ e \in \delta(i)}} \lambda_i \right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ} =: d'(e)} x_e + \underbrace{2 \sum_{i \neq 1} \lambda_i}_{\text{定数}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V|$$

$$\boxed{\sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1} \qquad \forall\, S \not\ni 1$$

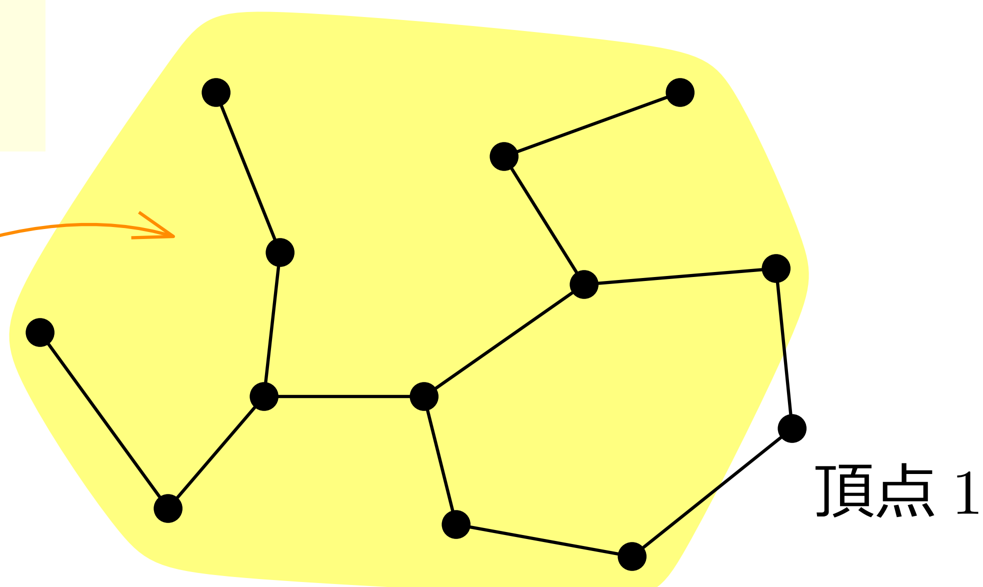
$$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e$$

頂点 1 に接続する辺の数 $= 2$

辺の総数 $= |V|$

ここには閉路がない

この中から $|V| - 2$ 個の辺



ラグランジュ緩和：何を求めているか？

ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\text{min.} \quad \sum_{e \in E} d(e) x_e + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \left(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e \right) = \sum_{e \in E} \underbrace{\left(d(e) - \sum_{\substack{i \neq 1 : \\ e \in \delta(i)}} \lambda_i \right)}_{\text{辺 } e \text{ の新しい長さ} =: d'(e)} x_e + \underbrace{2 \sum_{i \neq 1} \lambda_i}_{\text{定数}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V|$$

$$\boxed{\sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1} \qquad \forall\, S \not\ni 1$$

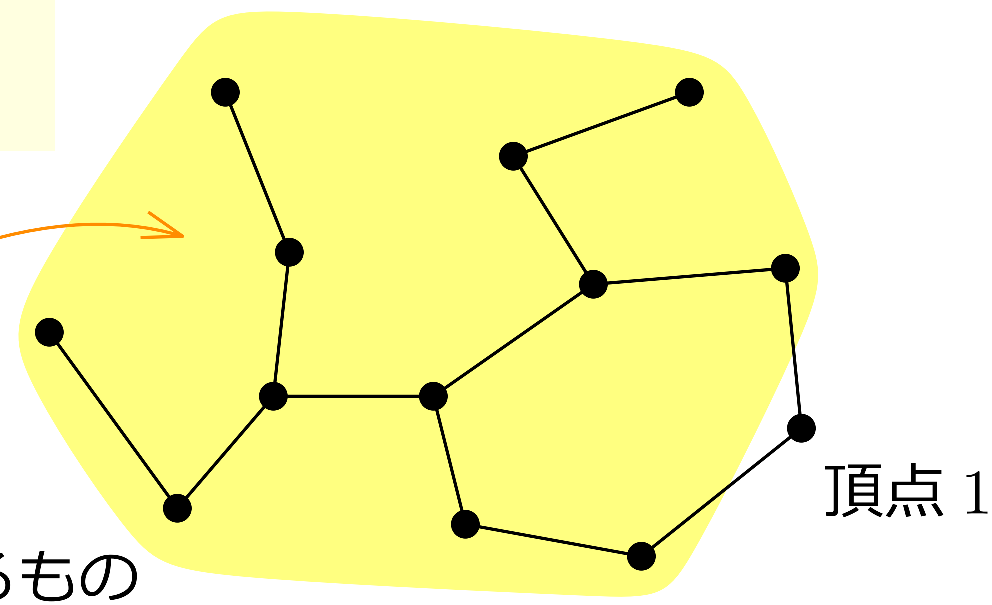
$$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e$$

この中から $|V| - 2$ 個の辺

頂点 1 に接続する辺の数 $= 2$

辺の総数 $= |V|$

ここには閉路がない



その中で，$d'(e)$ の和が最小であるもの

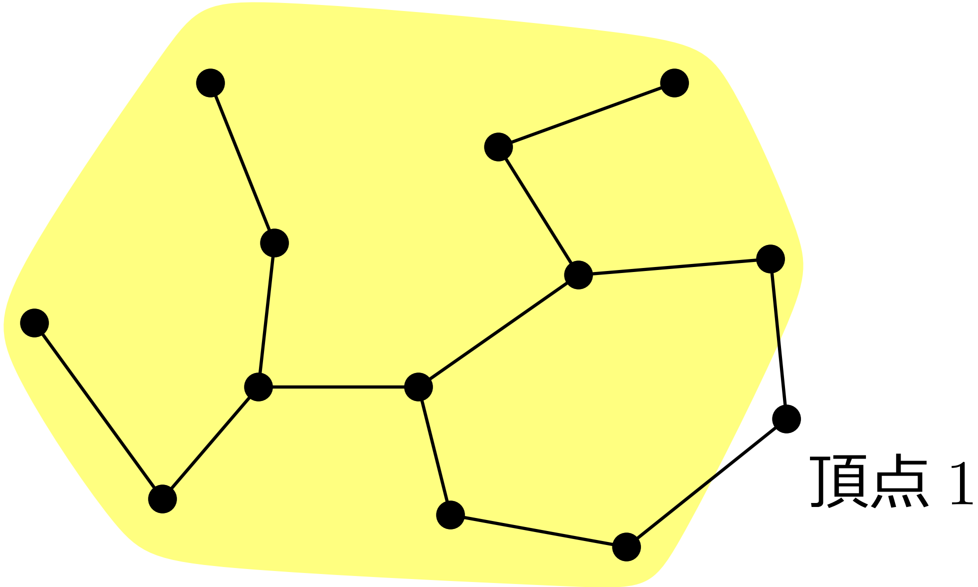
1-木

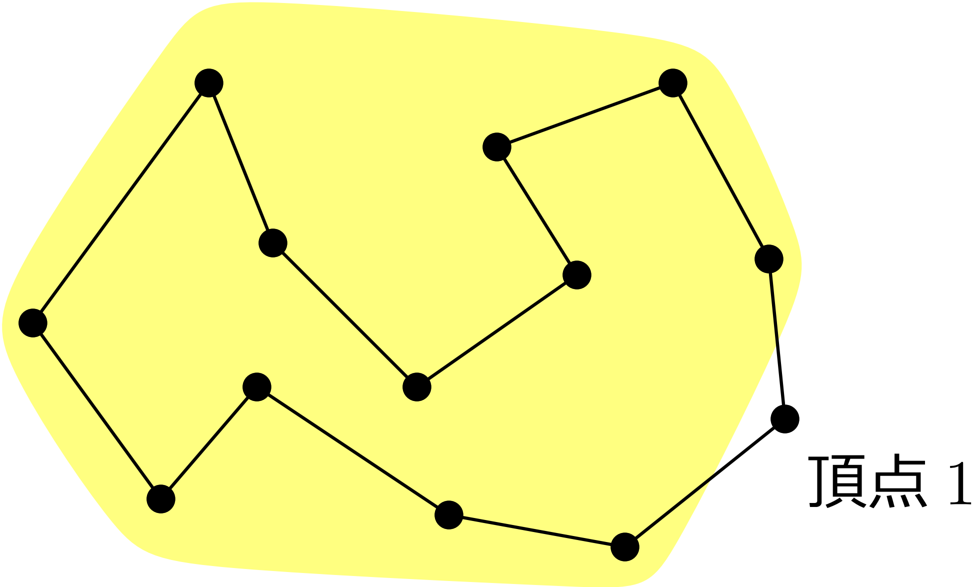
無向グラフ $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$

定義：1-木 (1-tree) (Held, Karp '70, '71)

G の **1-木** とは，$\{2, 3, \ldots, n\}$ 上の木に，
頂点 1 に接続する 2 辺を付け加えたもの

- 今作ったラグランジュ緩和の許容解は 1-木 (逆も真)
- 巡回路は 1-木





1-木

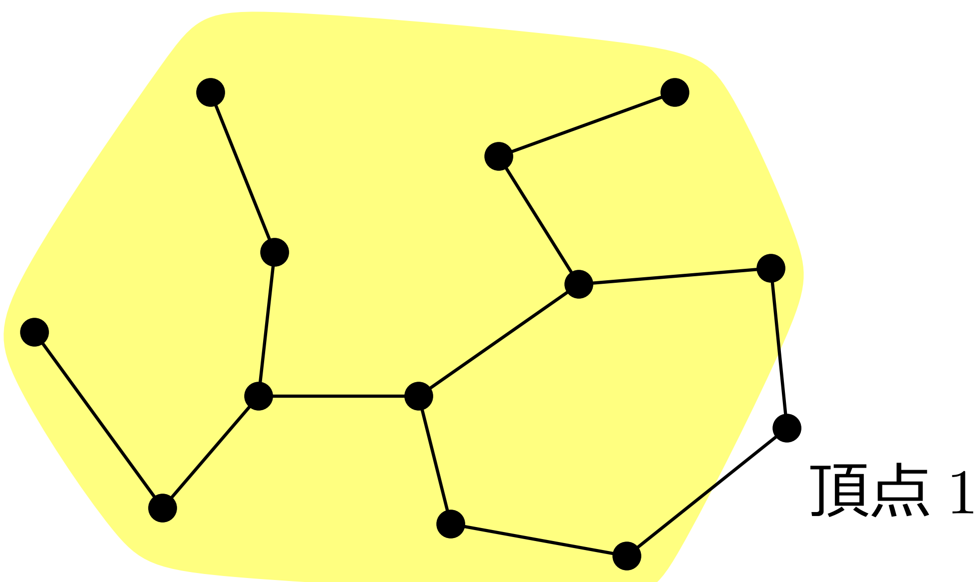
無向グラフ $G = (V, E)$，$V = \{1, 2, \ldots, n\}$

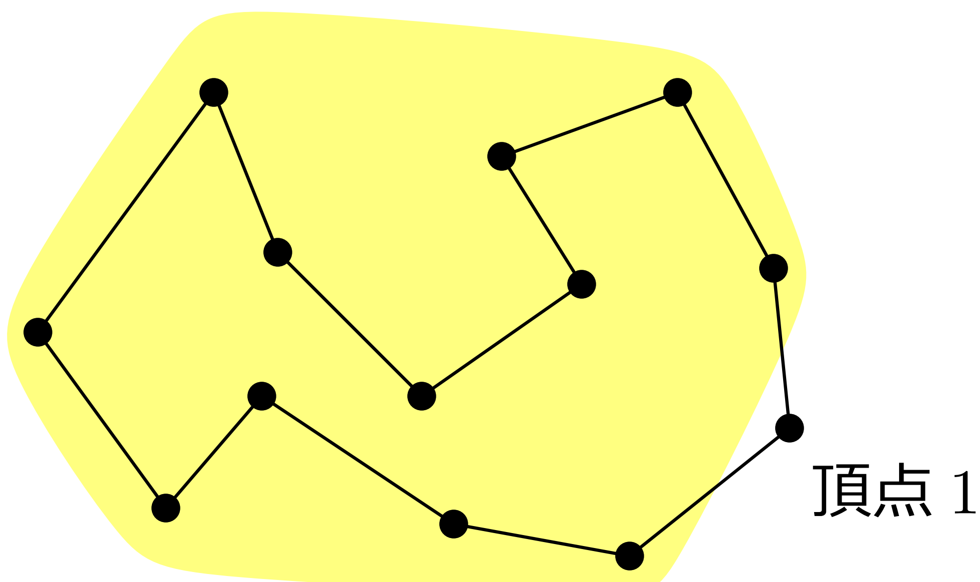
定義：1-木 (1-tree) (Held, Karp '70, '71)

G の 1-**木** とは，$\{2, 3, \ldots, n\}$ 上の木に，
頂点 1 に接続する 2 辺を付け加えたもの

- 今作ったラグランジュ緩和の許容解は 1-木 (逆も真)
- 巡回路は 1-木

欲しいものは，最小重み 1-木





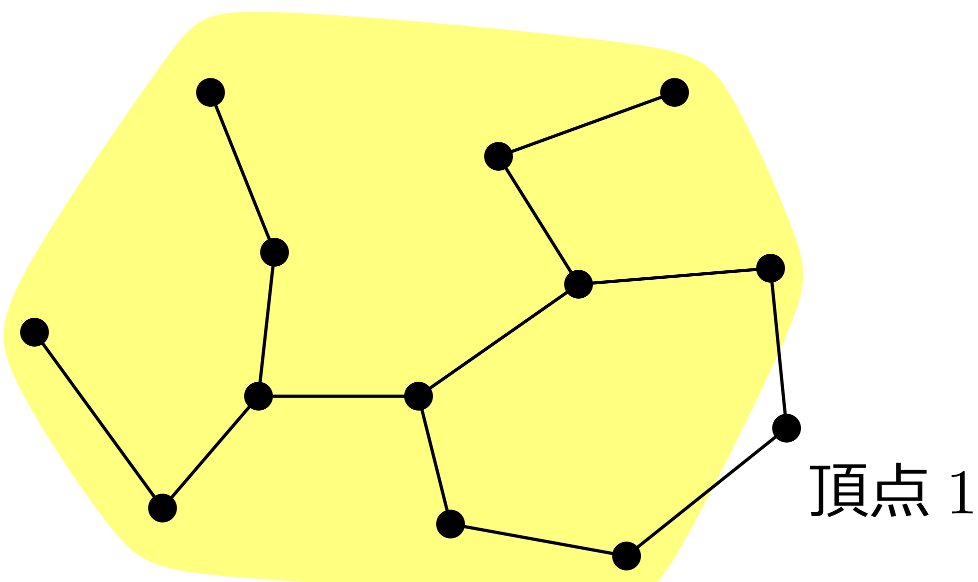
最小重み 1-木問題のアルゴリズム

最小重み 1-木問題のアルゴリズム

1. $\{2, 3, \ldots, n\}$ 上の最小重み全域木を求める
2. 頂点 1 に接続する辺の中で重みの小さい方から 2 辺を求める
3. それらの合併を出力する

Kruskal 法などで効率よく実行できる

これは多項式時間アルゴリズム



したがって，
いま作ったラグランジュ緩和は
効率よく解ける

最強ラグランジュ緩和を求めたい

ラグランジュ緩和 $\mathsf{L}(\boldsymbol{\lambda})$ $\xrightarrow{\hspace{4em}}$ 最適解 (最小重み 1-木)

効率よく
計算できる

欲しいもの

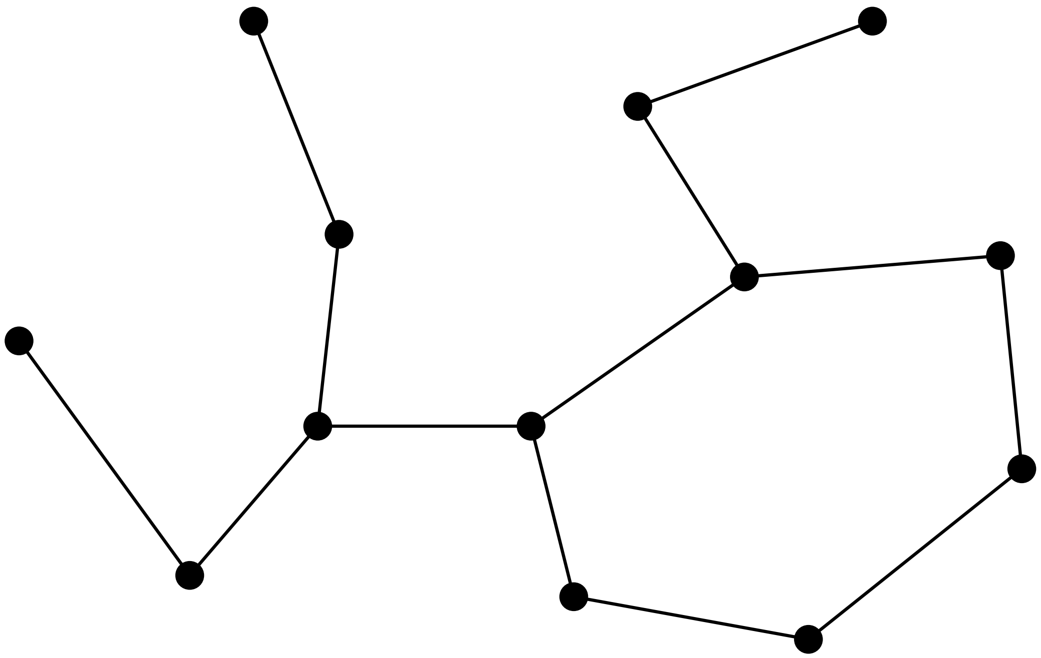
最強ラグランジュ緩和 $\mathsf{L}(\boldsymbol{\lambda}^*)$

$\boldsymbol{\lambda}^* =$ ラグランジュ緩和 $\mathsf{L}(\boldsymbol{\lambda})$ の最適値を最大にする $\boldsymbol{\lambda}$

どのように $\boldsymbol{\lambda}^*$ を求めるのか → 次回 (劣勾配法)

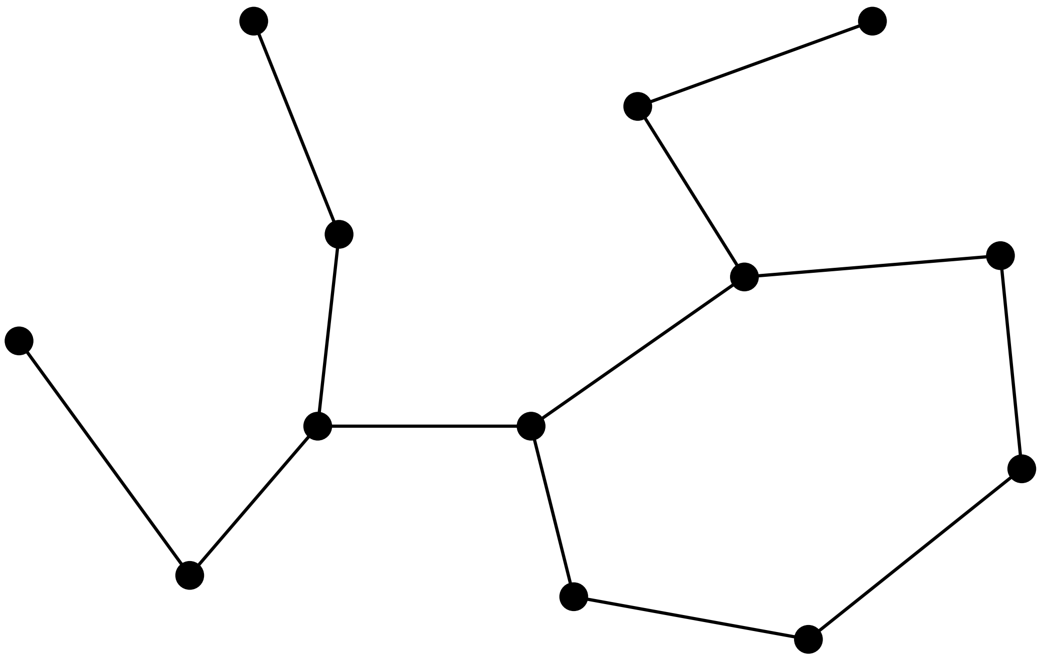
今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



今日の内容

- ラグランジュ緩和：例
- ラグランジュ緩和：一般論
- 巡回セールスマン問題と 1-木
- 線形計画問題と最強ラグランジュ緩和



線形計画問題のラグランジュ緩和

ラグランジュ緩和は 数理最適化問題一般に対して 適用できる

線形計画問題 P (等式標準形) $\longrightarrow$ ラグランジュ緩和 L($\boldsymbol{\lambda}$)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right]$$

制約なし

ラグランジュ双対を詳しく眺める

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right.$$

$$= \underline{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i x_i$$

与えられた $\boldsymbol{\lambda}$ に対して，これを最小化する問題を解くには

- $(\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i < 0$ ならば，$x_i \to \infty$ とすることで，目的関数値は非有界
- $(\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i \geq 0$ ならば，$x_i = 0$ とすればよい

ラグランジュ双対を詳しく眺める

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \quad = \underline{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i x_i$$

与えられた $\boldsymbol{\lambda}$ に対して，<u>これ</u>を最小化する問題を解くには

- $(\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i < 0$ ならば，$x_i \to \infty$ とすることで，目的関数値は非有界
- $(\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i \geq 0$ ならば，$x_i = 0$ とすればよい

つまり，LD は次の問題と等価

$$\begin{array}{ll} \max. & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c} \end{array} \quad \longleftarrow \quad \text{線形計画問題 P の双対問題}$$

最強ラグランジュ緩和と双対問題

ラグランジュ双対 LD

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

双対問題 D

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

いままでの議論をまとめると，次の性質が得られる

性質

$\boldsymbol{\lambda}^*$ が LD の最適解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lambda}^*$ が D の最適解

他にも，ラグランジュ緩和／ラグランジュ双対は
数理最適化で重要な役割を果たす

次回予告

次回の内容

最強ラグランジュ緩和の求め方 (アルゴリズム)
- 劣勾配法