離散最適化基礎論

第 11 回

列生成法

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 12 月 20 日

最終更新：2022 年 12 月 20 日　13:19

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

* 休み (国内出張) (12/27)
* 休み (冬季休業) (1/3)

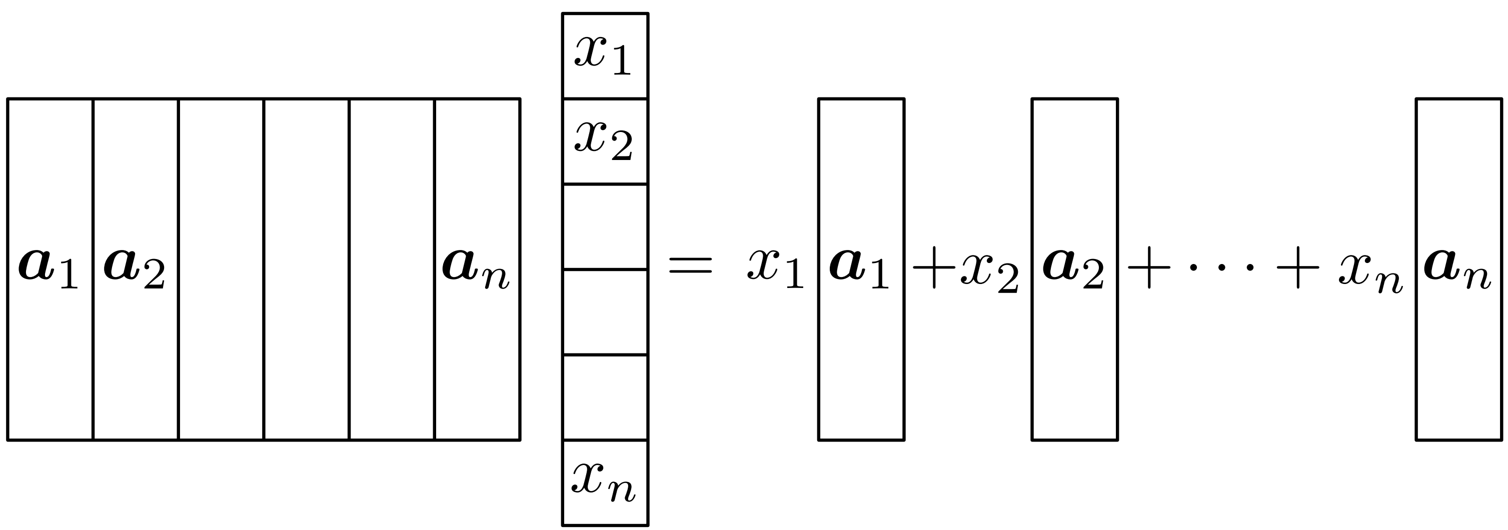
12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

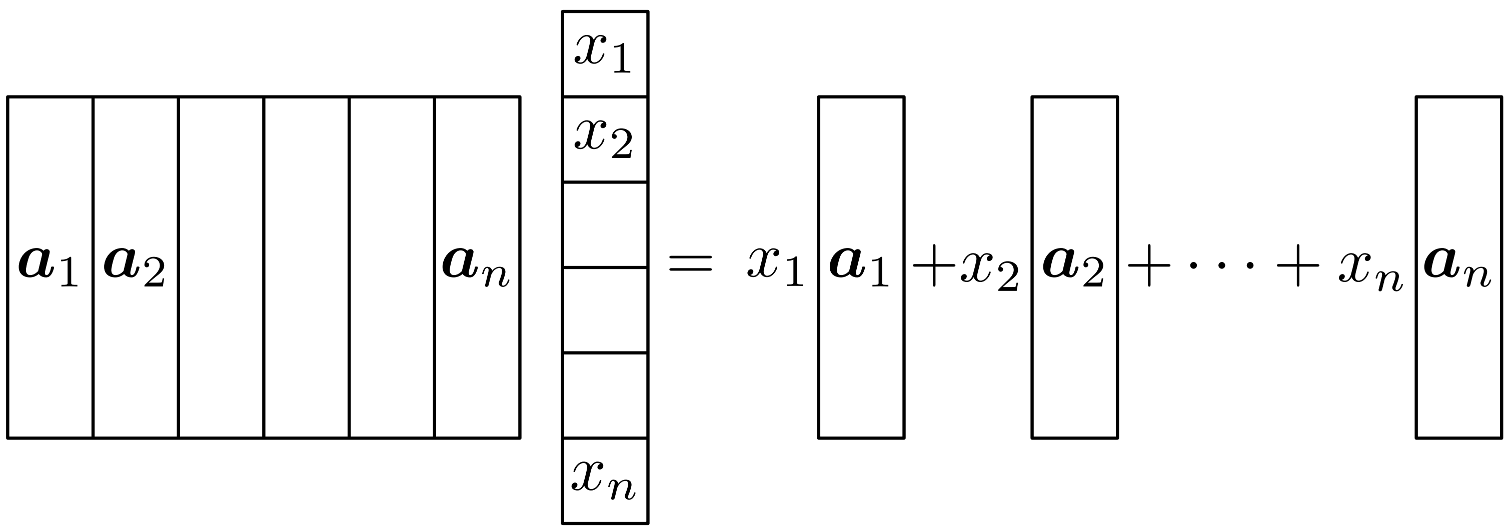
今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



(復習) ビンパッキング問題：例

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

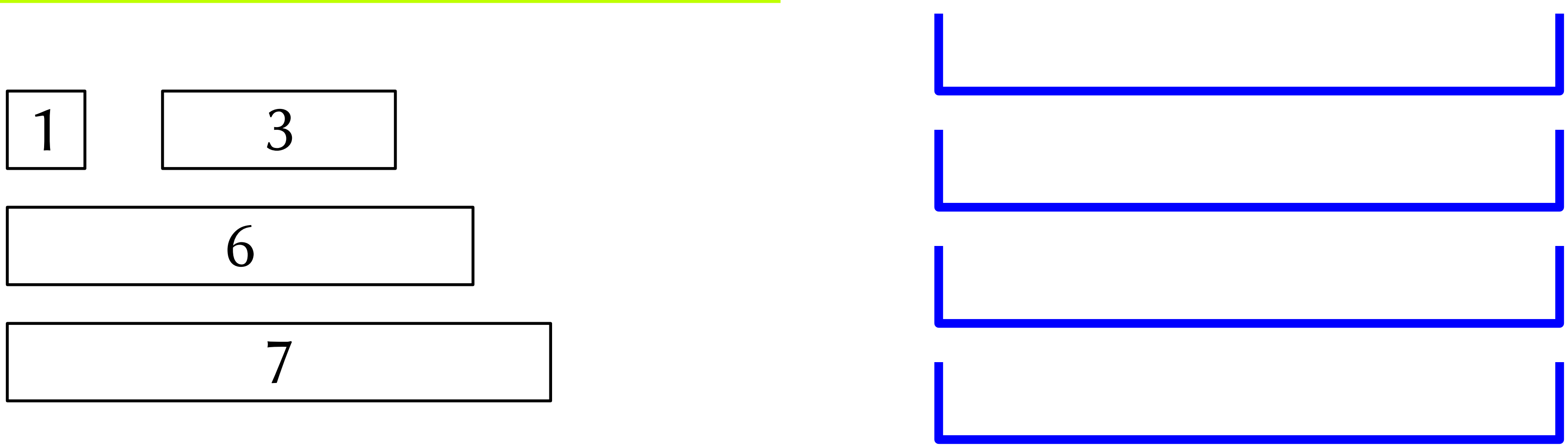
bin ≠ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

(復習) ビンパッキング問題：例

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

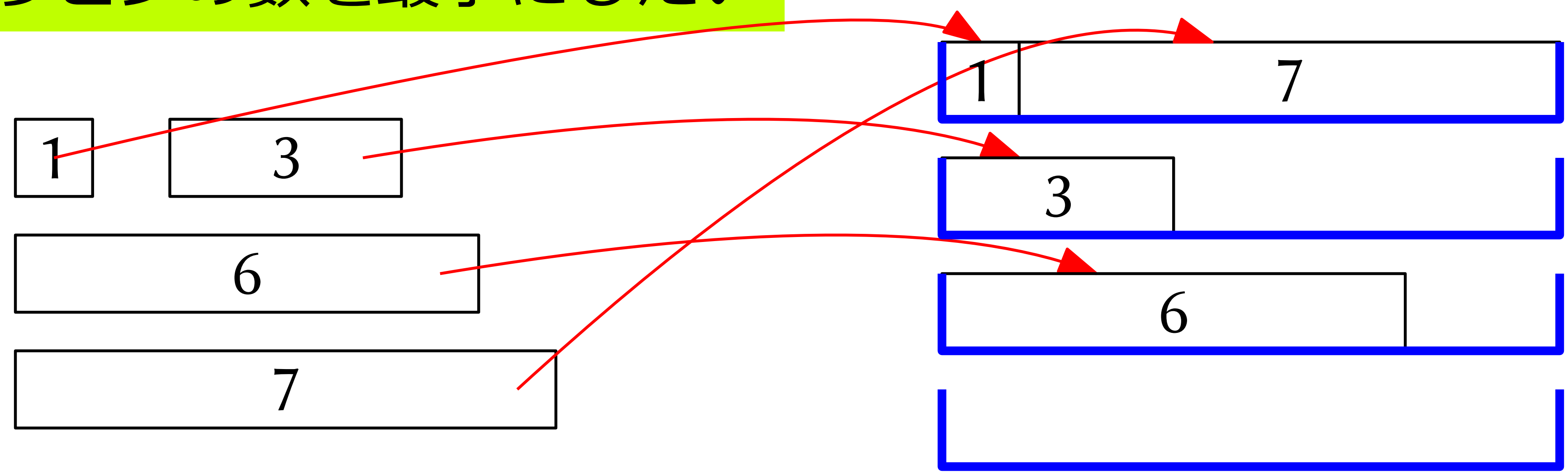
bin ≠ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

(復習) ビンパッキング問題：定義

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

入力

- アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各アイテム i の大きさ $w_i \geq 0$
- ビンの容量 $B \geq 0$

許容解

アイテム集合 N の分割 $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$

- ただし，各 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，

$$\sum_{i \in N_j} w_i \leq B$$

目的

ビンの数 k の最小化

重要な点

解くべき問題の定義を明確にすること

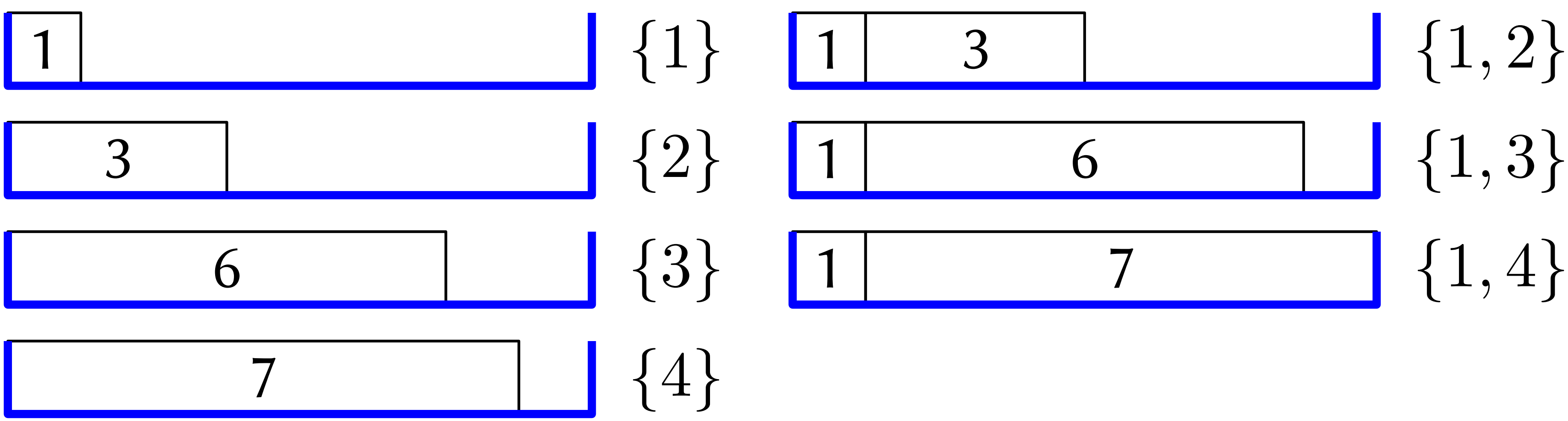
(復習) ビンパッキング問題：準備

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$



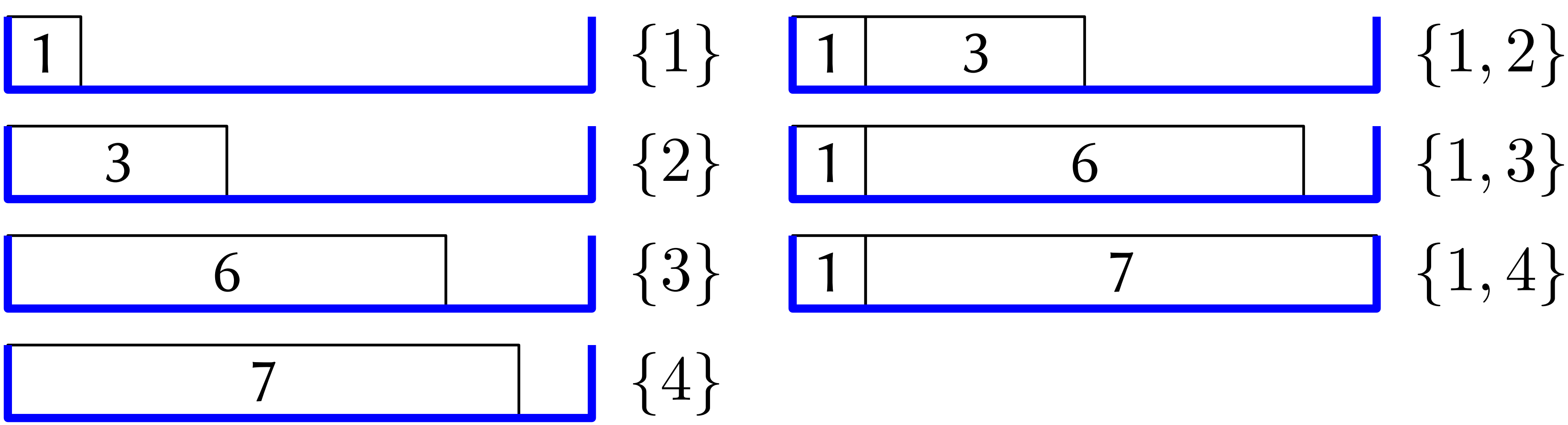
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$

定義：$P \subseteq N$ がパターン $\Leftrightarrow \sum_{i \in P} w_i \leq B$



(復習) ビンパッキング問題：直感

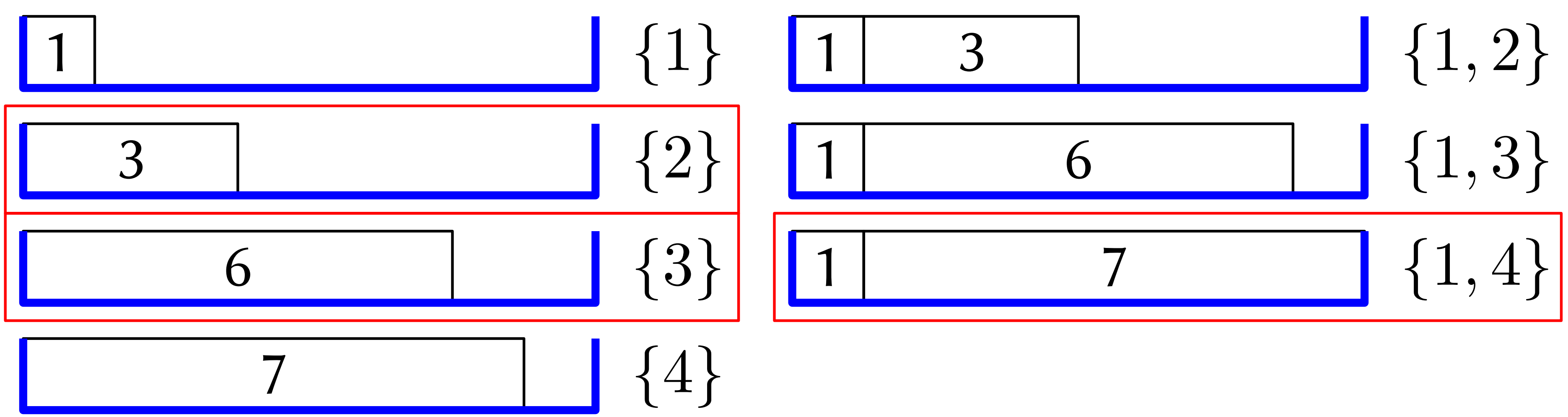
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$

パターンを選択して，許容解を構成する



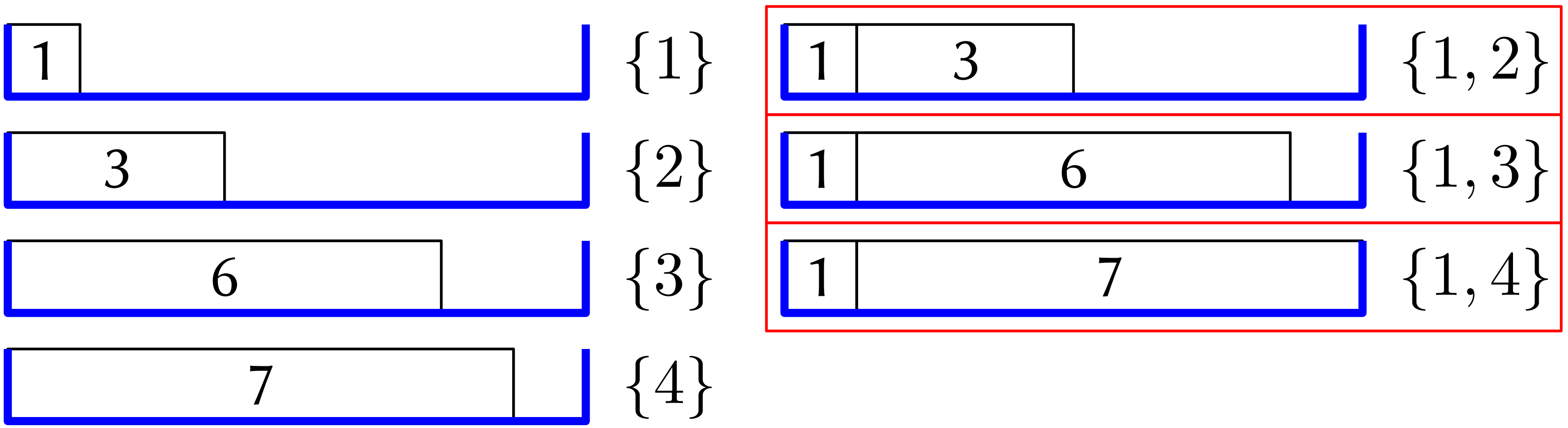
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$

パターンを選択して，許容解を構成する

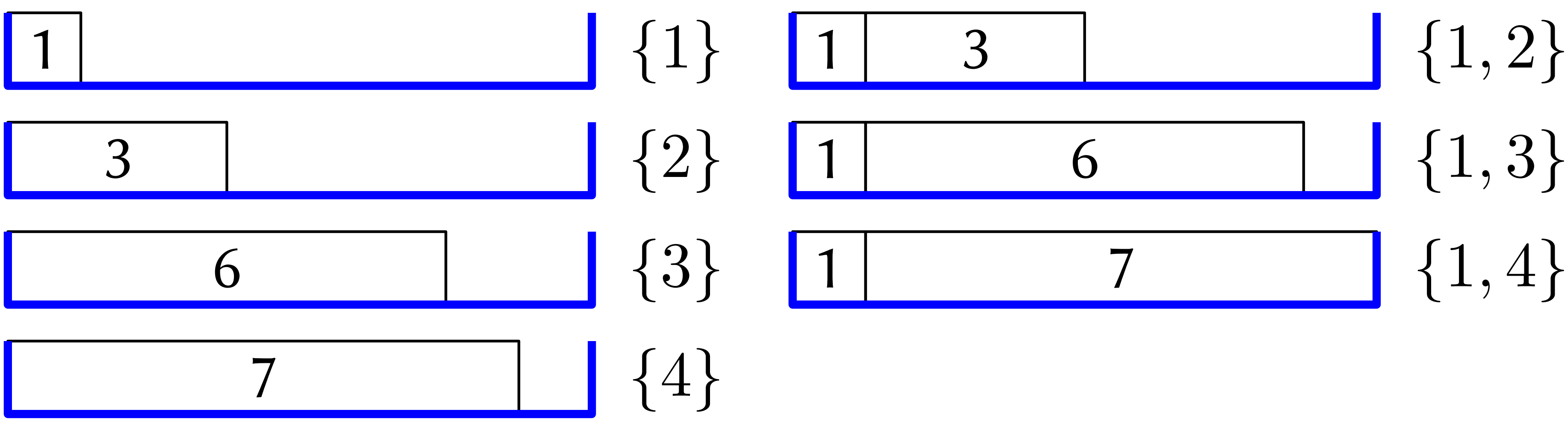


(復習) ビンパッキング問題：変数

各パターン $P \in \mathcal{P}$ に対して，変数 $x_P \in \{0,1\}$ を使用

解釈：

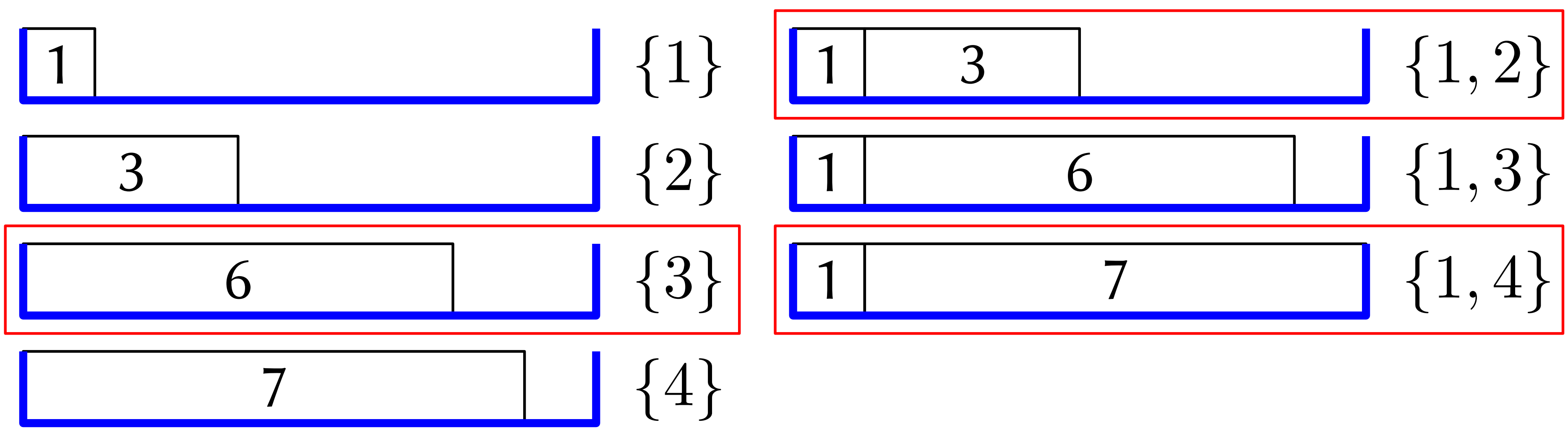
$$x_P = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{パターン } P \text{ を使用する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{パターン } P \text{ を使用しない} \end{cases}$$



(復習) ビンパッキング問題：目的

使用するパターン数の最小化 $=$ 使用するビンの総数の最小化

$$\text{minimize} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P$$

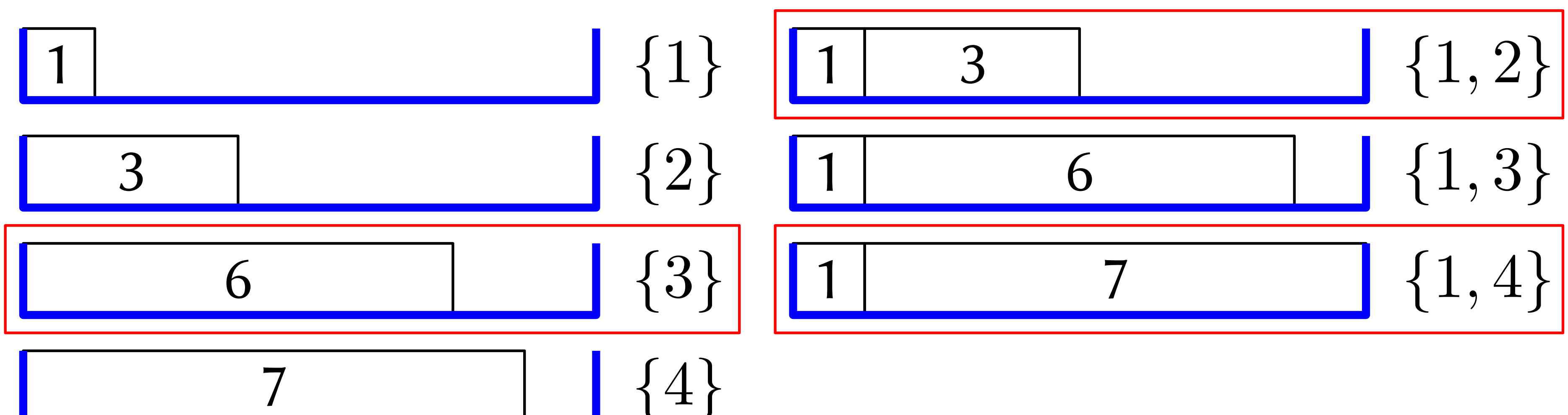


(復習) ビンパッキング問題：制約

各アイテムは使用されるパターンのどれかに含まれる

$$\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \geq 1 \qquad \forall\, i \in N$$

アイテム i を含み，使用されるパターンの総数



(復習) 01 整数計画モデル

Gilmore, Gomory ('61)

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}\,:\, i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\ & x_P \in \{0, 1\} & \forall\, P \in \mathcal{P} \end{array}$$

変数の総数 $= |\mathcal{P}| \longleftarrow |N|$ に関して指数関数的に大きくなりうる

制約の総数 $= |N|$

(復習) ビンパッキング問題：課題

課題

ビンパッキング問題の整数計画モデルには
変数が膨大に存在

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\,:\, i \in P} x_P \geq 1 && \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0, 1\} && \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

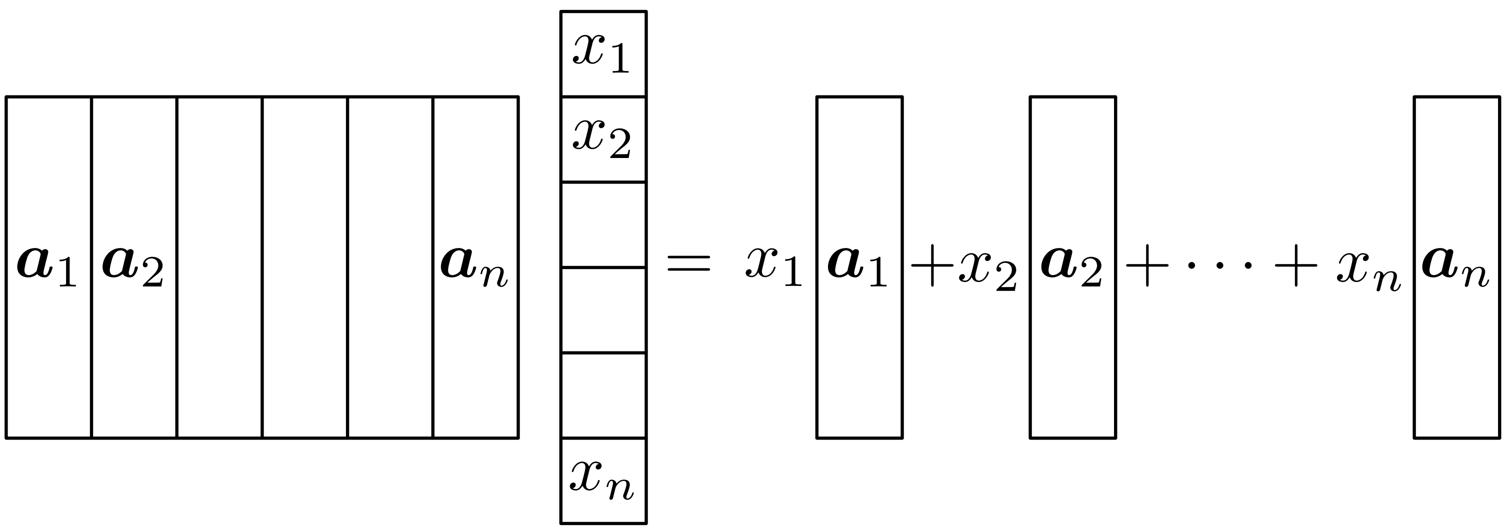
解決法

変数を **アルゴリズムの実行の中で** 追加していく

$\rightsquigarrow$ 第 11 回講義の内容
(列生成法)

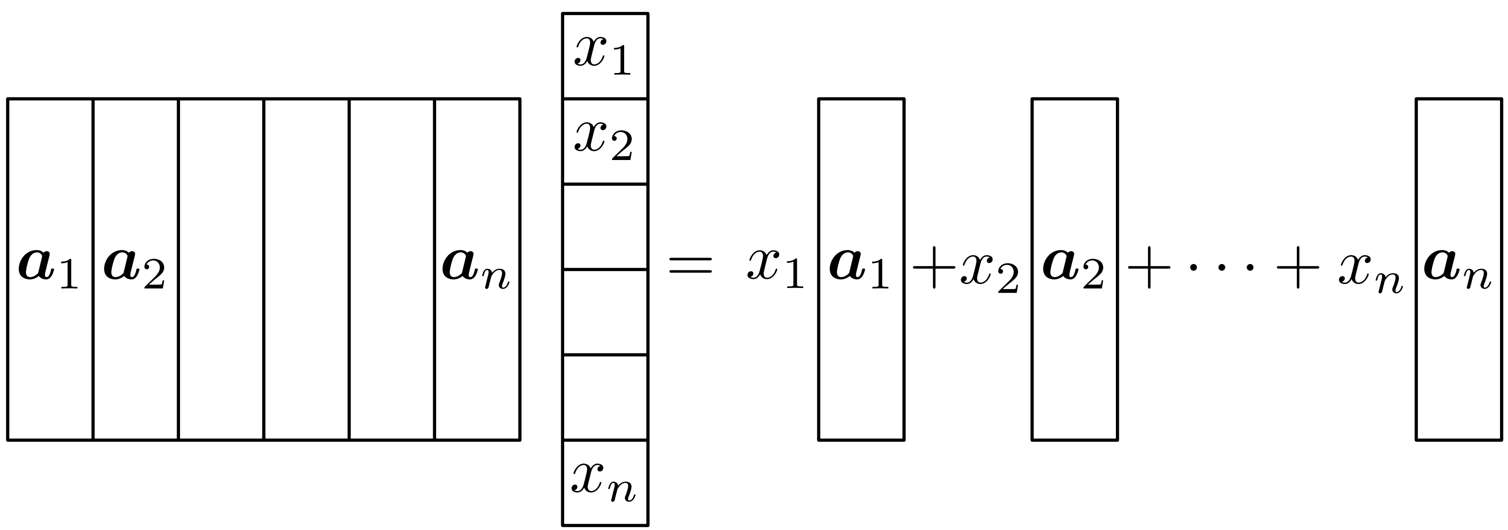
今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



線形計画緩和

解きたい問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

$$\begin{aligned} \text{min.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \text{s.t.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 \quad \forall\, i \in N \\ & x_P \in \{0,1\} \qquad\quad \forall\, P \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \text{s.t.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 \quad \forall\, i \in N \\ & x_P \geq 0 \qquad\qquad \forall\, P \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

まずは，線形計画緩和 R を解きたい

$\rightsquigarrow$ **列生成法** (column generation) は R を解く手法

列生成法：例 (1)

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$

線形計画緩和 R = $\mathrm{R}(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\
& x_2 + x_{12} \geq 1 \\
& x_3 + x_{13} \geq 1 \\
& x_4 + x_{14} \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0
\end{array}
$$

列生成法：例 (2)

線形計画緩和 R = $\mathrm{R}(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\
& x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 + x_{14} \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0
\end{array}
$$

変数を減らした問題

$\mathrm{R}(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

列生成法：例 (2)

線形計画緩和 R $=$ R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\ & x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 + x_{14} \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0 \end{array}$$

変数を減らした問題

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

最適解 $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 1$

列生成法：例 (2)

線形計画緩和 R $=$ R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\ & x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 + x_{14} \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0 \end{array}$$

変数を減らした問題

減らした変数を復活させて

目的関数値を小さくできるか？

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

最適解 $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 1$

列生成法：例 (3)

線形計画緩和 R $=$ R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1 \\
 & x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 + x_{14} \geq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14} \geq 0
\end{array}
$$

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\
 & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

列生成法：例 (4)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\
& x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

許容解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$

$x_{12} = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

(R$(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\})$ の最適解から得られるもの)

列生成法：例 (4)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\ & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

許容解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$

$x_{12} = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

(R$(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\})$ の最適解から得られるもの)

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ & = (1 - x_{12} - x_{13} - x_{14} + s_1) + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) \\ & \quad + (1 - x_{14} + s_4) + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ & = 4 - x_{12} - x_{13} - x_{14} + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \end{aligned}$$

列生成法：例 (4)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\ & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

許容解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$

$x_{12} = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

(R$(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\})$ の最適解から得られるもの)

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ &= (1 - x_{12} - x_{13} - x_{14} + s_1) + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) \\ &\quad + (1 - x_{14} + s_4) + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ &= 4 - \underline{x_{12}} - \underline{x_{13}} - \underline{x_{14}} + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \end{aligned}$$

変数の値を大きくする ⇒ 目的関数値が小さくなる

列生成法：例 (5)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} \geq 1 \\
& x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0
\end{aligned}
$$

列生成法：例 (5)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} \geq 1 \\
& x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0
\end{aligned}
$$

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$

列生成法：例 (5)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$

min. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12}$

s.t. $x_1 + x_{12} \geq 1$

$x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0$

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$

減らした変数を復活させて
目的関数値を小さくできるか？

列生成法：例 (6)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\
& x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}$$

許容解：$x_2 = 0, x_3 = x_4 = x_{12} = 1,$

$x_1 = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

(R$(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\})$ の最適解から得られるもの)

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
&= x_1 + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) + (1 - x_{14} + s_4) \\
&\quad + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
&= 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4
\end{aligned}$$

列生成法：例 (6)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1 \\
& x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}$$

許容解：$x_2 = 0, x_3 = x_4 = x_{12} = 1,$

$x_1 = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

(R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$ の最適解から得られるもの)

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
&= x_1 + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) + (1 - x_{14} + s_4) \\
&\quad + x_{12} + x_{13} + x_{14} \\
&= 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4
\end{aligned}$$

どの変数を大きくしても
目的関数値は小さくならない

列生成法：例 (6)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き直し)

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14}\\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_{12} + x_{13} + x_{14} - s_1 = 1\\ & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 + x_{14} - s_4 = 1\\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0\end{aligned}$$

許容解：$x_2 = 0, x_3 = x_4 = x_{12} = 1,$
$x_1 = x_{13} = x_{14} = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$

これは R の最適解

(R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$ の最適解から得られるもの)

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned}& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{14}\\ &= x_1 + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) + (1 - x_{14} + s_4)\\ &\quad + x_{12} + x_{13} + x_{14}\\ &= 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4\end{aligned}$$

どの変数を大きくしても
目的関数値は小さくならない

列生成法：例 (7)

課題

すべてのパターンをあらかじめ知らない
(そのため，R も知らない)

「非基底変数のみを用いて目的関数を表す」もできない

列生成法：例 (7)

課題

すべてのパターンをあらかじめ知らない
(そのため，R も知らない)

「非基底変数のみを用いて目的関数を表す」もできない

解決策

非基底変数のみを用いて目的関数を表したときに
係数が負であるパターンを見つける問題を解く

列生成法：例 (8)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$ (等式標準形に書き直し)

min. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12}$

s.t. $x_1 + x_{12} - s_1 = 1$

$x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 - s_3 = 1, x_4 - s_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

最適解 $x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$

$x_1^* = s_1^* = s_2^* = s_3^* = s_4^* = 0$

列生成法：例 (8)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$ (等式標準形に書き直し)

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & x_1+x_2+x_3+x_4+x_{12} \\ \text{s.t.} & x_1+x_{12}-s_1=1 \\ & x_2+x_{12}-s_2=1, x_3-s_3=1, x_4-s_4=1 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_{12},s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0\end{array}$$

最適解 $x_2^*=0, x_3^*=1, x_4^*=1, x_{12}^*=1$

$x_1^*=s_1^*=s_2^*=s_3^*=s_4^*=0$

x_{13} を戻したとすると

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & x_1+x_2+x_3+x_4+x_{12}+x_{13} \\ \text{s.t.} & x_1+x_{12}+x_{13}-s_1=1 \\ & x_2+x_{12}-s_2=1, x_3+x_{13}-s_3=1, x_4-s_4=1 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_{12},x_{13},s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0\end{array}$$

列生成法：例 (9)

x_{13} を戻したとすると

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} - s_1 = 1 \\
& x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 - s_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

列生成法：例 (9)

x_{13} を戻したとすると

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_{12} + x_{13} - s_1 = 1 \\ & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\ & = x_1 + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) + (1 + s_4) + x_{12} + x_{13} \\ & = 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4 \end{aligned}$$

列生成法：例 (9)

x_{13} を戻したとすると

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\[1em] \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} - s_1 = 1 \\ & x_2 + x_{12} - s_2 = 1, x_3 + x_{13} - s_3 = 1, x_4 - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0\end{array}$$

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned}& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\ &= x_1 + (1 - x_{12} + s_2) + (1 - x_{13} + s_3) + (1 + s_4) + x_{12} + x_{13} \\ &= \underline{3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4}\end{aligned}$$

x_{13} の係数は 0

列生成法：例 (10)

x_P を戻したとすると

$$[i \in P] = \begin{cases} 1 & (i \in P), \\ 0 & (i \notin P) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_P \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + [1 \in P] \cdot x_P - s_1 = 1, \\ & x_2 + x_{12} + [2 \in P] \cdot x_P - s_2 = 1, \\ & x_3 + [3 \in P] \cdot x_P - s_3 = 1, \\ & x_4 + [4 \in P] \cdot x_P - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

x_P を戻したとすると

$$[i \in P] = \begin{cases} 1 & (i \in P), \\ 0 & (i \notin P) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_P \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + [1 \in P] \cdot x_P - s_1 = 1, \\ & x_2 + x_{12} + [2 \in P] \cdot x_P - s_2 = 1, \\ & x_3 + [3 \in P] \cdot x_P - s_3 = 1, \\ & x_4 + [4 \in P] \cdot x_P - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_P \\ & = x_1 + (1 - x_{12} - [2 \in P] \cdot x_P + s_2) + (1 - [3 \in P] \cdot x_P + s_3) \\ & \quad + (1 - [4 \in P] \cdot x_P + s_4) + x_{12} + x_P \\ & = 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4 + (1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P]) x_P \end{aligned}$$

列生成法：例 (10)

x_P を戻したとすると

$$[i \in P] = \begin{cases} 1 & (i \in P), \\ 0 & (i \notin P) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_P \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + [1 \in P] \cdot x_P - s_1 = 1, \\ & x_2 + x_{12} + [2 \in P] \cdot x_P - s_2 = 1, \\ & x_3 + [3 \in P] \cdot x_P - s_3 = 1, \\ & x_4 + [4 \in P] \cdot x_P - s_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, x_P, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

非基底変数のみを用いて目的関数を書き表す

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_P \\ &= x_1 + (1 - x_{12} - [2 \in P] \cdot x_P + s_2) + (1 - [3 \in P] \cdot x_P + s_3) \\ &\quad + (1 - [4 \in P] \cdot x_P + s_4) + x_{12} + x_P \\ &= 3 + x_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \underbrace{(1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P])}_{x_P \text{ の係数}} x_P \end{aligned}$$

列生成法：例 (11)

$\boxed{\text{解くべき問題}}$ (価格付け問題 pricing problem)

$$\begin{array}{rl} \text{min.} & 1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P] \\ \text{s.t.} & P \text{ はパターン} \end{array}$$

$$\text{この最適値} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{最適解 } P \text{ を追加} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解} \end{cases}$$

列生成法：例 (11)

解くべき問題 (価格付け問題 pricing problem)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & 1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P] \\ \text{s.t.} & P \text{ はパターン} \end{array}$$

この最適値 $\begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{最適解 } P \text{ を追加} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解} \end{cases}$

等価な問題

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z_2 + z_3 + z_4 - 1 \\ \text{s.t.} & z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 7z_4 \leq 8 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

この最適値 $\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{最適解に対応するパターンを追加} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解} \end{cases}$

列生成法：例 (11)

$\boxed{\text{解くべき問題}}$ (価格付け問題 pricing problem)

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & 1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P] \\
\text{s.t.} & P \text{ はパターン}
\end{array}
$$

$$
\text{この最適値}
\begin{cases}
< 0 & \Rightarrow \text{最適解 } P \text{ を追加} \\
\geq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解}
\end{cases}
$$

$\boxed{\text{等価な問題}}$

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & z_2 + z_3 + z_4 - 1 \\
\text{s.t.} & z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 7z_4 \leq 8 \\
& z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

最適値 $= 0$

$$
\text{この最適値}
\begin{cases}
> 0 & \Rightarrow \text{最適解に対応するパターンを追加} \\
\leq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解}
\end{cases}
$$

列生成法：例 (11)

解くべき問題 (価格付け問題 pricing problem)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & 1 - [2 \in P] - [3 \in P] - [4 \in P] \\ \text{s.t.} & P \text{ はパターン} \end{array}$$

この最適値 $\begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{最適解 } P \text{ を追加} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解} \end{cases}$

等価な問題

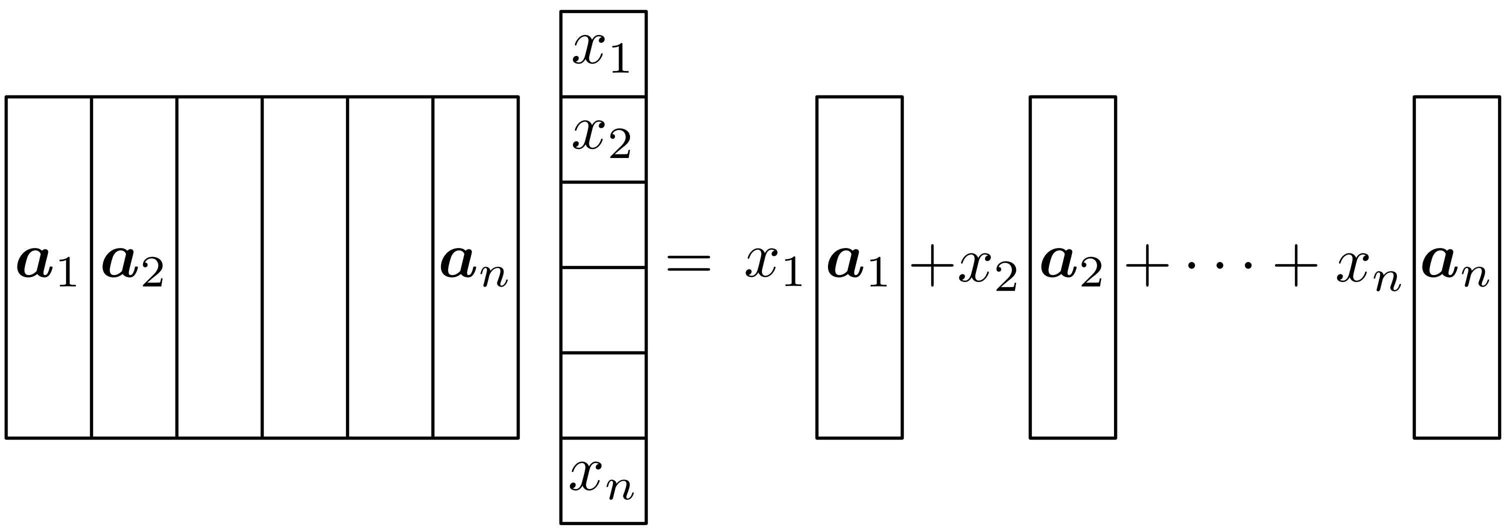
ナップサック問題

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z_2 + z_3 + z_4 - 1 \\ \text{s.t.} & z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 7z_4 \leq 8 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

最適値 $= 0$

この最適値 $\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{最適解に対応するパターンを追加} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{現在の解が R の最適解} \end{cases}$

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & & & & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$$

列生成法：一般論 — 準備 (1)

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

変数の添字集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$

$$
A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \quad & \qquad\qquad & \quad & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right]
$$

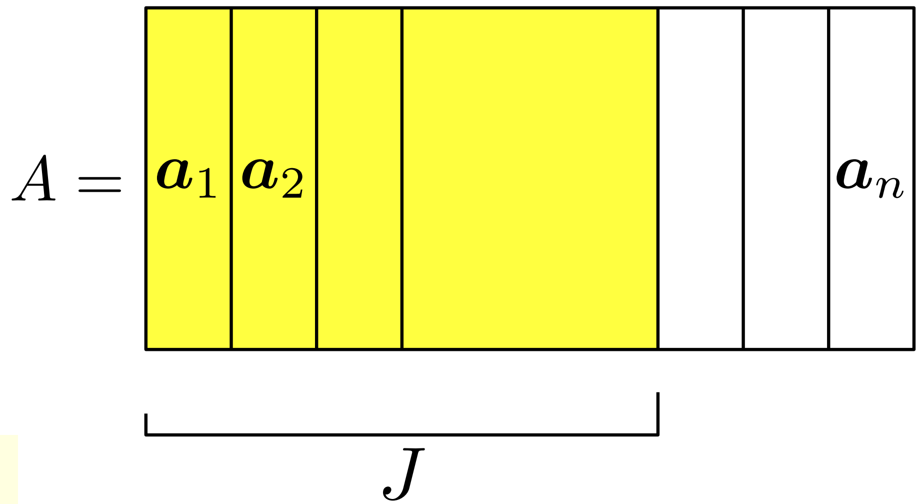
列生成法：一般論 — 準備 (1)

線形計画緩和 R

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

変数の添字集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$



変数を $J \subseteq I$ に限定

R(J)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J \\
\text{subject to} \quad & A_J\boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

列生成法：一般論 — 準備 (2)

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

変数を $J \subseteq I$ に限定

R(J)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J \\ \text{subject to} & A_J\boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\ & \quad \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}_J^*$

列生成法：一般論 — 準備 (2)

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

変数を $J \subseteq I$ に限定

変数 x_j $(j \notin J)$ を復活させて目的関数値を小さくできるか？

R(J)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J \\ \text{subject to} & A_J\boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}_J^*$

列生成法：一般論 — 判定法 (1)

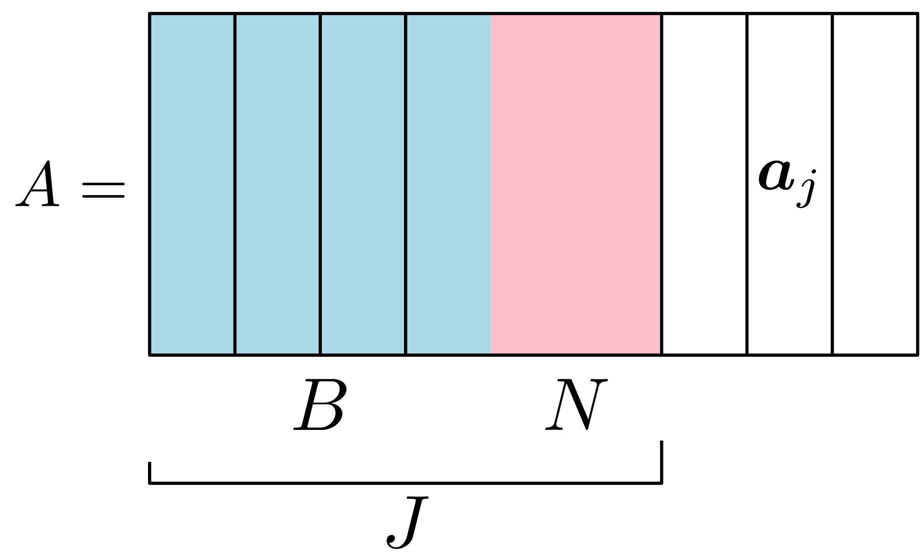
R(J)

minimize	$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J$
subject to	$A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b},$
	$\boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}$

端点最適解 $\boldsymbol{x}_J^*$

B：基底変数の添字集合

N：非基底変数の添字集合



$\boldsymbol{x}$ が R(J) の許容解であるとき

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N$$

$$A_J \boldsymbol{x}_J = A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N$$

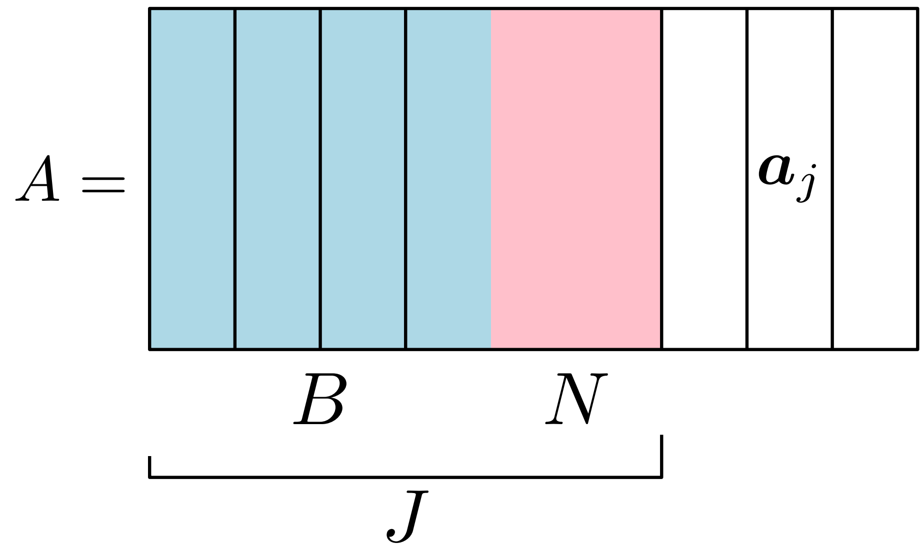
R(J)

minimize	$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J$
subject to	$A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}$,
	$\boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}$

端点最適解 $\boldsymbol{x}_J^*$

B：基底変数の添字集合

N：非基底変数の添字集合



$\boldsymbol{x}$ が R(J) の許容解であるとき

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N$$

$$A_J \boldsymbol{x}_J = A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1} \boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N) \boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

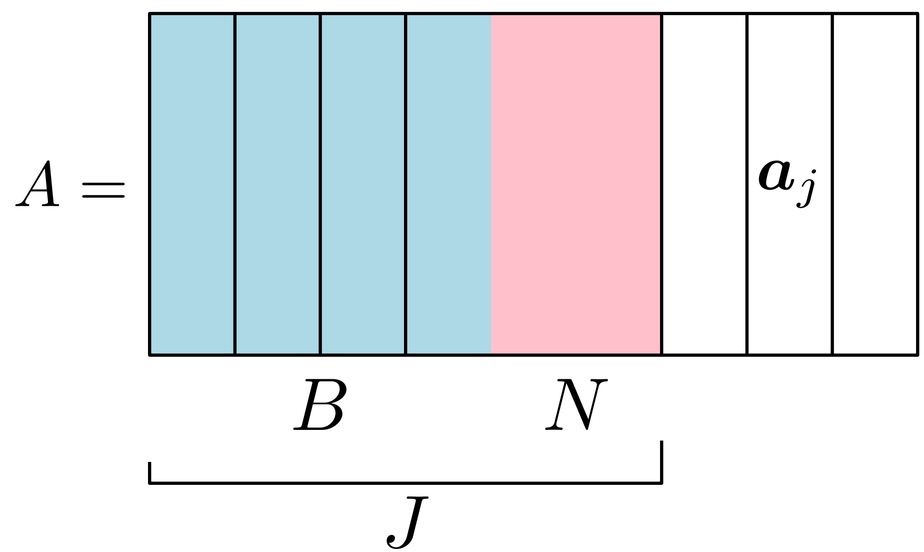
R(J)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J \\
\text{subject to} & A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}_J^*$

B：基底変数の添字集合

N：非基底変数の添字集合



$\boldsymbol{x}$ が R(J) の許容解であるとき

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N$$

$$A_J \boldsymbol{x}_J = A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N$$

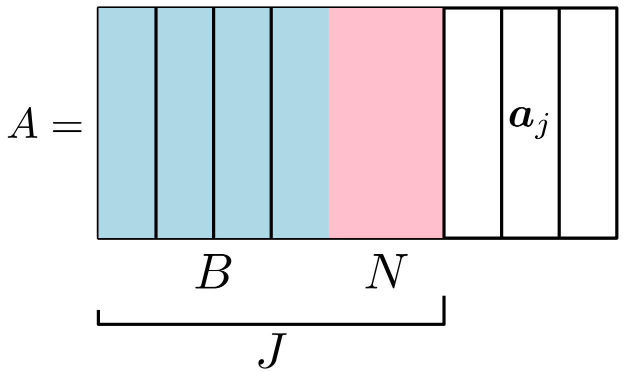
$$\therefore \ \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1} \boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} + \underbrace{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)}_{\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{x}_N
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{R}(J) \xrightarrow{x_j\text{ を戻す}} \mathrm{R}(J \cup \{j\})$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J \\ \text{subject to} & A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j \\ \text{subject to} & A_J \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}, x_j \geq 0 \end{array}$$



列生成法：一般論 — 判定法 (2)

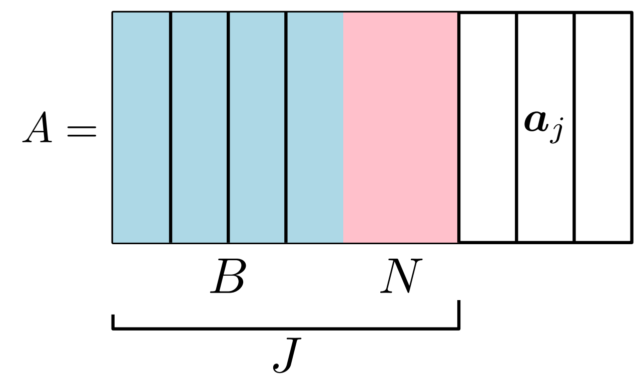
R$(J) \xrightarrow{\quad x_j \text{ を戻す} \quad}$ R$(J \cup \{j\})$

minimize $\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J$	minimize $\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j$
subject to $A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}$	subject to $A_J \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}, x_j \geq 0$

$\boldsymbol{x}$ が R$(J \cup \{j\})$ の許容解であるとき

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N + c_j x_j$$

$$A_J \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{a}_j x_j = A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{a}_j x_j$$

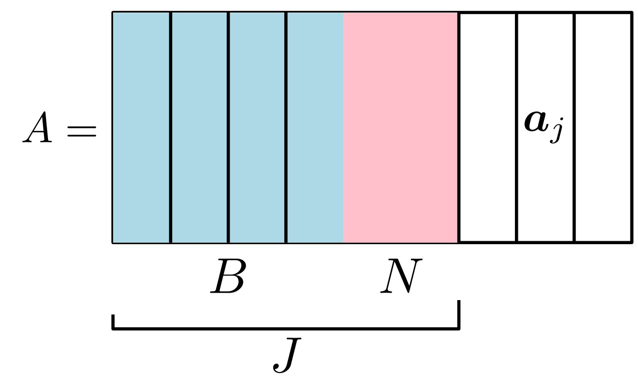


列生成法：一般論 — 判定法 (2)

$$\mathrm{R}(J) \xrightarrow{\;x_j\ \text{を戻す}\;} \mathrm{R}(J \cup \{j\})$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J \\ \text{subject to} & A_J \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j \\ \text{subject to} & A_J \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_J \geq \boldsymbol{0}, x_j \geq 0 \end{array}$$

$\boldsymbol{x}$ が R$(J \cup \{j\})$ の許容解であるとき



$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N + c_j x_j$$

$$A_J \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{a}_j x_j = A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{a}_j x_j$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1} \boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N - A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j x_j$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j x_j + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N + c_j x_j \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N) \boldsymbol{x}_N + \underline{(c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j)} x_j \end{aligned}$$

列生成法：一般論 — 判定法 (3)

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N) \boldsymbol{x}_N + \underline{(c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j)} x_j$$

列生成法：一般論 ― 判定法 (3)

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)\boldsymbol{x}_N + \underline{(c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j)}x_j$$

x_j を戻すと，
目的関数値を
小さくできる
$\iff$ $\underline{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j} < 0$

列生成法：一般論 — 判定法 (3)

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)\boldsymbol{x}_N + \underline{(c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j)}x_j$$

x_j を戻すと，目的関数値を小さくできる $\iff$ $\underline{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j} < 0$

$\boxed{\text{判定法}}$

1. $\alpha = \underline{\min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}}$ を計算する
   価格付け問題 (pricing problem)
2. $\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha$ を達成する $j \notin J$ を追加

   $\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^*$ が R の最適解

列生成法：一般論 — 判定法 (3)

$$\boldsymbol{c}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_J + c_j x_j = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)\boldsymbol{x}_N + \underline{(c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j)}x_j$$

x_j を戻すと,
目的関数値を
小さくできる $\iff$ $\underline{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j} < 0$

判定法

問題点：c_j と $\boldsymbol{a}_j$ を知らない

個々の問題の構造を使って解く

1. $\alpha = \underline{\min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}}$ を計算する

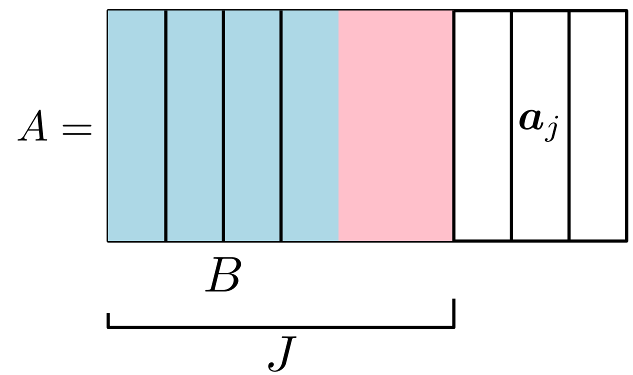
価格付け問題 (pricing problem)

2. $\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha$ を達成する $j \notin J$ を追加

$\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^*$ が R の最適解

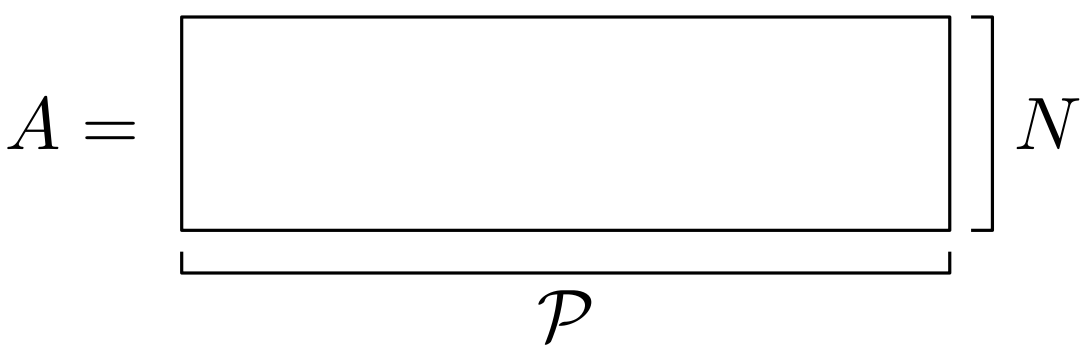
ビンパッキング問題に対する列生成法 (1)

$$\alpha = \min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}$$



ビンパッキング問題の線形計画緩和 R

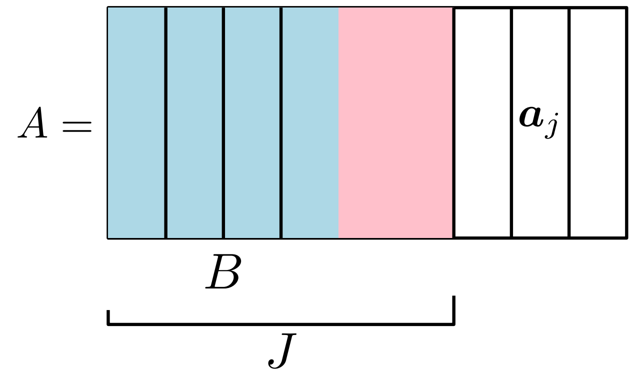
$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\
& x_P \geq 0 & \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{array}$$



本来は等式標準形に直してから考える

ビンパッキング問題に対する列生成法 (1)

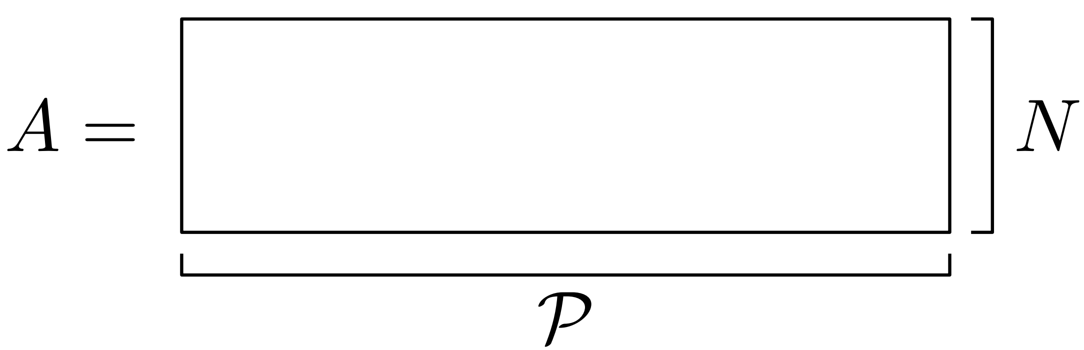
$$\alpha = \min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}$$



ビンパッキング問題の線形計画緩和 R

$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\
 & x_P \geq 0 & \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{array}$$

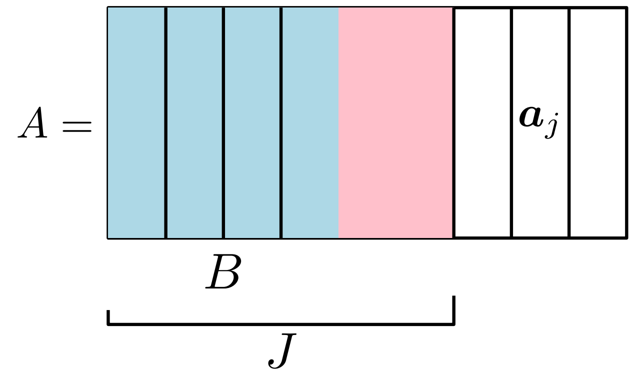
添字 $j \leftrightarrow$ パターン P



本来は等式標準形に直してから考える

ビンパッキング問題に対する列生成法 (1)

$$\alpha = \min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}$$



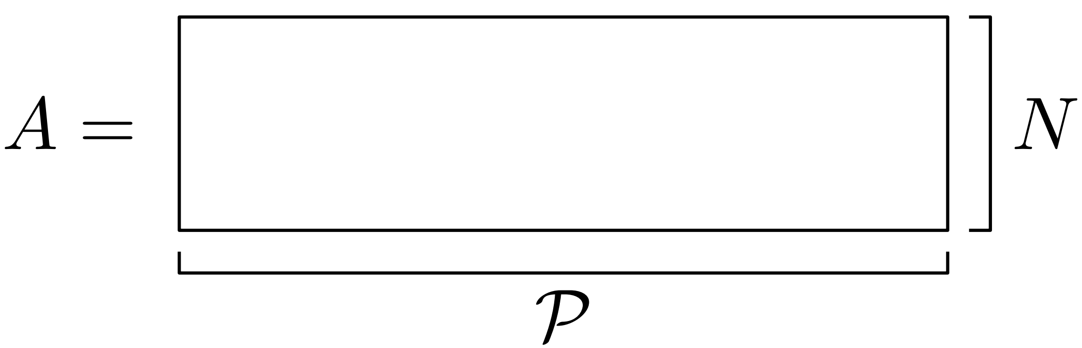
ビンパッキング問題の線形計画緩和 R

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\ & x_P \geq 0 & \forall\, P \in \mathcal{P} \end{array}$$

添字 $j \leftrightarrow$ パターン P

$$c_P = 1$$

$$\boldsymbol{a}_P = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftrightarrow i \notin P \\ \\ \longleftrightarrow i \in P \\ \\ \end{array}$$



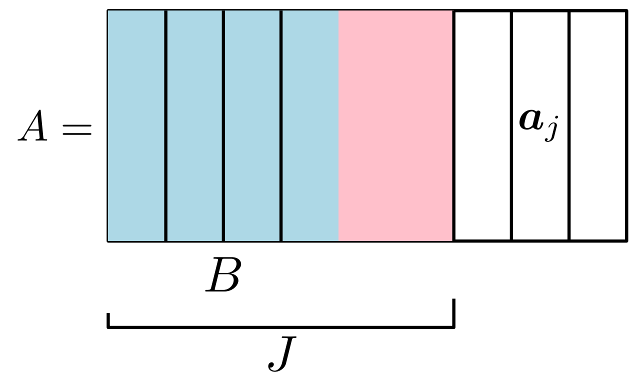
本来は等式標準形に直してから考える

$$\alpha = \min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}$$

$$\updownarrow$$

次を最小化するパターン P を見つける問題

$$1 - \sum_{i \in P} \left(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\right)_i$$



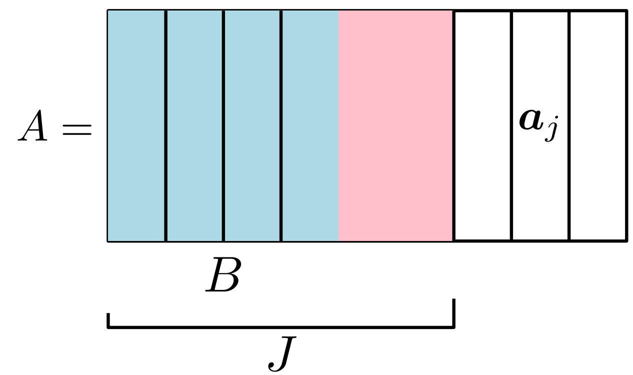
添字 $j \leftrightarrow$ パターン P

$$c_P = 1$$

$$\boldsymbol{a}_P = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftrightarrow i \notin P \\ \\ \\ \longleftrightarrow i \in P \\ \\ \end{array}$$

ビンパッキング問題に対する列生成法 (2)

$$\alpha = \min\{\boxed{c_j} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boxed{\boldsymbol{a}_j} \mid j \notin J\}$$



$\updownarrow$

次を最小化するパターン P を見つける問題

$\updownarrow$

$$1 - \sum_{i \in P} (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1})_i$$

添字 $j \leftrightarrow$ パターン P

$$c_P = 1$$

$\updownarrow$

次の整数計画問題

$$\text{min.} \quad 1 - \sum_{i \in N} (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1})_i z_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in N} w_i z_i \le B,$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in N$$

ビンの容量

アイテム i の大きさ

$$\boldsymbol{a}_P = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \longleftrightarrow i \notin P \\ \\ \longleftrightarrow i \in P \\ \\ \end{array}$$

ビンパッキング問題に対する列生成法 (3)

$$\alpha = \min\{c_j - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{a}_j \mid j \notin J\}$$

$\updownarrow$

次を最小化するパターン P を見つける問題

$$1 - \sum_{i \in P} \left(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\right)_i$$

$\updownarrow$

次の整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & 1 - \sum_{i \in N} (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1})_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i z_i \le B, \\ & z_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

判定法

1. 次のナップサック問題を解く

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1})_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i z_i \le B, \\ & z_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

2. 最適値 $> 1 \Rightarrow$ 追加する
   最適値 $\le 1 \Rightarrow$ 追加しない

上記ナップサック問題の最適解に対応するパターンを

今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & & & & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \boxed{\boldsymbol{a}_1} + x_2 \boxed{\boldsymbol{a}_2} + \cdots + x_n \boxed{\boldsymbol{a}_n}$$

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & & & & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}
= x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n
$$

列生成法が解くのは線形計画緩和

解きたい問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0,1\} & \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\
& x_P \geq 0 & \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

まずは，線形計画緩和 R を解きたい

$\rightsquigarrow$ **列生成法** (column generation) は R を解く手法 (済)

分枝価格法

分枝限定法
(branch-and-bound method)

場合分けと枝刈り

列生成法
(column generation)

変数を徐々に追加

分枝価格法
(branch-and-price method)

変数を徐々に追加しながら
場合分けと枝刈り

分枝限定法

(branch-and-bound method)

場合分けと枝刈り

列生成法

(column generation)

変数を徐々に追加

分枝価格法

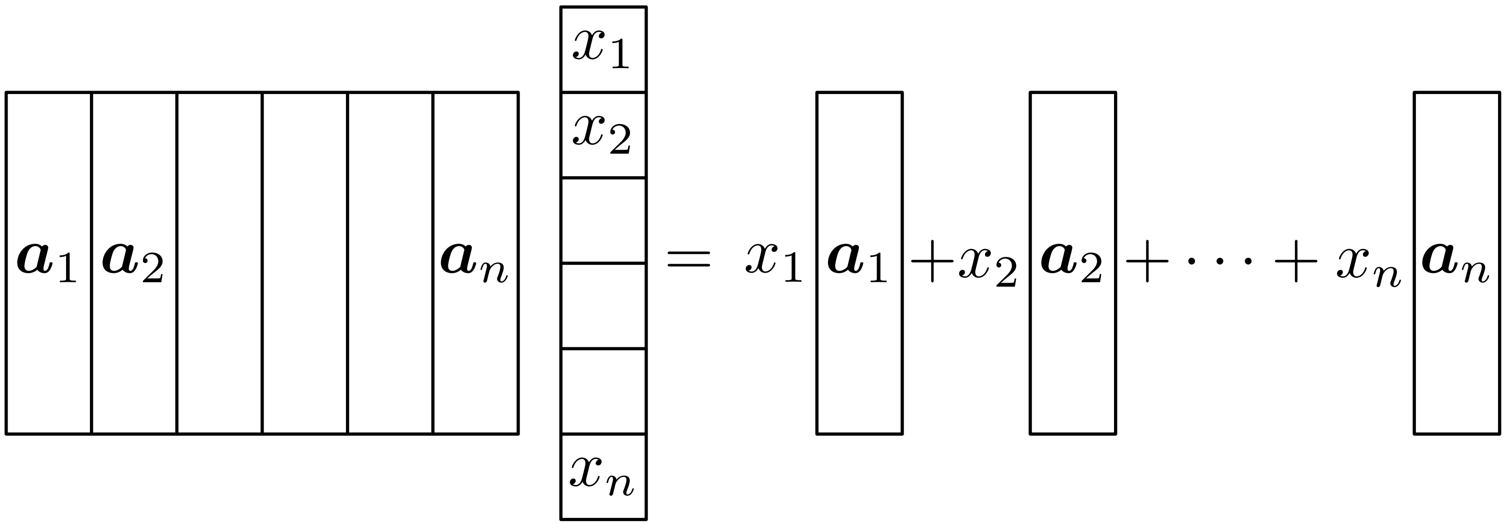
(branch-and-price method)

部分問題にも
列生成法が使えるか
気をつける

変数を徐々に追加しながら
場合分けと枝刈り

今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題



今日の内容

- 復習：ビンパッキング問題の整数計画モデリング
- 列生成法：例
- 列生成法：一般論
- 分枝価格法
- 列生成法と双対問題

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & & & & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$$

列生成法と切除平面法

列生成法

変数が多い問題を解く手法

切除平面法

制約が多い問題を解く手法

この節の目標

列生成法と切除平面法が
互いに **双対** の関係にあることを見る

一般論はややこしいので，例で雰囲気をつかむ

(復習) 双対問題

主問題 (primal) $\longrightarrow$ 双対問題 (dual)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$\boldsymbol{x}$：主変数 (primal variable)

$\boldsymbol{y}$：双対変数 (dual variable)

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

(復習) 双対問題

主問題 (primal) $\longrightarrow$ 双対問題 (dual)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$\boldsymbol{x}$：主変数 (primal variable)

$n =$ 変数の数

$m =$ 制約の数

$\boldsymbol{y}$：双対変数 (dual variable)

$m =$ 変数の数

$n =$ 制約の数

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

ビンパッキング問題：例 (1)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$

min. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12}$

s.t. $x_1 + x_{12} \geq 1$

$x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0$

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$ 最適値 3

双対問題 D$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}\})$

max. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

s.t. $y_1 \leq 1, y_2 \leq 1, y_3 \leq 1, y_4 \leq 1,$

$y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

最適解 $y_1^* = 0, y_2^* = 1, y_3^* = 1, y_4^* = 1$ 最適値 3

ビンパッキング問題：例 (2)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} \geq 1 \\
& x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0
\end{array}
$$

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$

変数 x_{13} を戻して最適値を小さくできるか？

双対問題 D$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
\text{s.t.} & y_1 \leq 1, y_2 \leq 1, y_3 \leq 1, y_4 \leq 1, \\
& y_1 + y_2 \leq 1, y_1 + y_3 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

最適解 $y_1^* = 0, y_2^* = 1, y_3^* = 1, y_4^* = 1$

制約 $y_1 + y_3 \leq 1$ を追加して最適値を小さくできるか？

ビンパッキング問題：例 (2)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

min.	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13}$
s.t.	$x_1 + x_{12} + x_{13} \geq 1$
	$x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 \geq 1$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0$

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1$

変数 x_{13} を戻して
最適値を小さく
できるか？

双対問題 D$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

max.	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$
s.t.	$y_1 \leq 1, y_2 \leq 1, y_3 \leq 1, y_4 \leq 1,$
	$y_1 + y_2 \leq 1, y_1 + y_3 \leq 1$
	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

最適解 $y_1^* = 0, y_2^* = 1, y_3^* = 1, y_4^* = 1$

制約 $y_1 + y_3 \leq 1$ を
追加して
最適値を小さく
できるか？

$y_1^* + y_3^* > 1$ か？

ビンパッキング問題：例 (2)

R$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{12} + x_{13} \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{12} + x_{13} \geq 1 \\ & x_2 + x_{12} \geq 1, x_3 + x_{13} \geq 1, x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12} \geq 0 \end{array}$$

変数 x_{13} を戻して
最適値を小さく
できるか？

最適解 $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_{12}^* = 1, x_{13}^* = 0$

双対問題 D$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\})$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{s.t.} & y_1 \leq 1, y_2 \leq 1, y_3 \leq 1, y_4 \leq 1, \\ & y_1 + y_2 \leq 1, y_1 + y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

制約 $y_1 + y_3 \leq 1$ を
追加して
最適値を小さく
できるか？

最適解 $y_1^* = 0, y_2^* = 1, y_3^* = 1, y_4^* = 1$

$y_1^* + y_3^* > 1$ か？

次回予告

次回の内容

ラグランジュ緩和

- 緩和問題を柔軟に作成する方法