離散最適化基礎論

第 9 回

切除平面法

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 12 月 6 日

最終更新：2022 年 12 月 6 日　13:03

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

＊ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

＜アルゴリズム＞

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

∗ 休み (国内出張) (12/27)

∗ 休み (冬季休業) (1/3)

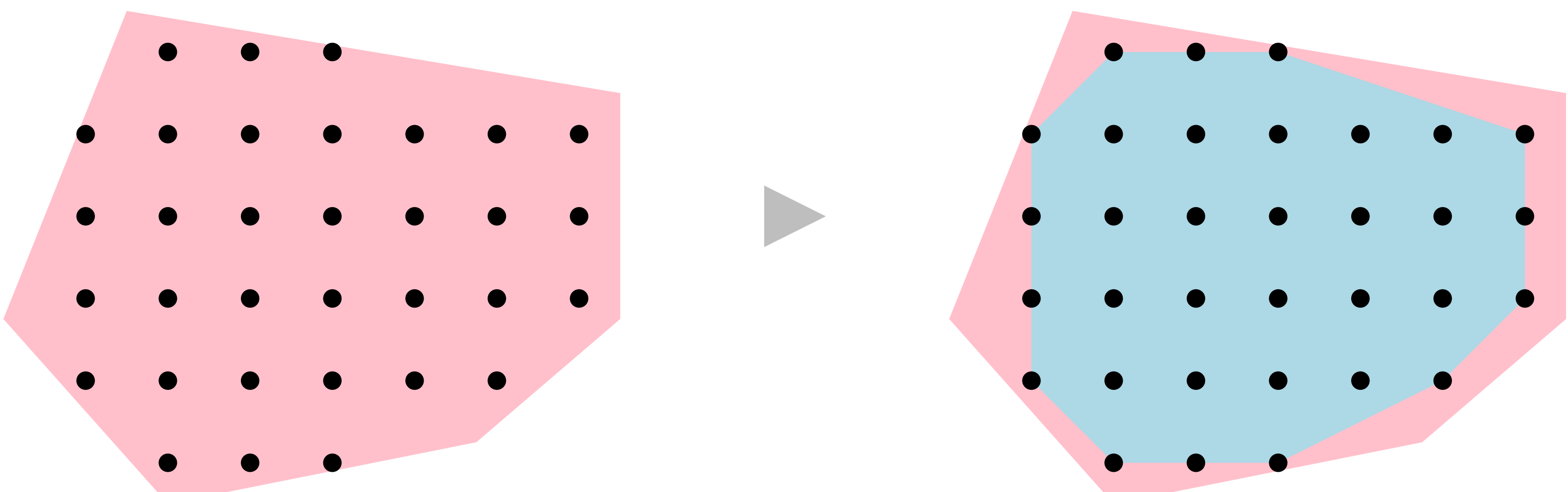
12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

＜まとめ・予備＞

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

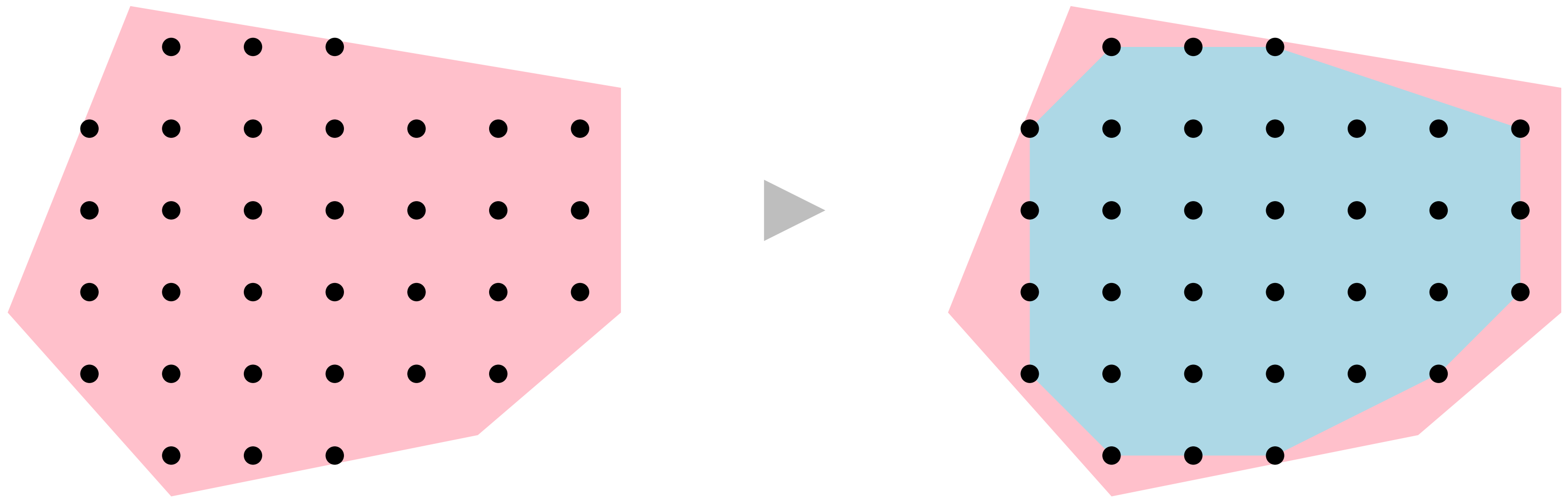
今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法

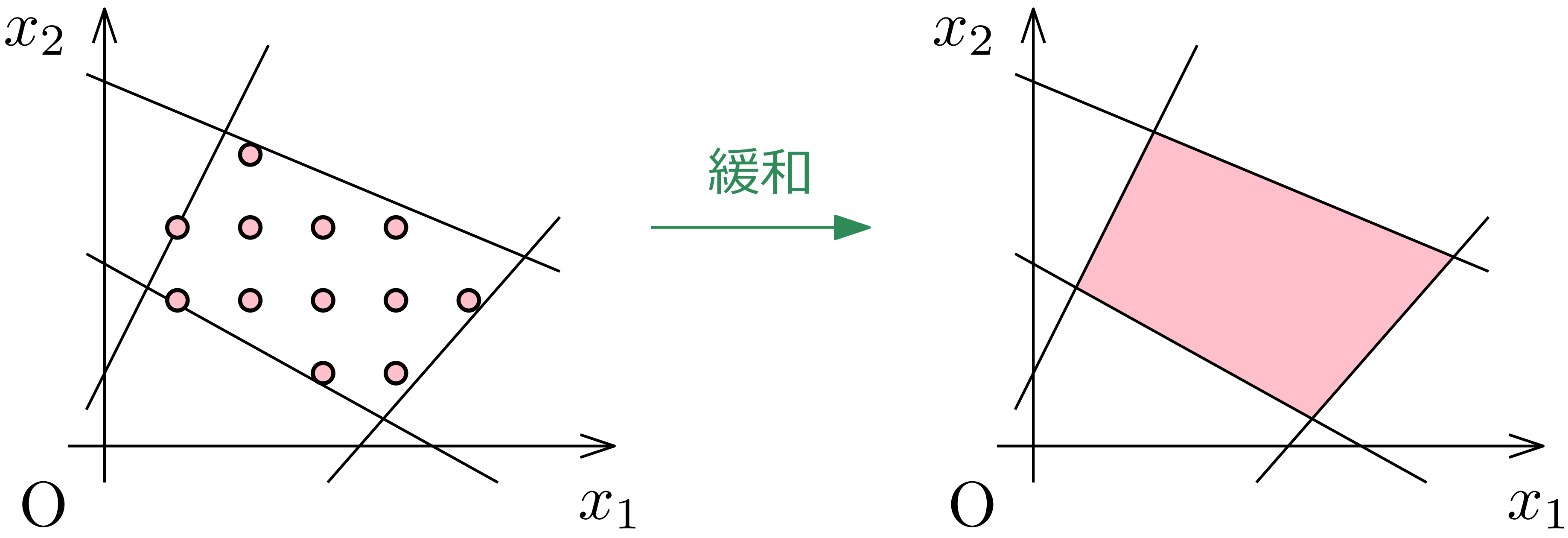


今日の内容

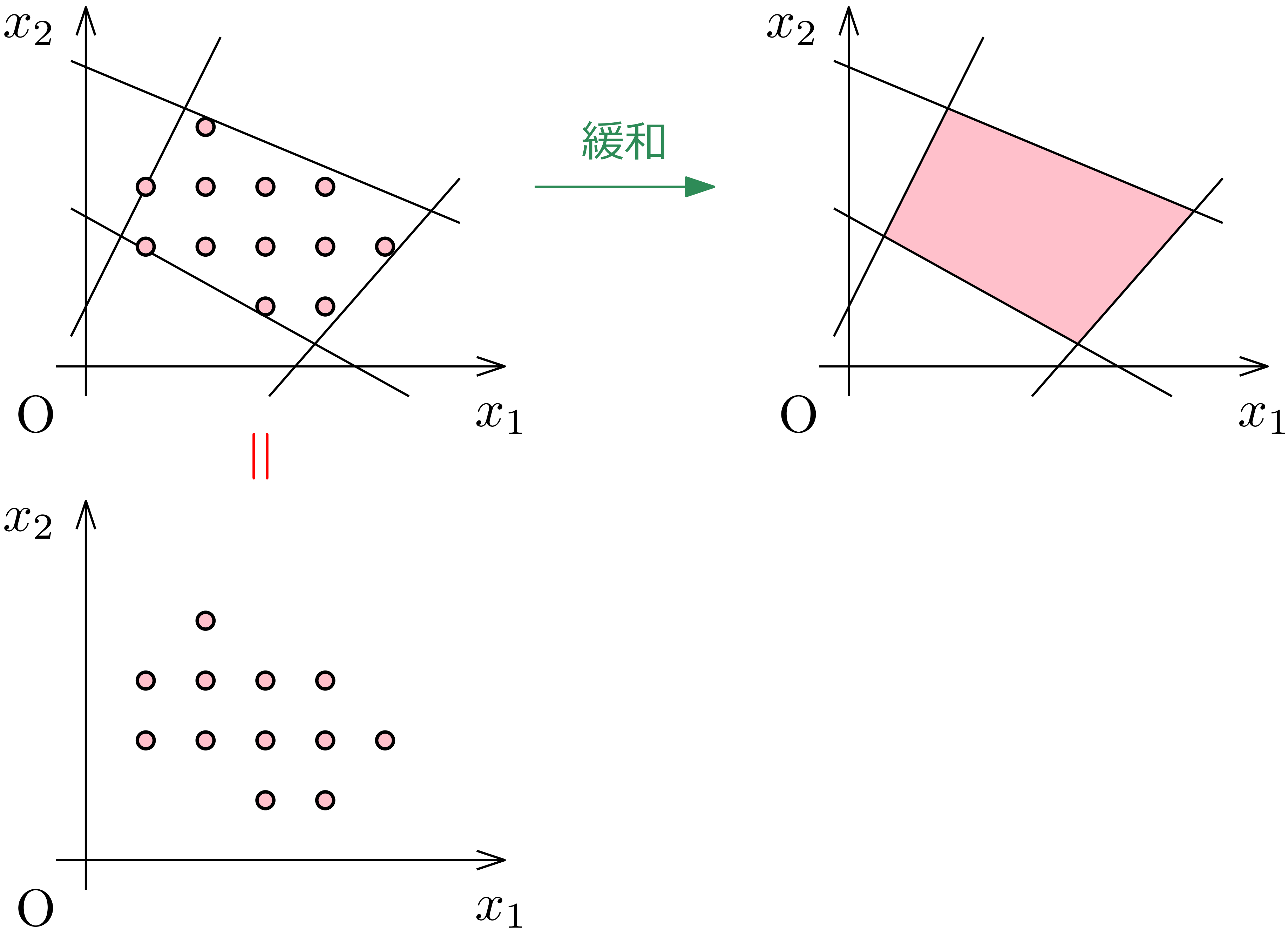
- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



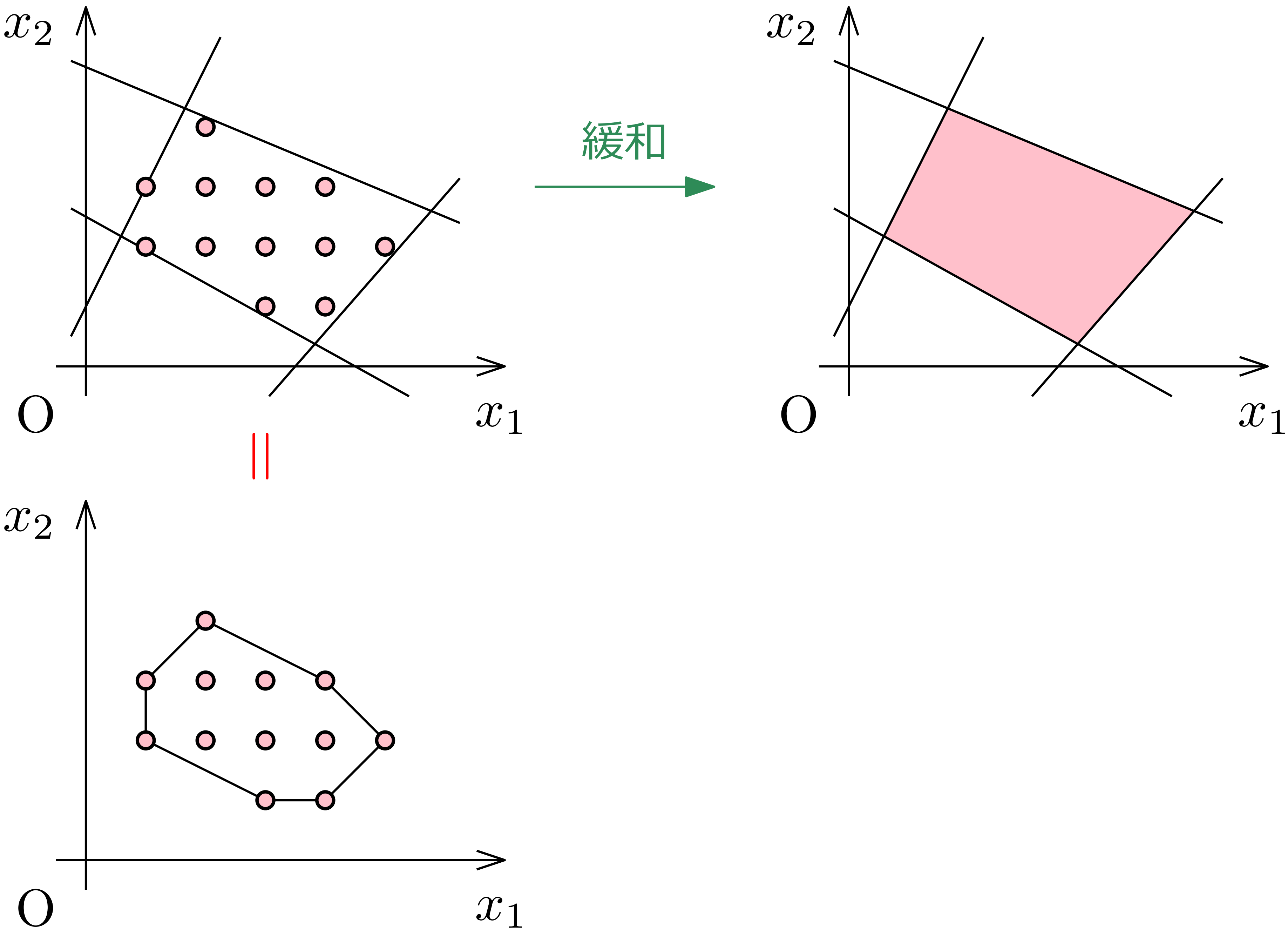
(復習) 整数計画問題は線形計画問題



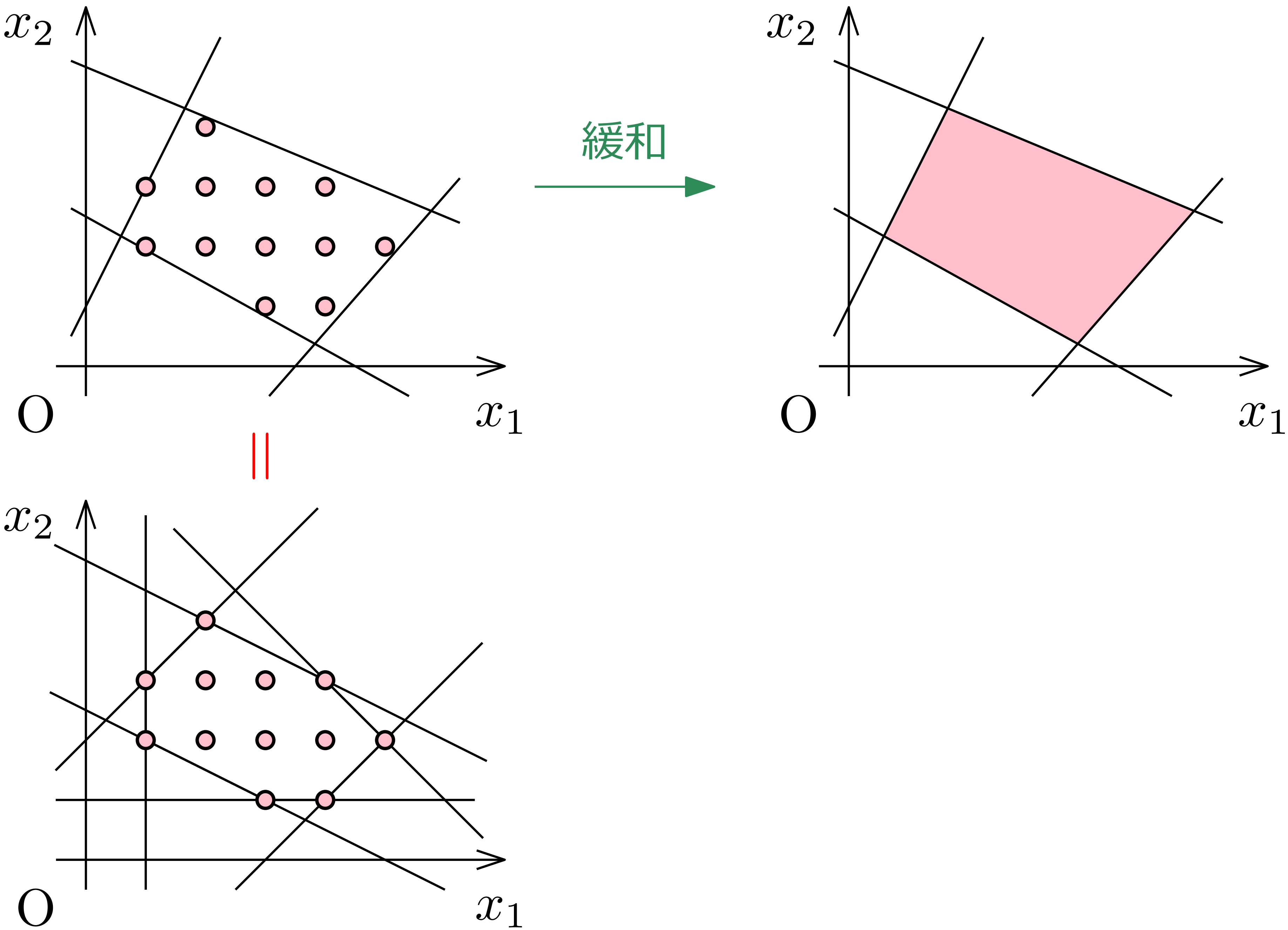
(復習) 整数計画問題は線形計画問題



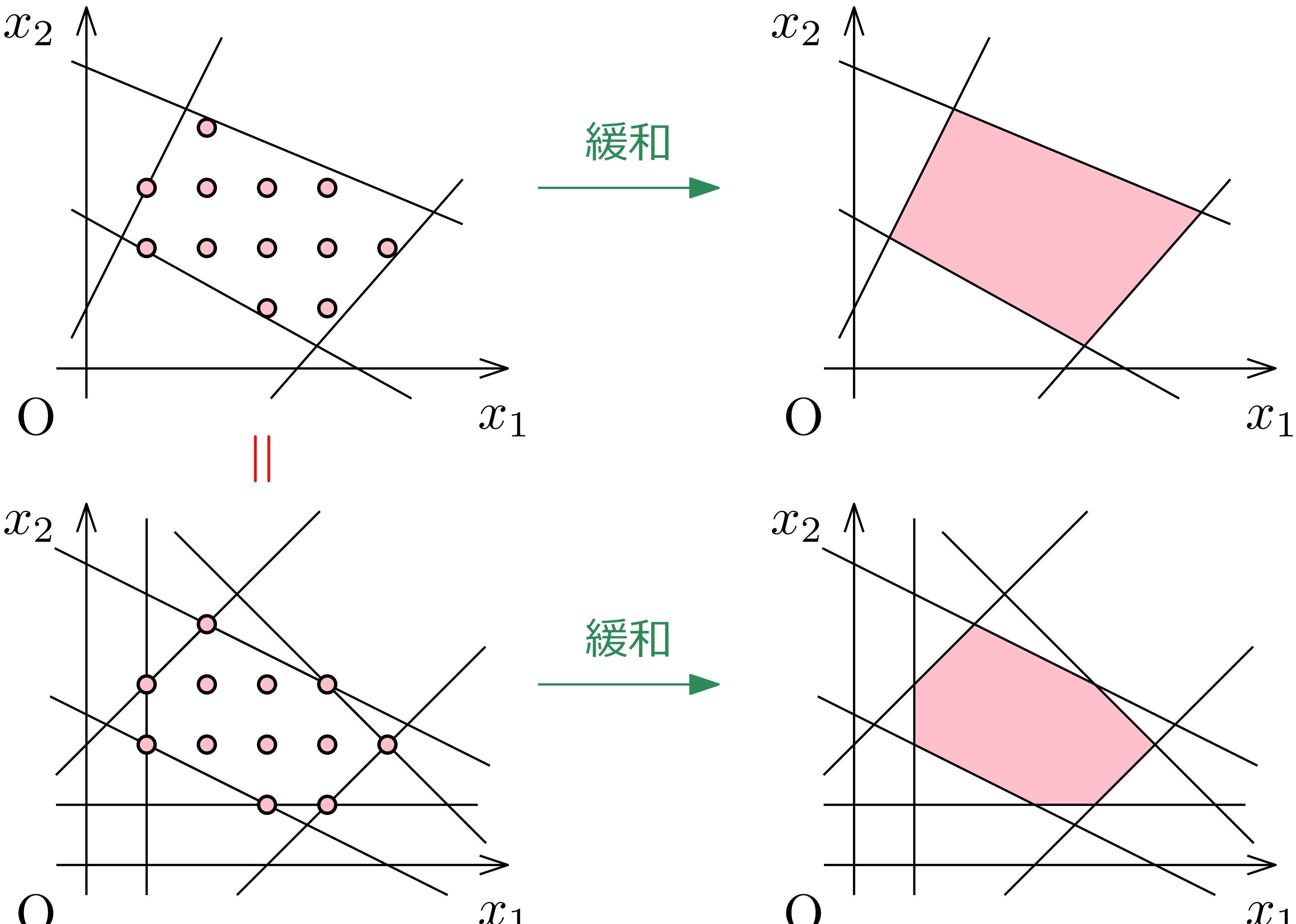
(復習) 整数計画問題は線形計画問題



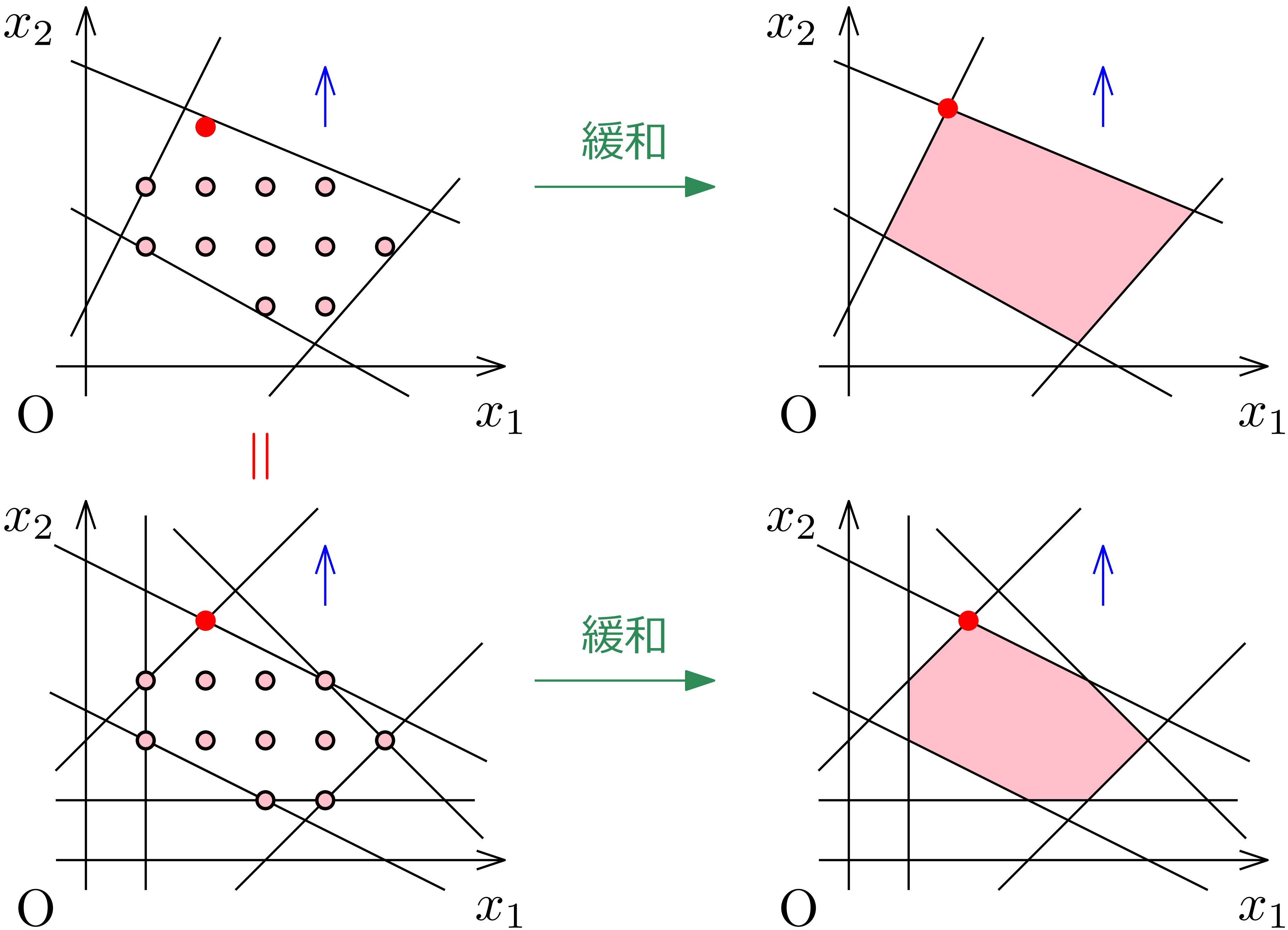
(復習) 整数計画問題は線形計画問題



(復習) 整数計画問題は線形計画問題



(復習) 整数計画問題は線形計画問題



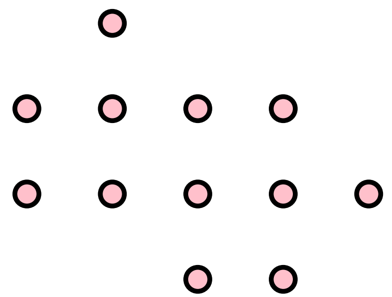
(復習) 整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

P の許容領域

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\}$$



(復習) 整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

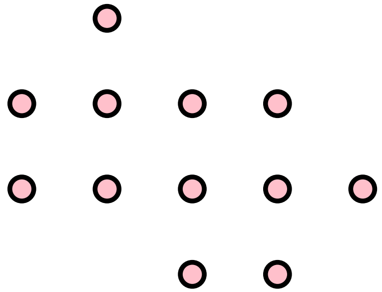
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

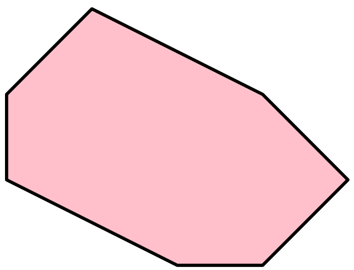
P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \quad \subseteq \quad \operatorname{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)





(復習) 整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P'

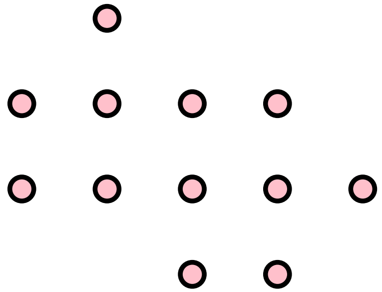
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(S) \end{array}$$

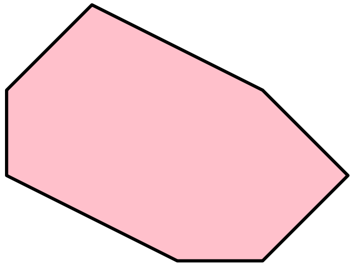
P の許容領域

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{conv}(S)$$

P の許容領域の凸包

(S が無限集合のとき，要注意)





(復習) 整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P'

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(S) \end{array}$$

P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)

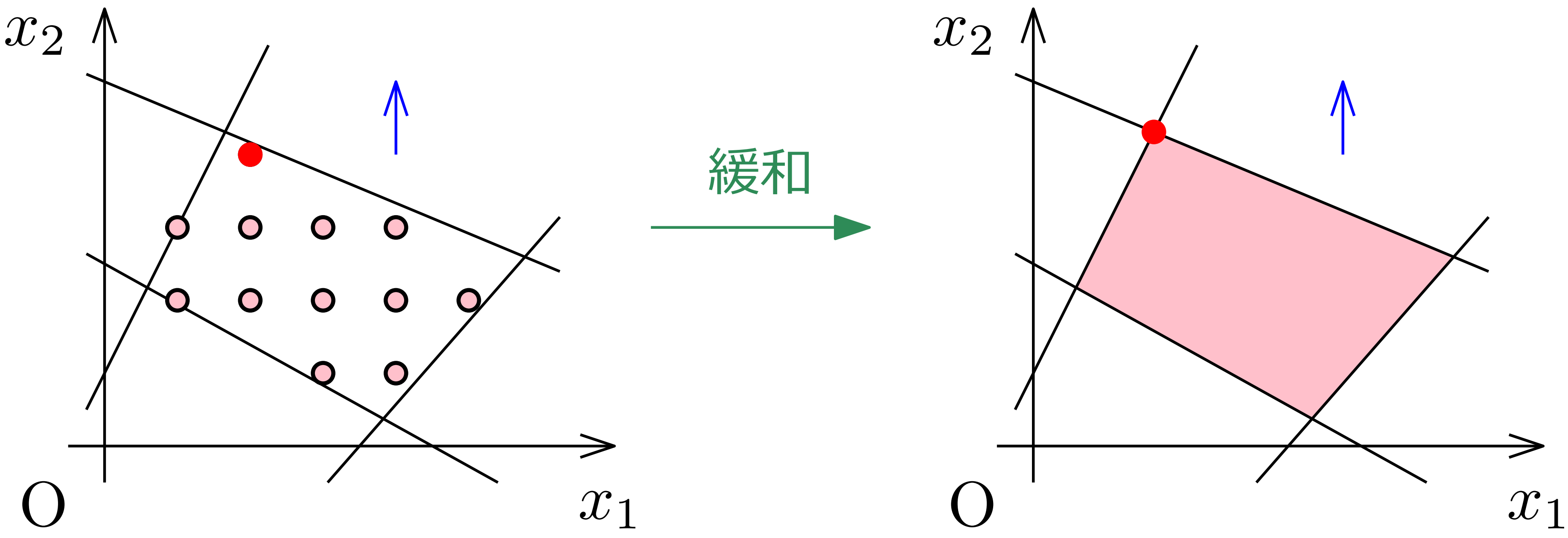
性質：整数計画問題は線形計画問題

P に最適解が存在する $\Rightarrow$

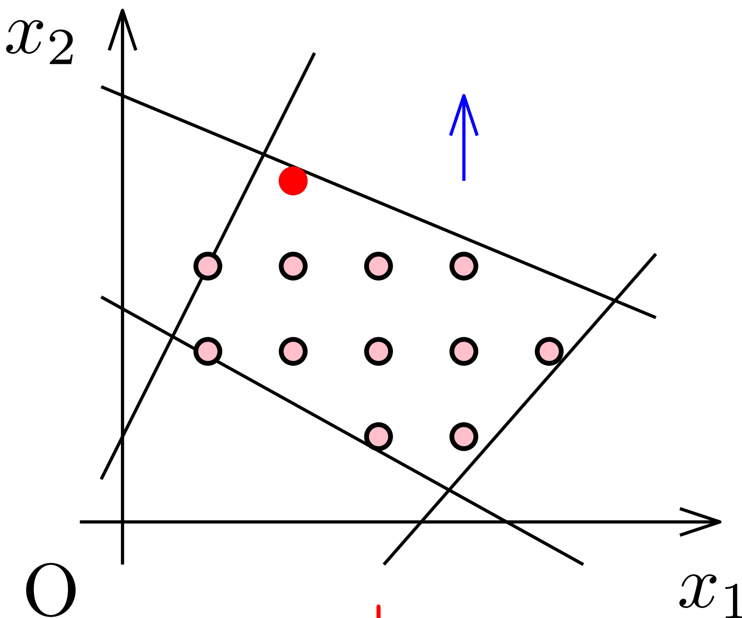
P' にも最適解が存在し，

$\boldsymbol{x}^*$ が P の最適解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}^*$ が P' の**整数**最適解

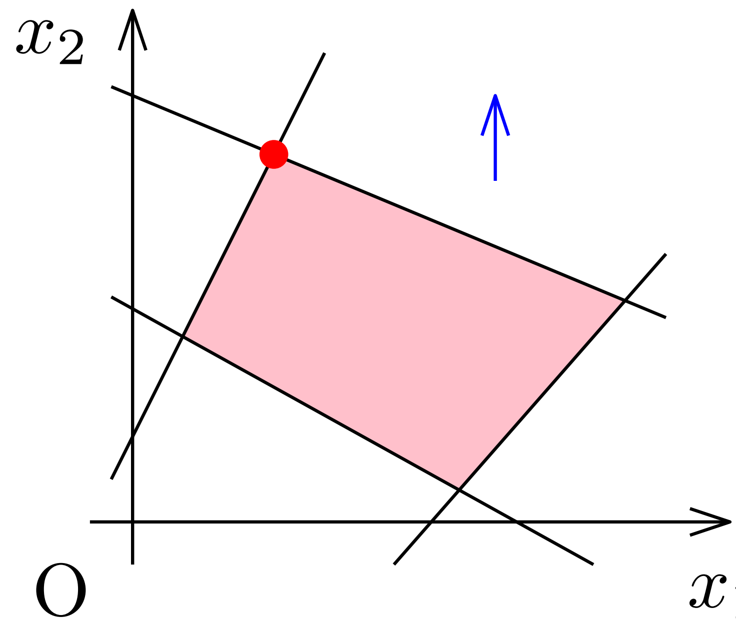
追加しても許容領域が変わらない制約



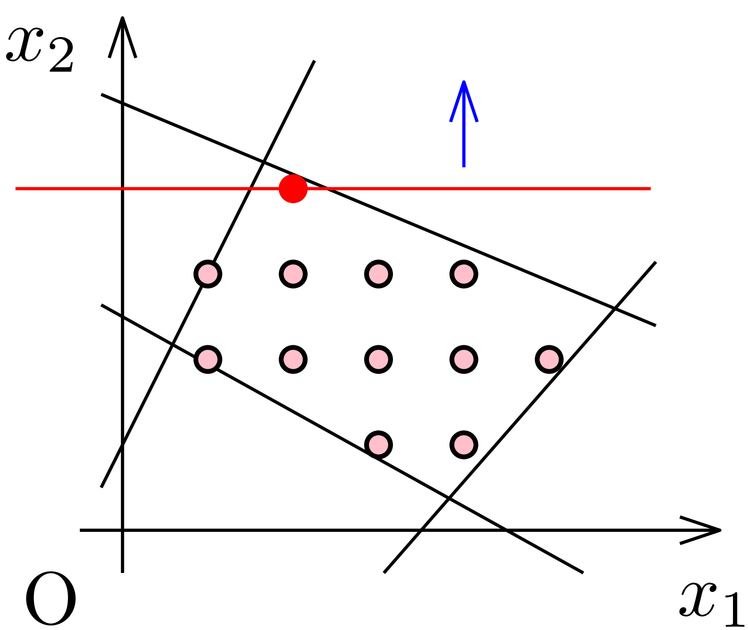
追加しても許容領域が変わらない制約



緩和



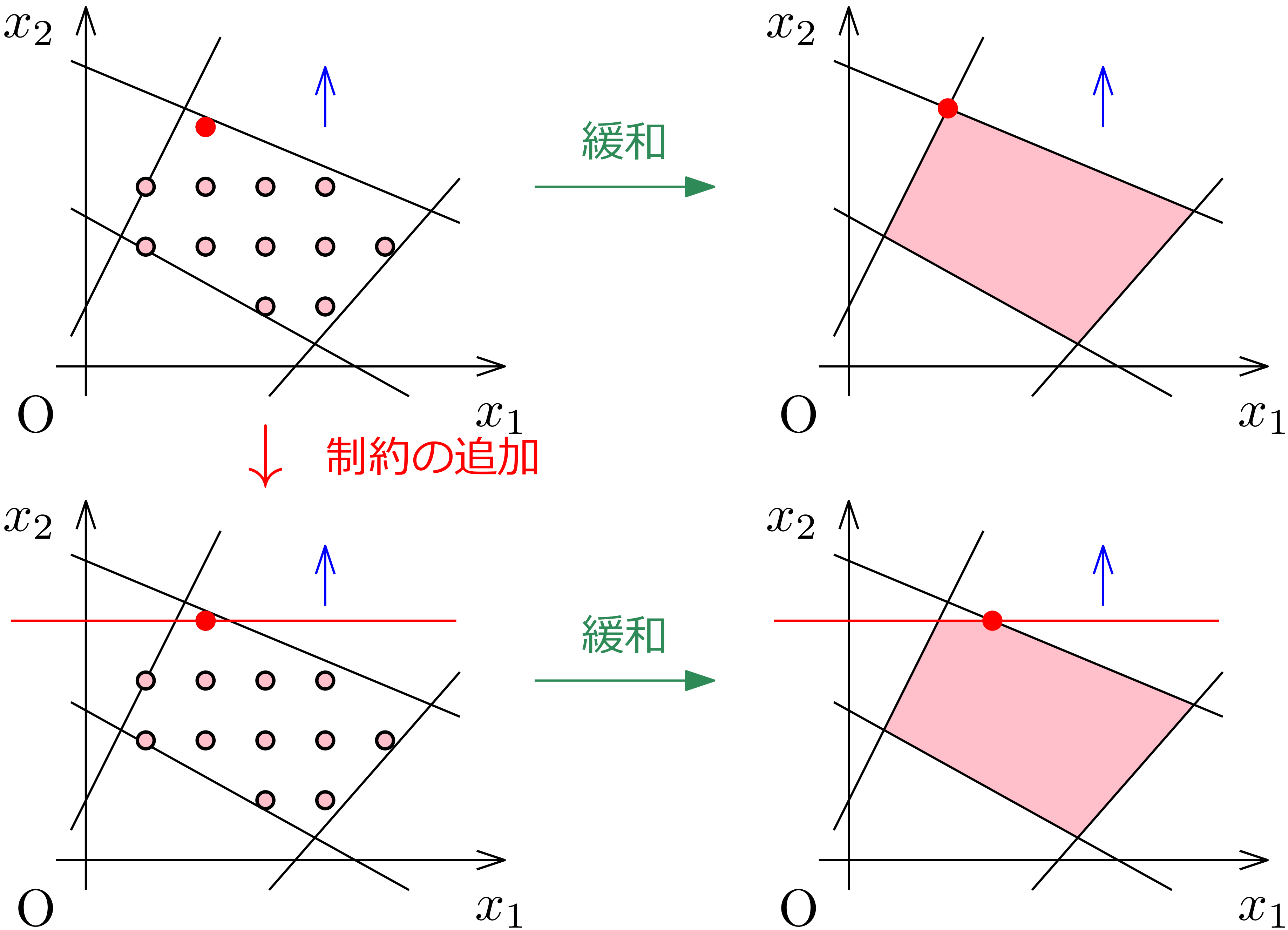
↓ 制約の追加



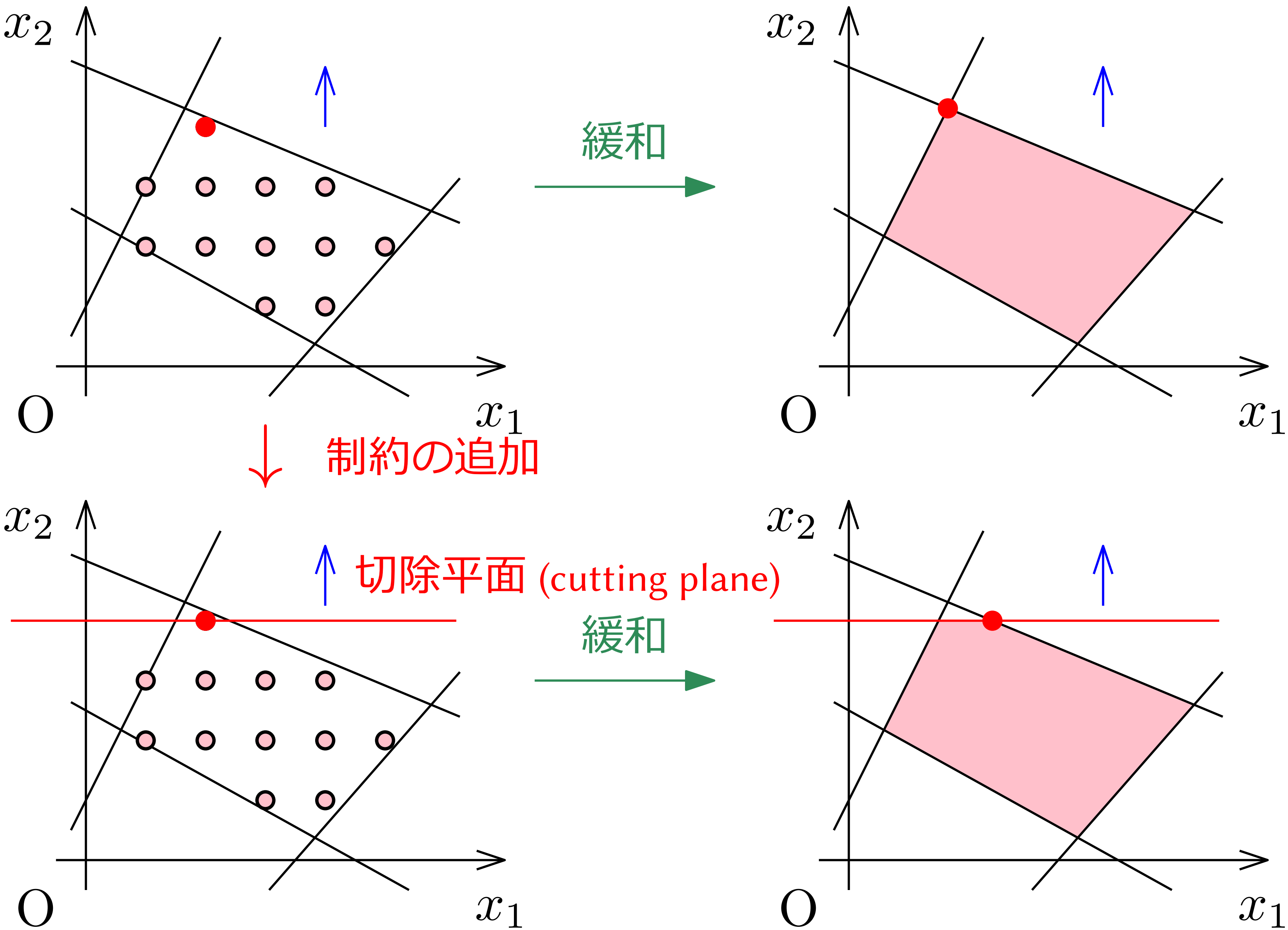
ポイント

制約を追加しても
整数計画問題の許容領域が
変わっていない

追加しても許容領域が変わらない制約



追加しても許容領域が変わらない制約



切除平面法：基本的な考え方

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

切除平面法：基本的な考え方

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

↓ 制約の追加

整数計画問題 P'

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

ポイント

制約を追加しても
P と P' の許容領域が
変わらないようにする

切除平面法：基本的な考え方

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

↓ 制約の追加

↓ 制約の追加

整数計画問題 P’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和 R’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

切除平面法：基本的な考え方

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

↓ 制約の追加

↓ 制約の追加

整数計画問題 P’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和 R’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

$\boxed{\text{考え方}}$：R の代わりに R’ を解く，これを繰り返す

様々な切除平面

これまでに 様々な切除平面が 提案されている

(1) 整数計画問題全般に使えるもの

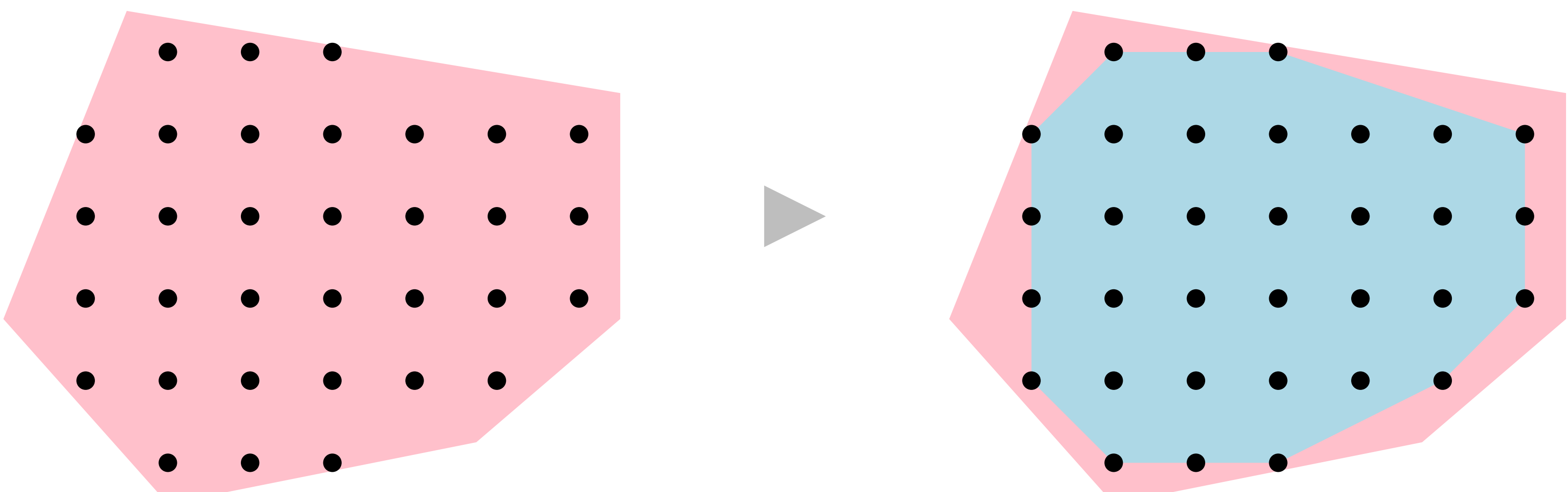
- **Gomory の小数カット** (Gomory fractional cut)
  (Gomory ’58)
- Chvátal-Gomory カット (Gomory-Chvátal cut)
  (Chvátal ’73)
- 離接カット (disjunctive cut) (Balas ’74)
- $\cdots$

(2) 特殊な問題に対して使えるもの

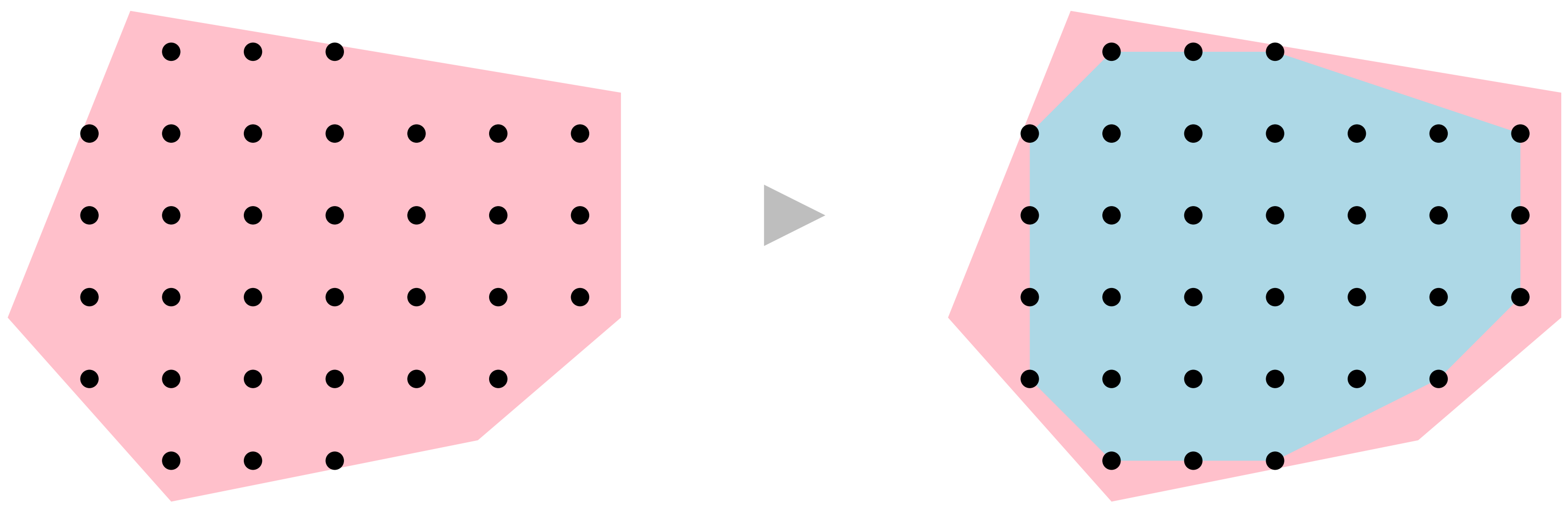
$\longrightarrow$ 次回

今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



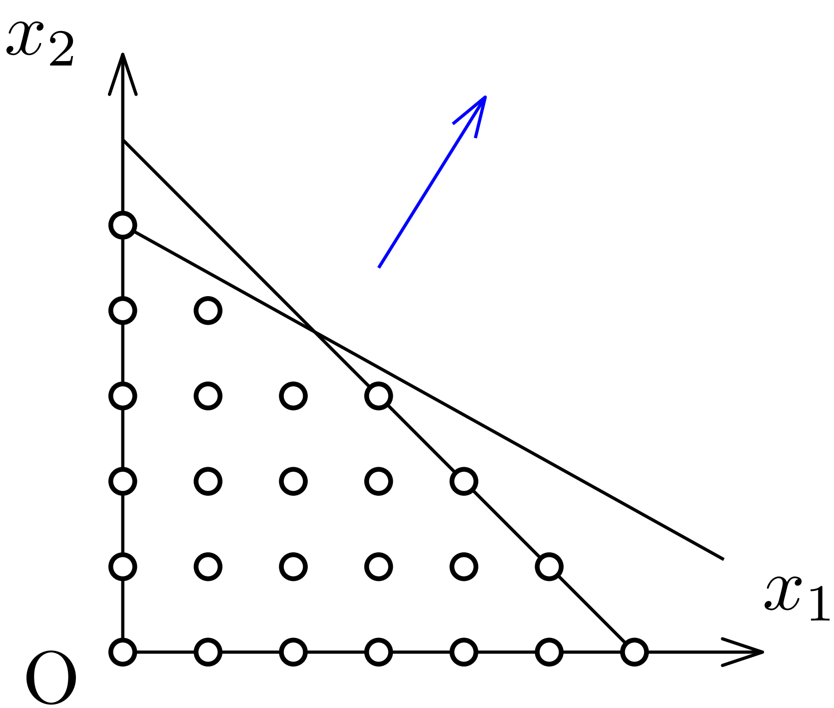
- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



整数計画問題 P

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 6, \\
 & 5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

(Bradley, Hax, Magnanti '77)



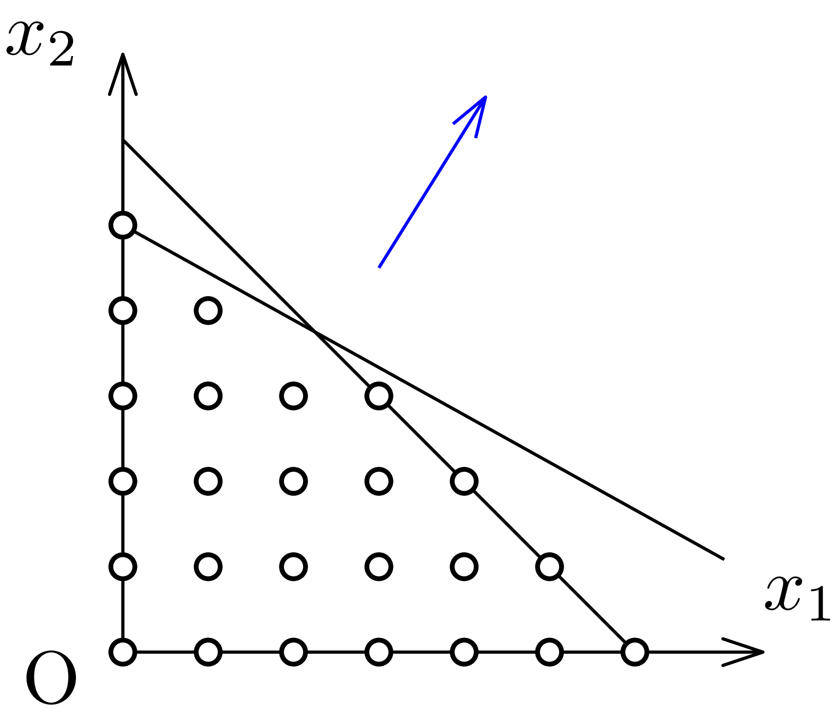
Gomory の小数カット：例 準備 (1)

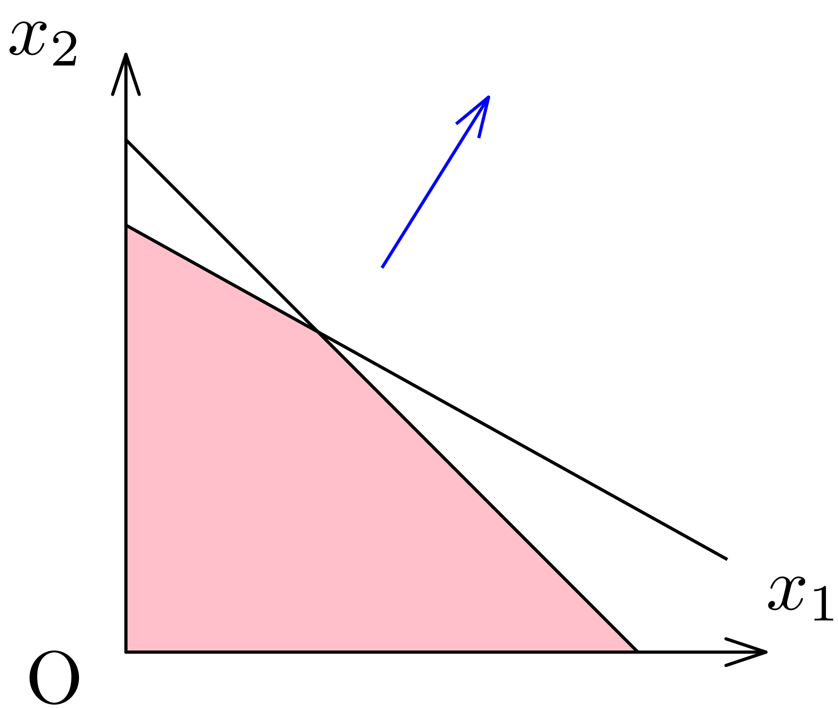
整数計画問題 P $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{array}$$

(Bradley, Hax, Magnanti '77)





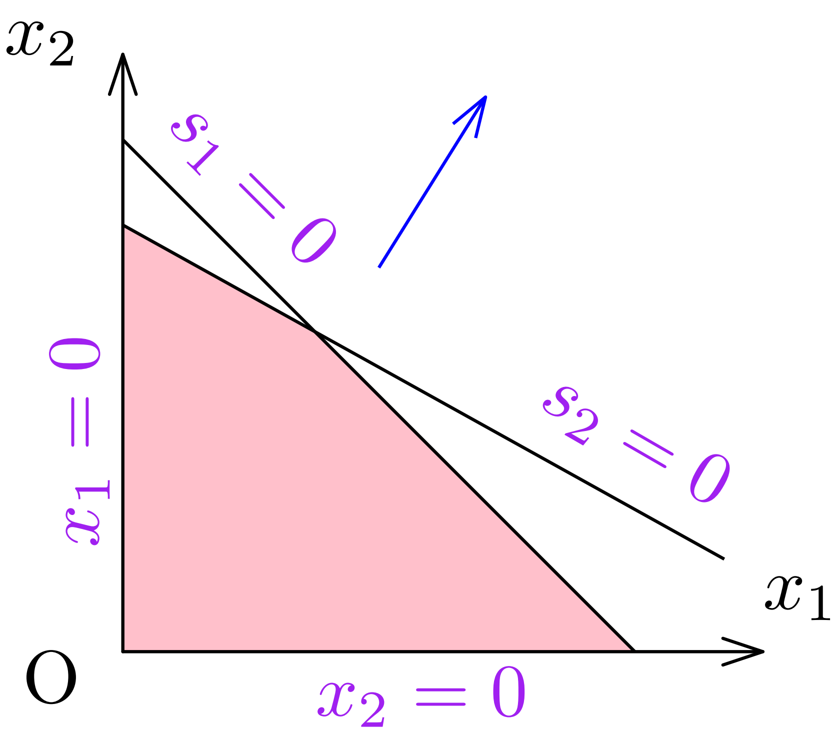
Gomory の小数カット：例 準備 (2)

線形計画緩和 R (等式標準形に書き換え)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

注

x_1, x_2 が整数 $\Rightarrow$ s_1, s_2 も整数



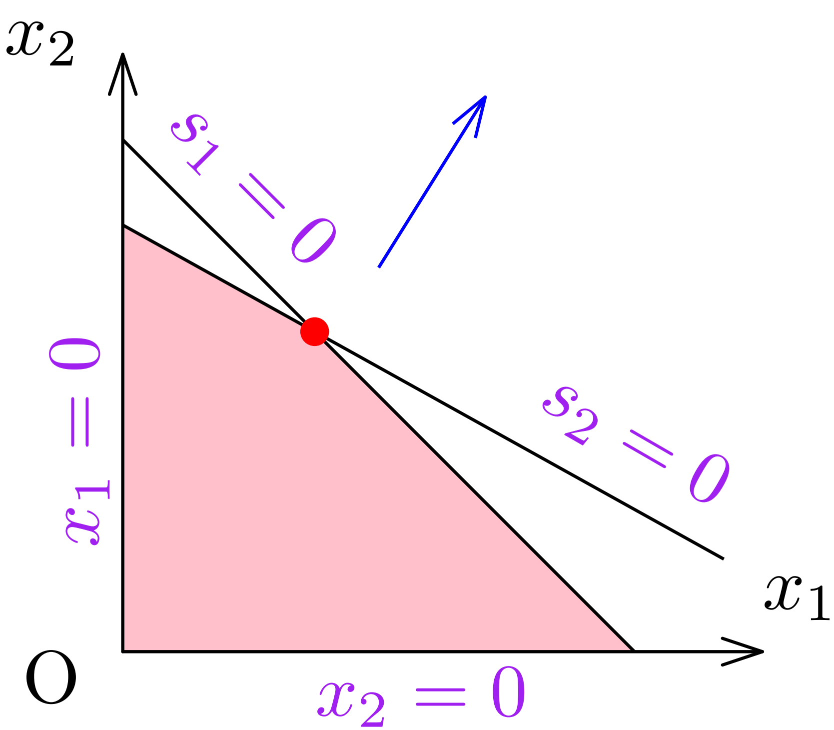
線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

端点最適解

$x_1^* = 9/4, x_2^* = 15/4,$
基底変数

$s_1^* = 0, s_2^* = 0$
非基底変数



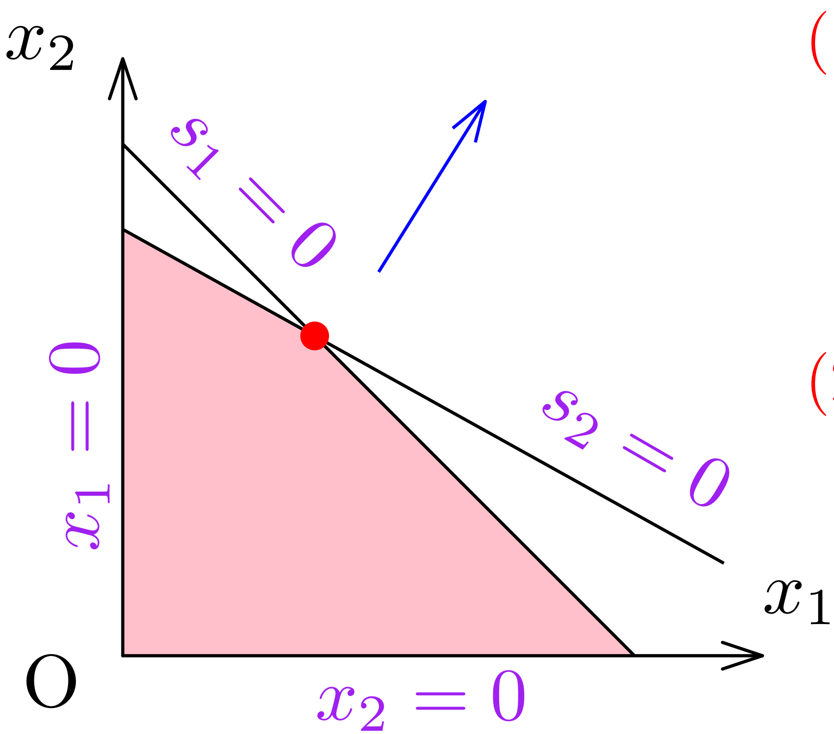
線形計画緩和 R

$$\begin{array}{lrl} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, & (1) \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, & (2) \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 & \end{array}$$

端点最適解

$x_1^* = 9/4, x_2^* = 15/4,$ 基底変数

$s_1^* = 0, s_2^* = 0$ 非基底変数



Step 1：基底変数を非基底変数で表す

$(1) \times 9 - (2) \rightsquigarrow$

$$4x_1 + 9s_1 - s_2 = 9$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

$(2) - (1) \times 5 \rightsquigarrow$

$$4x_2 - 5s_1 + s_2 = 15$$

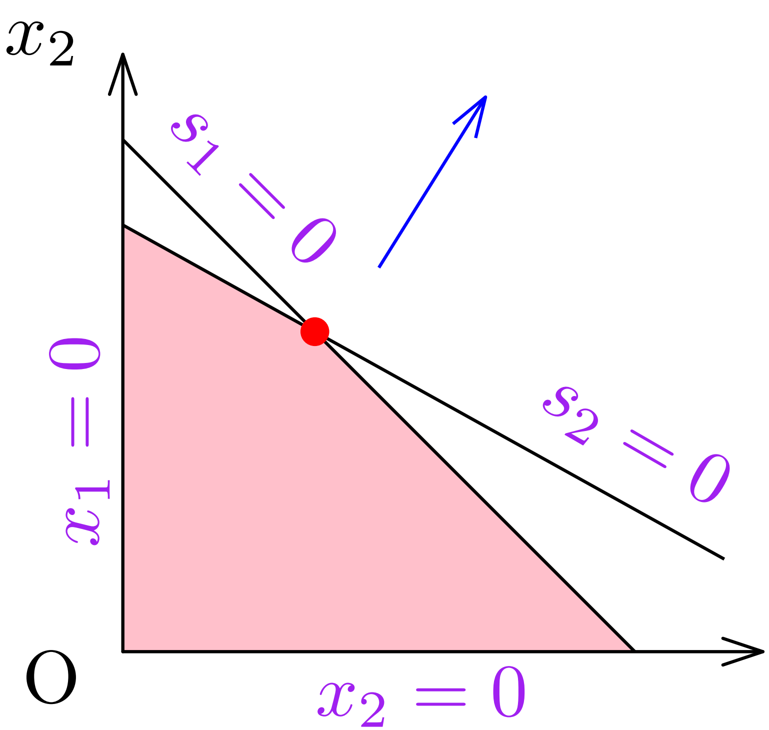
$$\therefore\ x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

Gomory の小数カット：例 (2)

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
 & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

Step 2：丸める

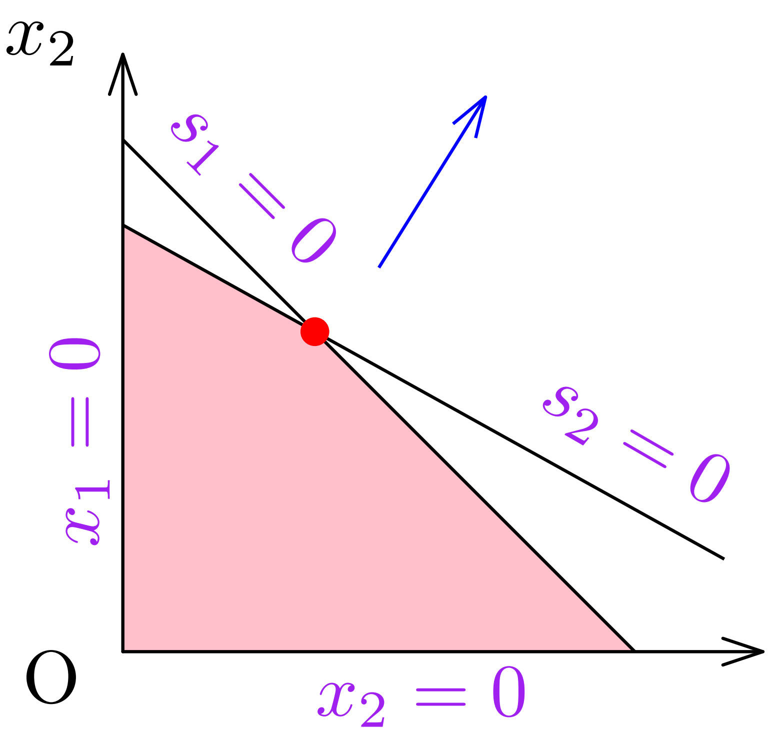


$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
 & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

Step 2：丸める



$$
x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2
$$

$$
\therefore \ x_1 + \frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = \frac{9}{4}
$$

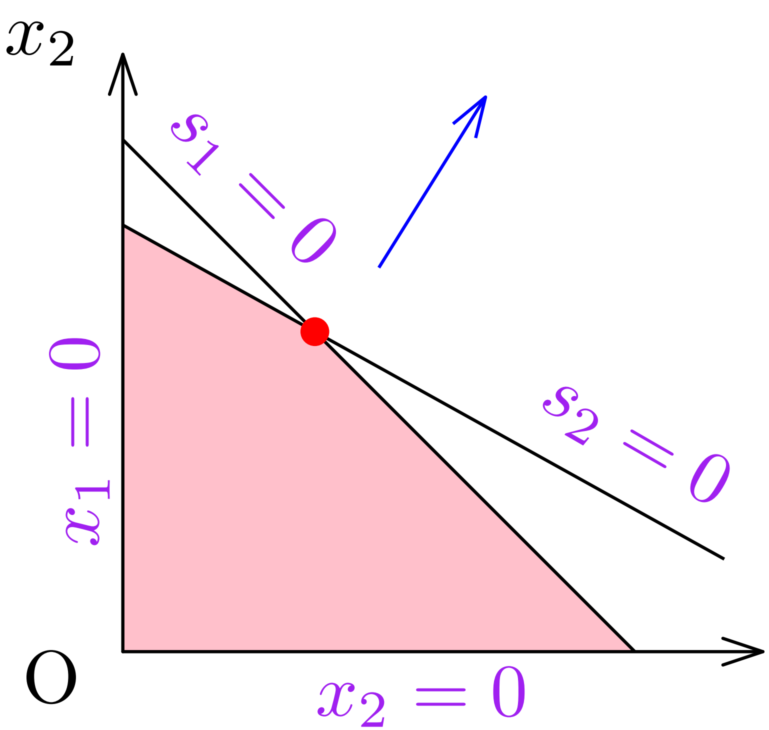
Gomory の小数カット：例 (2)

線形計画緩和 R

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\end{aligned}$$

変数の非負性から

Step 2：丸める



$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

$$\therefore \ x_1 + \frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \ x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{9}{4}$$

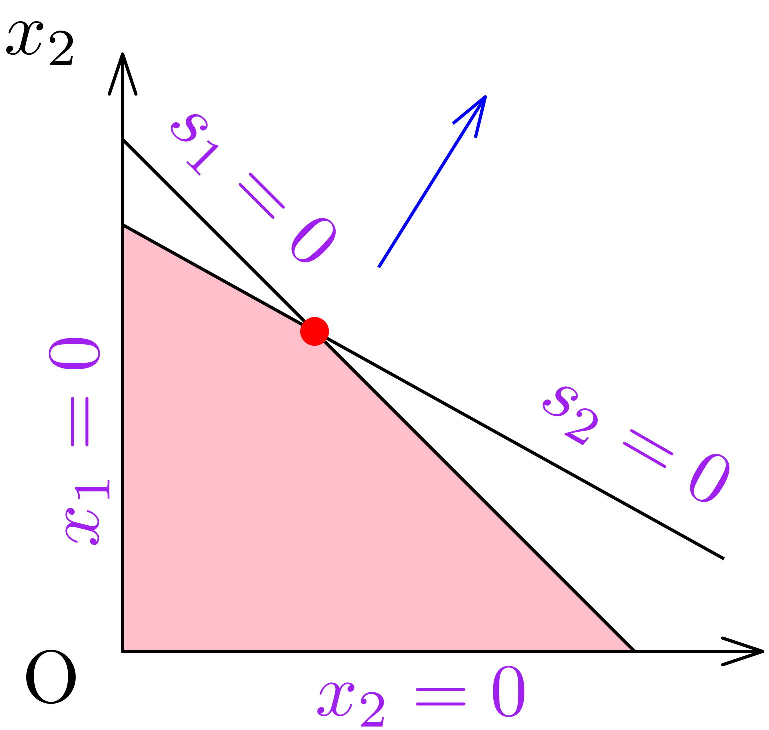
Gomory の小数カット：例 (2)

線形計画緩和 R

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：丸める



$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \\ \therefore \quad x_1 + \frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 &= \frac{9}{4} \\ \therefore \quad x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 &\leq \frac{9}{4} \\ \therefore \quad x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 &\leq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor \end{aligned}$$

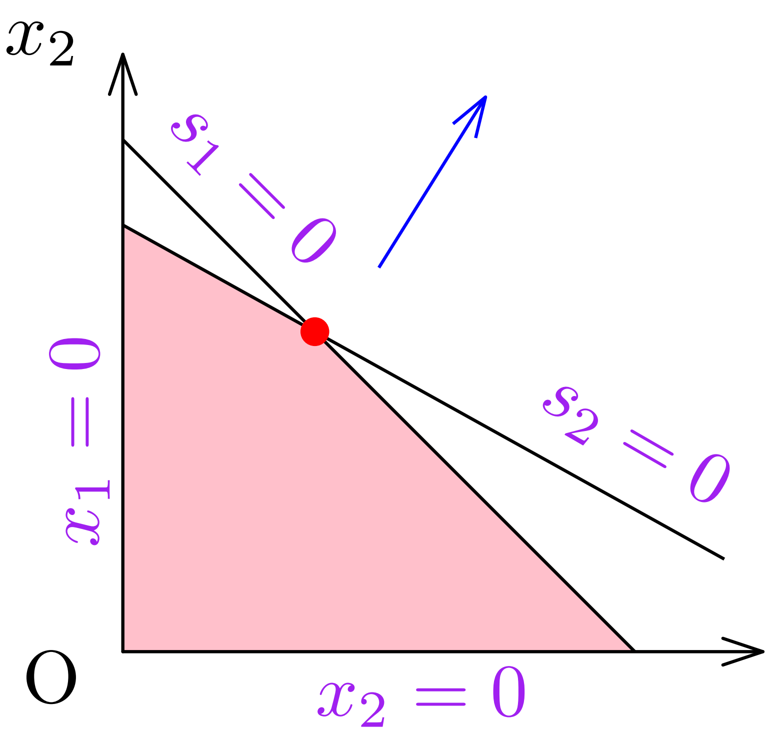
Gomory の小数カット：例 (2)

線形計画緩和 R

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：丸める



$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

$$\therefore \quad x_1 + \frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor$$

$$\therefore \quad x_1 + 2s_1 - s_2 \leq 2 \quad \longleftarrow \quad \text{これを追加}$$

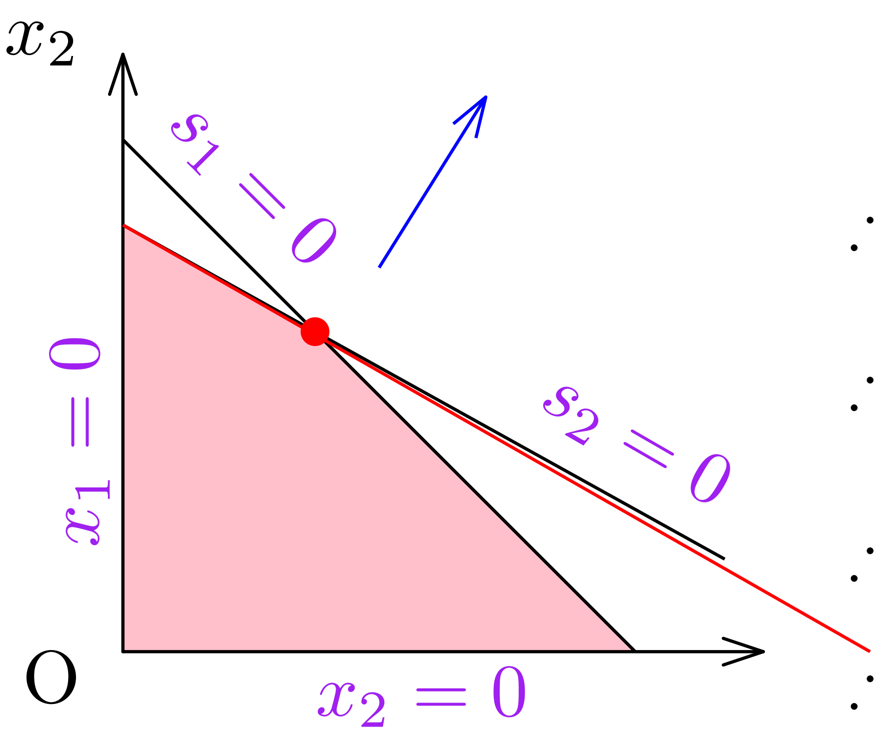
線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 2s_1 - s_2 \leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 + 2(6 - x_1 - x_2) \\
& -(45 - 5x_1 - 9x_2) \leq 2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x_1 + 7x_2 \leq 35
\end{aligned}
$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：丸める

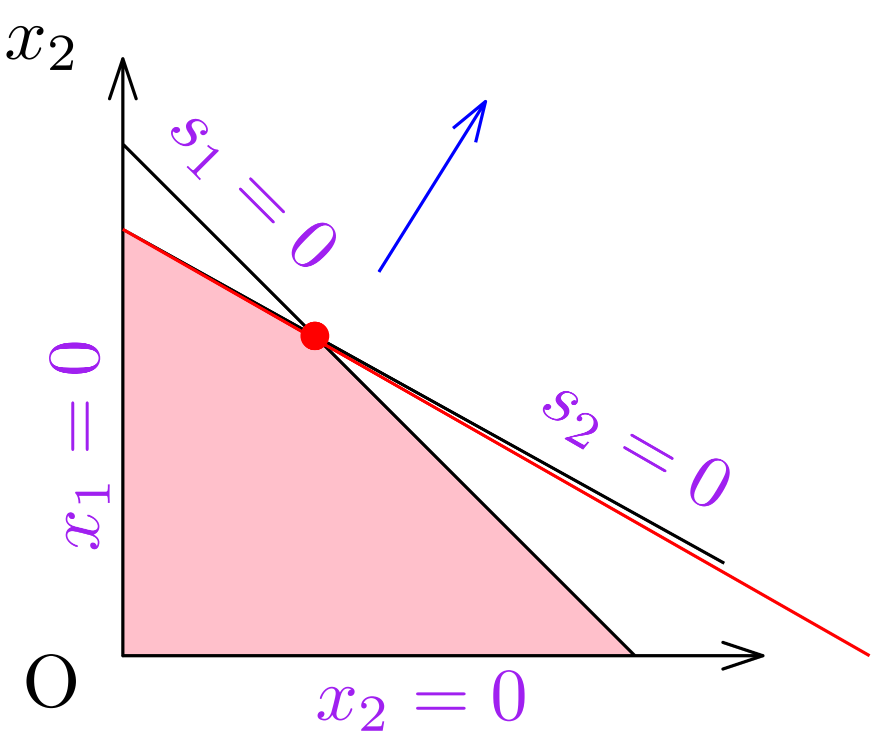


$$
\begin{aligned}
& x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \\
\therefore\ & x_1 + \frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = \frac{9}{4} \\
\therefore\ & x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{9}{4} \\
\therefore\ & x_1 + \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor \\
\therefore\ & x_1 + 2s_1 - s_2 \leq 2 \quad \longleftarrow \text{これを追加}
\end{aligned}
$$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Step 2：丸める



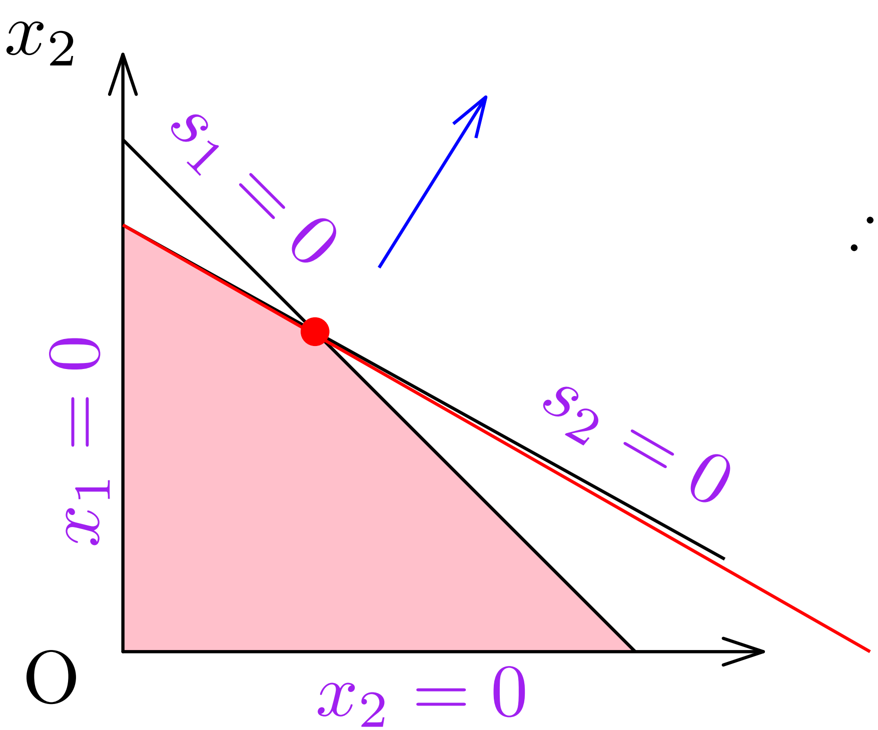
$$x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

Gomory の小数カット：例 (3)

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Step 2：丸める



$$x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

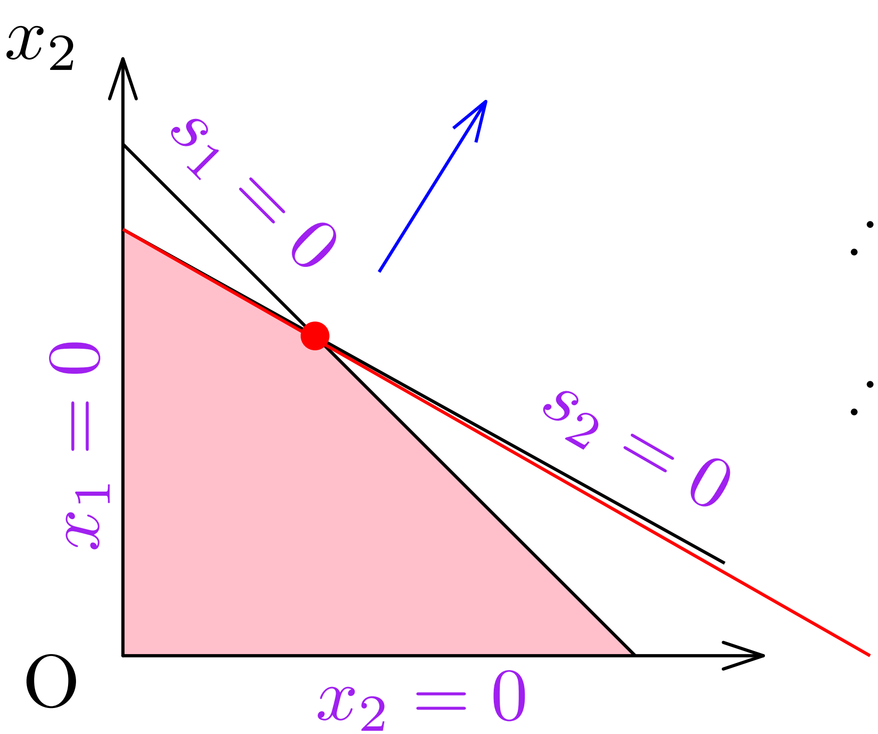
$$\therefore\ x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

変数の非負性から

Step 2：丸める



$$x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

$$\therefore\ x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$$

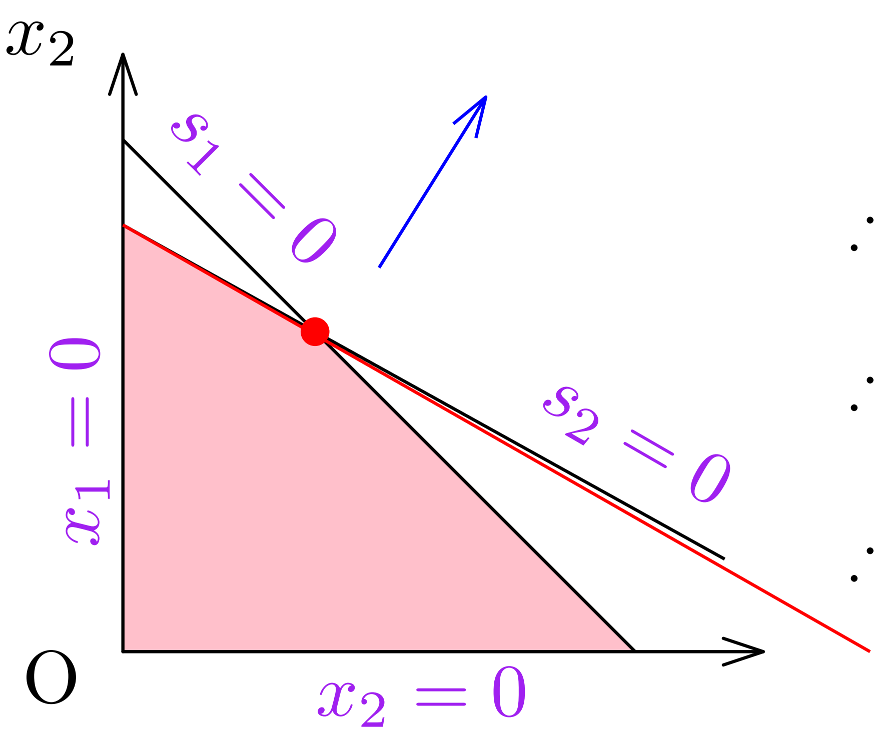
$$\therefore\ x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{15}{4}$$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：丸める



$$x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

$$\therefore\ x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$$

$$\therefore\ x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{15}{4}$$

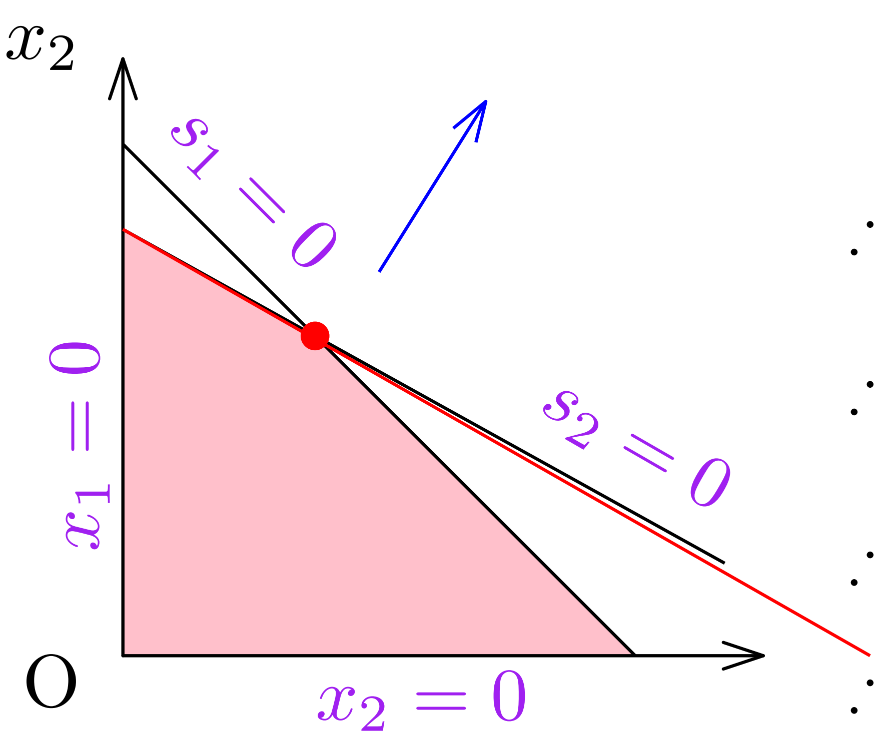
$$\therefore\ x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor$$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：丸める



$$x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2$$

$$\therefore\ x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$$

$$\therefore\ x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{15}{4}$$

$$\therefore\ x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor$$

$$\therefore\ x_2 - 2s_1 \leq 3$$ ← これを追加

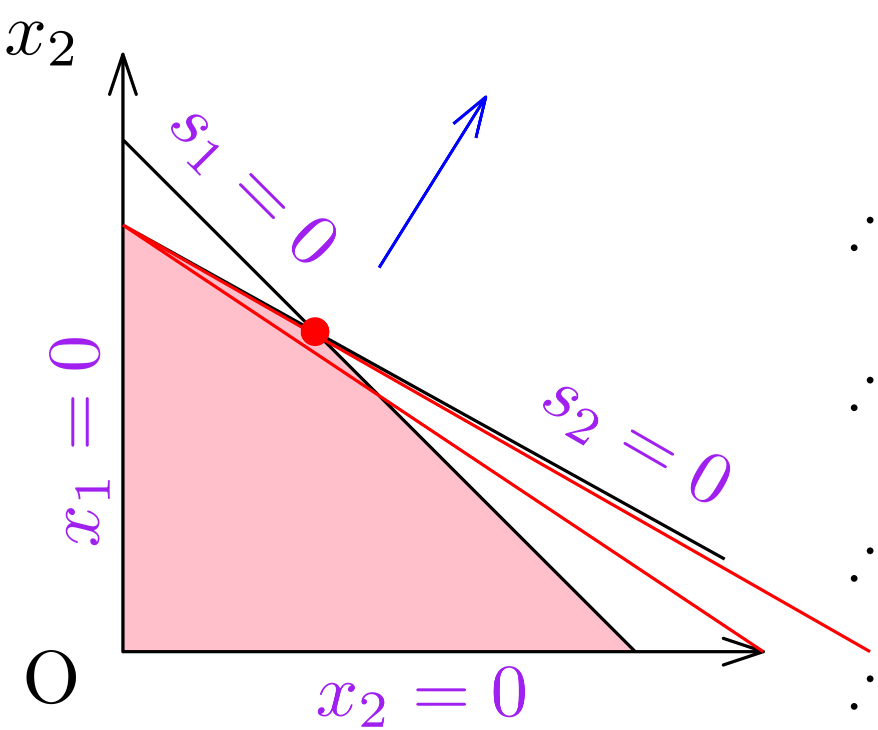
線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_2 - 2s_1 \leq 3 \\
\Leftrightarrow\ & x_2 - 2(6 - x_1 - x_2) \leq 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 15
\end{aligned}
$$

変数が整数だと仮定すると

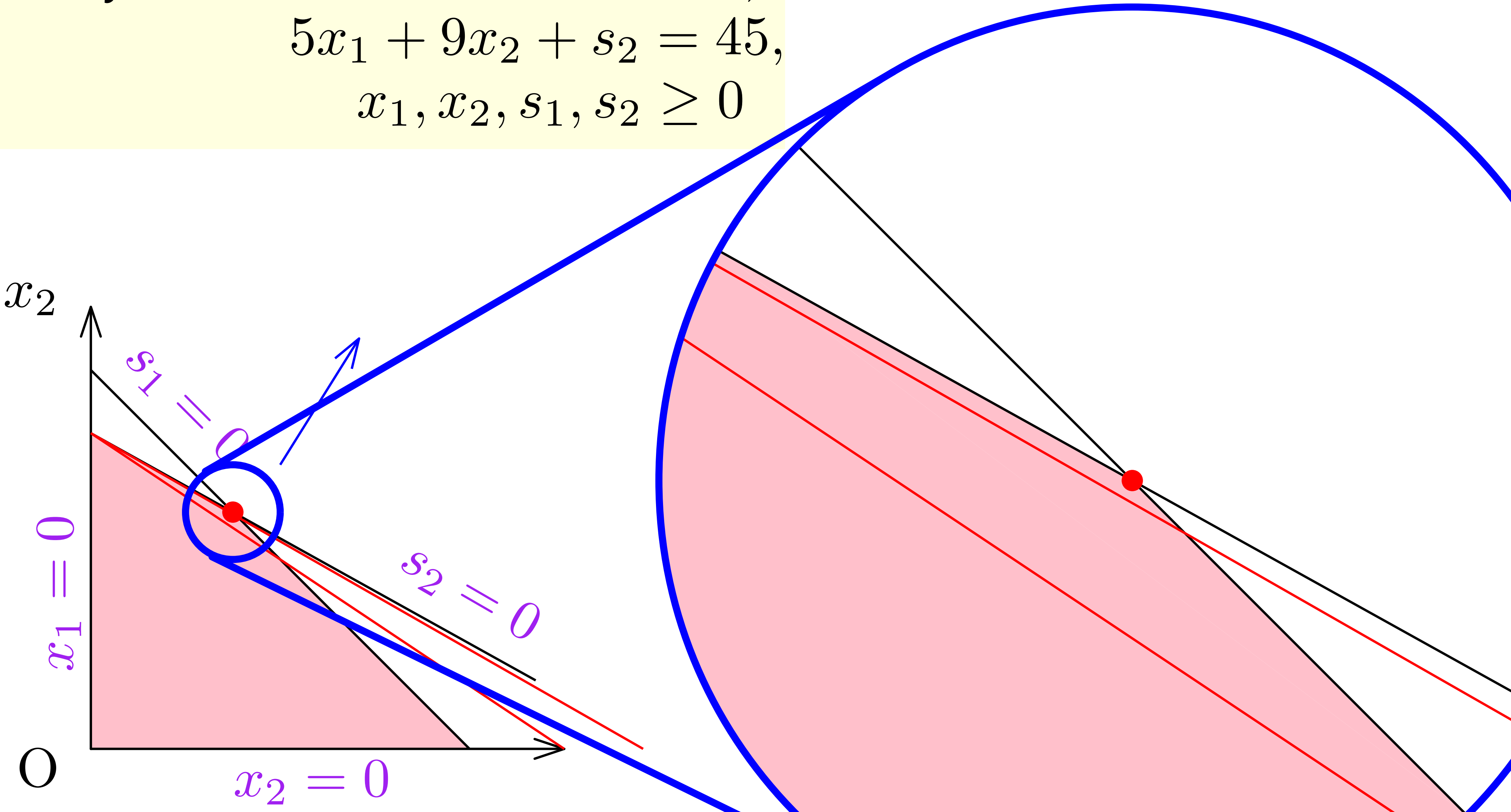
Step 2：丸める



$$
\begin{aligned}
& x_2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 \\
\therefore\ & x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4} \\
\therefore\ & x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{15}{4} \\
\therefore\ & x_2 + \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor \\
\therefore\ & x_2 - 2s_1 \leq 3 \qquad \longleftarrow \text{これを追加}
\end{aligned}
$$

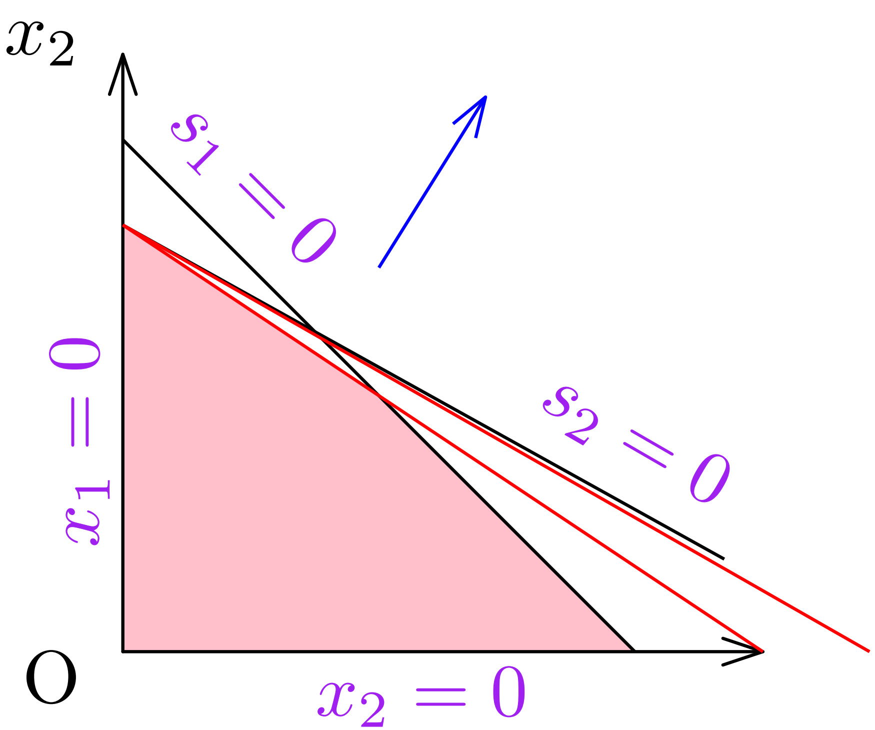
線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$



線形計画緩和 R'

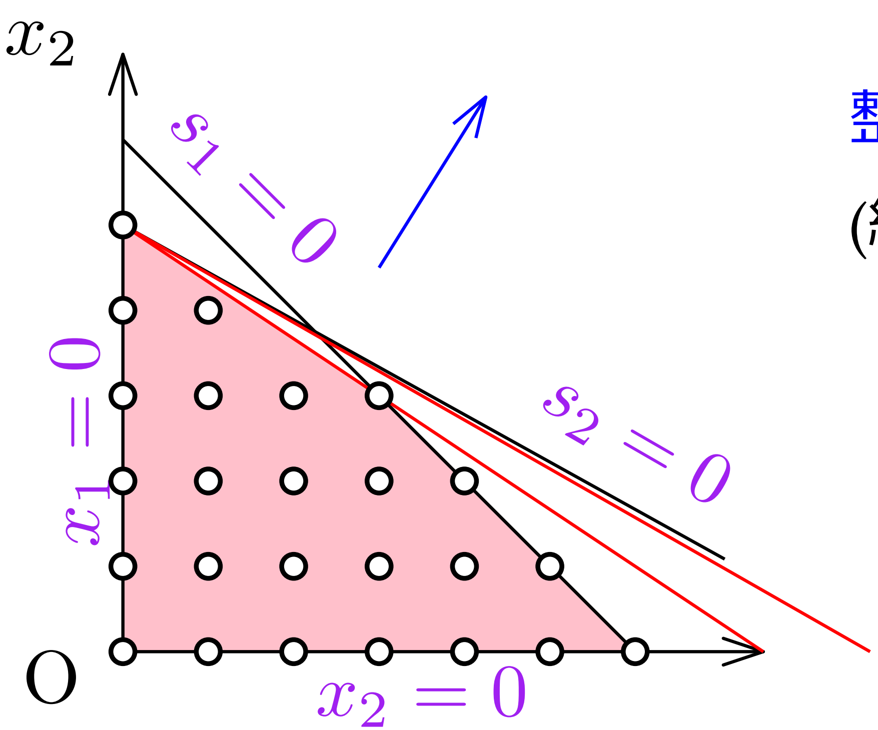
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& 4x_1 + 7x_2 \leq 35, \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 15, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Gomory の小数カット：例 (5)

線形計画緩和 R'

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& 4x_1 + 7x_2 \leq 35, \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 15, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$



整数計画問題の許容領域は変わらない

(緩和が **強化** された)

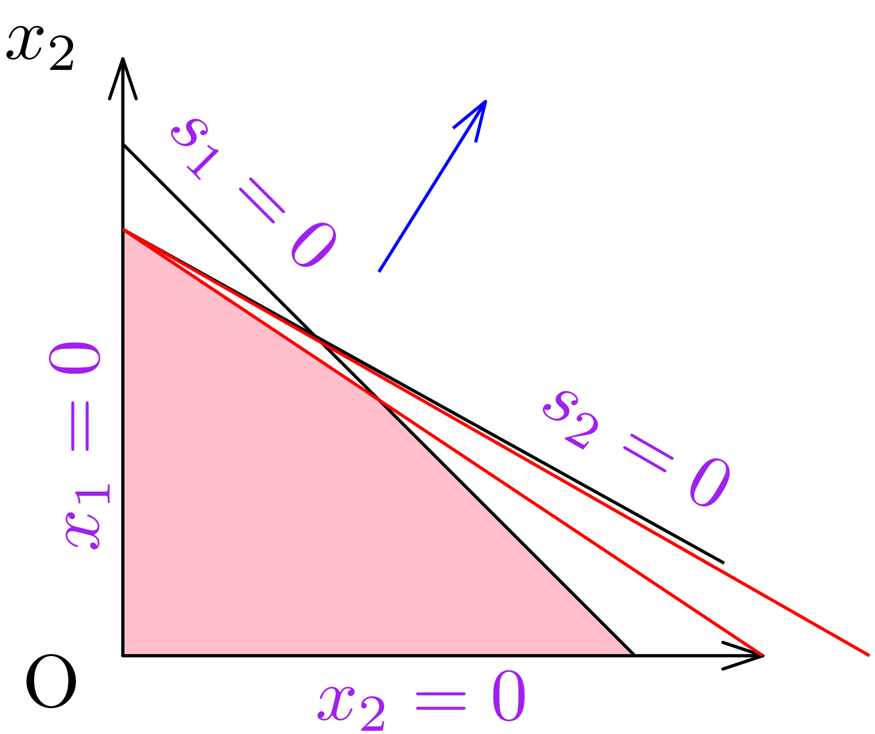
Gomoryの小数カット：例 (6)

線形計画緩和 R' (等式標準形に書き換え)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
 & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
 & 4x_1 + 7x_2 + s_3 = 35, \\
 & 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 15, \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

注

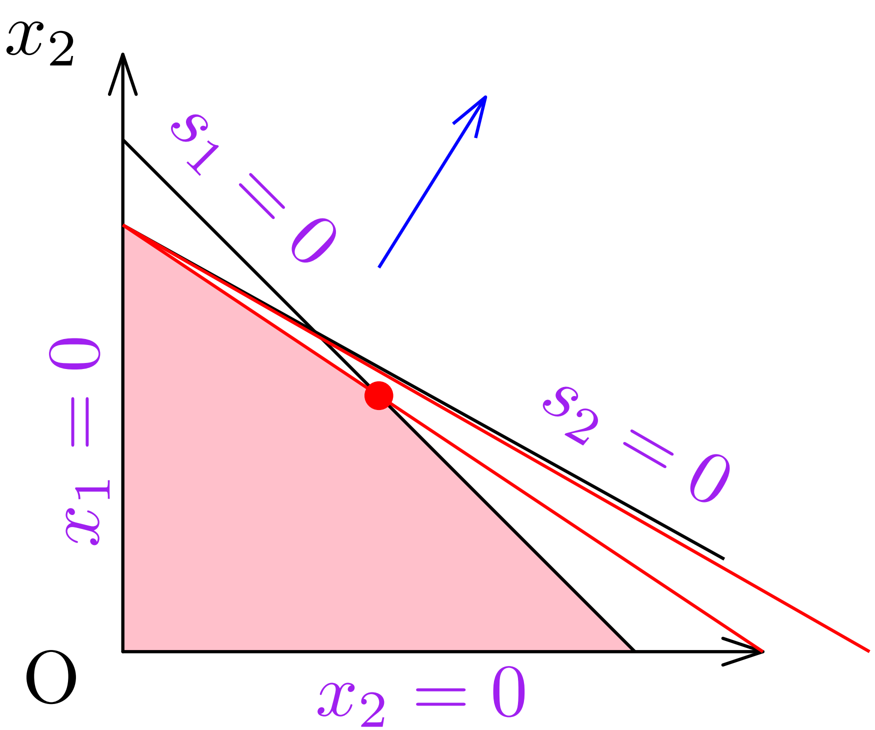
x_1, x_2 が整数 $\Rightarrow$
s_1, s_2, s_3, s_4 も整数



Gomory の小数カット：例 (7)

線形計画緩和 R’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & 4x_1 + 7x_2 + s_3 = 35, \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 15, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$



端点最適解

$$x_1^* = 3, x_2^* = 3,$$
$$s_2^* = 3, s_3^* = 2,$$

基底変数

$$s_1^* = 0, s_4^* = 0$$

非基底変数

線形計画緩和 R'

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& 4x_1 + 7x_2 + s_3 = 35, \\
& 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 15, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$

端点最適解

$$x_1^* = 3, x_2^* = 3,$$
$$s_2^* = 3, s_3^* = 2,$$

基底変数

$$s_1^* = 0, s_4^* = 0$$

非基底変数

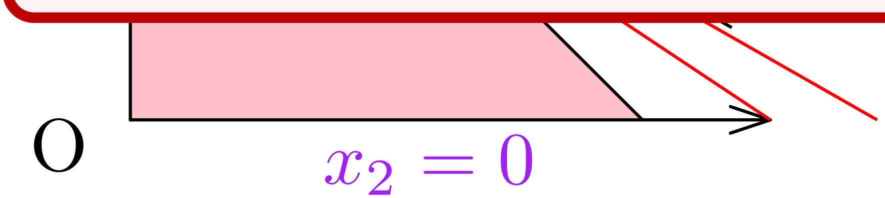
線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ が R の最適解である

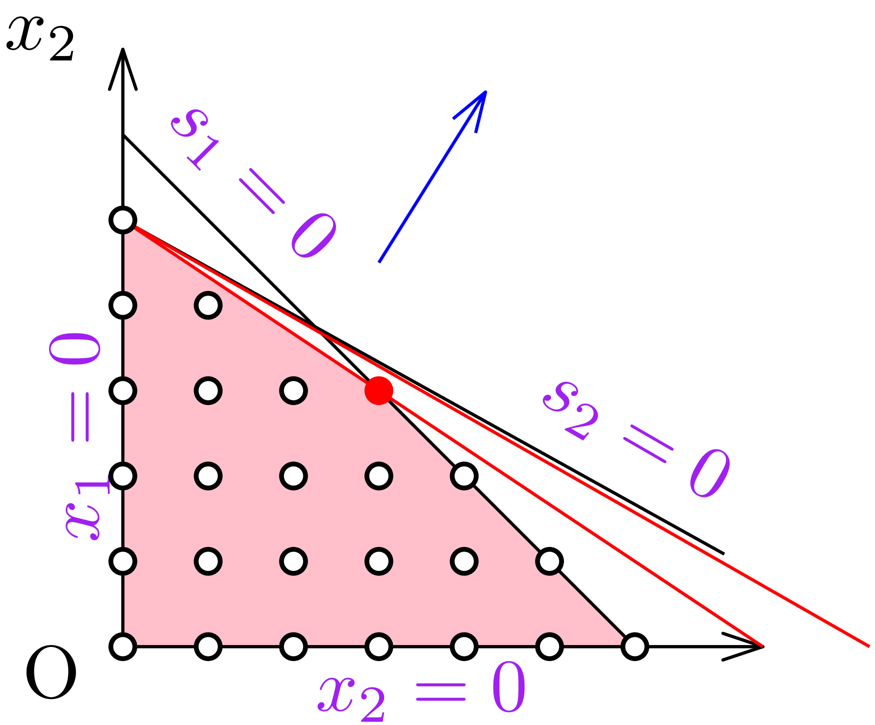
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ は P の最適解である



線形計画緩和 R’

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& 4x_1 + 7x_2 + s_3 = 35, \\
& 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 15, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$



端点最適解

$$x_1^* = 3, x_2^* = 3,$$
$$s_2^* = 3, s_3^* = 2,$$

基底変数

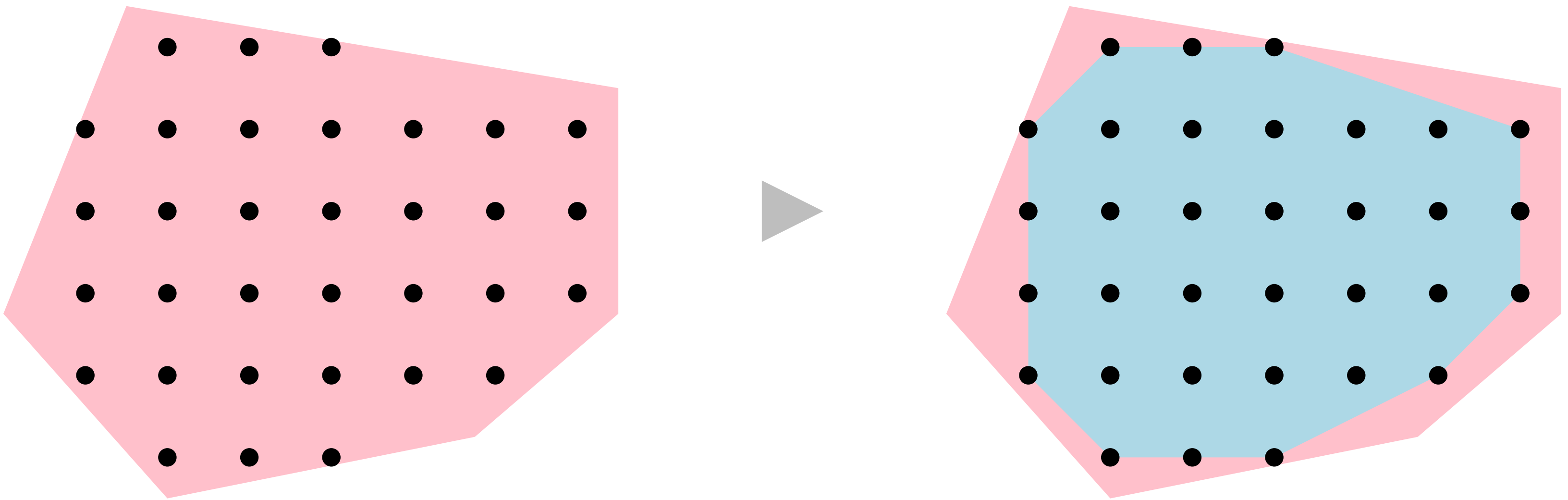
$$s_1^* = 0, s_4^* = 0$$

非基底変数

元の整数計画問題 P の最適解が得られた！

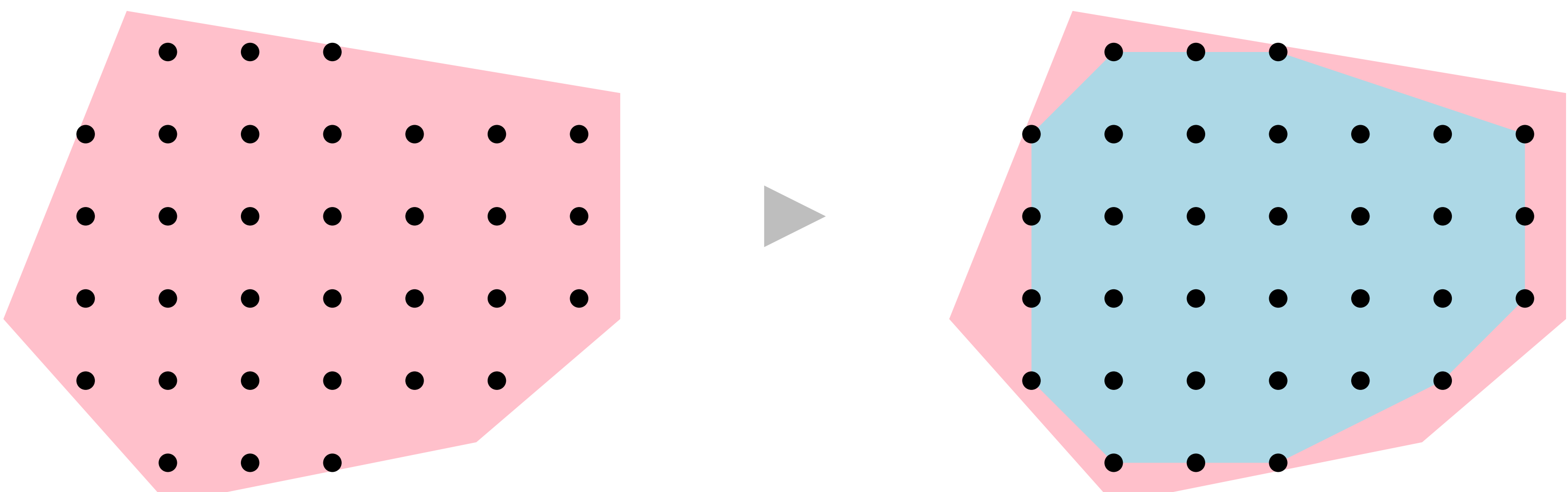
今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



整数計画問題 P (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

仮定：最適解を持つ

Gomory の小数カット：設定

整数計画問題 P (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

仮定：最適解を持つ

$A, \boldsymbol{b}$ の各成分は整数

仮定：最適解を持つ

Gomory の小数カット：設定

整数計画問題 P (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

仮定：最適解を持つ

$A, \boldsymbol{b}$ の各成分は整数

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

仮定：最適解を持つ

$\Downarrow$

端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を考える

単体法 (復習)

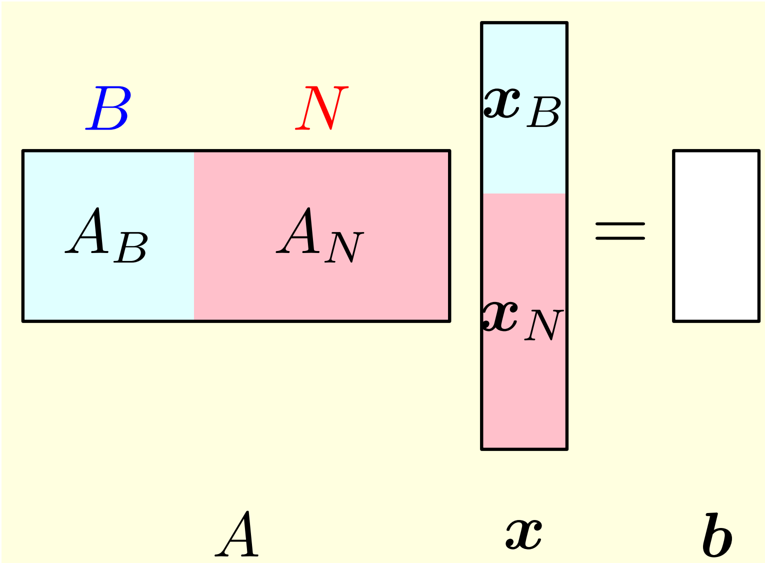
等式標準形

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合



$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ が最適解 $\Rightarrow$
この部分 $\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Gomory の小数カット：アルゴリズム (1)

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を考える

$$\boldsymbol{x}^*_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}^*_N = \boldsymbol{0}$$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を考える

$$\boldsymbol{x}_B^* = A_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合

(1) $\boldsymbol{x}_B^*$ のすべての成分が整数であるとき

$\boldsymbol{x}^*$ は整数計画問題 P の最適解 $\rightarrow$ 終了

線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ が R の最適解である

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ は P の最適解である

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を考える

$$\boldsymbol{x}^*_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}^*_N = \boldsymbol{0}$$

N = 非基底変数の添字集合
B = 基底変数の添字集合

(2) $\boldsymbol{x}^*_B$ のある成分が非整数であるとき

x_i^* が非整数だと仮定 ($i \in B$)

$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$ より

$$x_i + \underline{(A_B^{-1}A_N)_i}\boldsymbol{x}_N = \underline{(A_B^{-1})_i}\boldsymbol{b}$$

行列の第 i 行

$\Rightarrow$ 制約 $x_i + \underline{\lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor}\boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b} \rfloor$ を追加

各成分の小数部切り捨て

Gomory の小数カット：アルゴリズム (3)

線形計画緩和 R

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

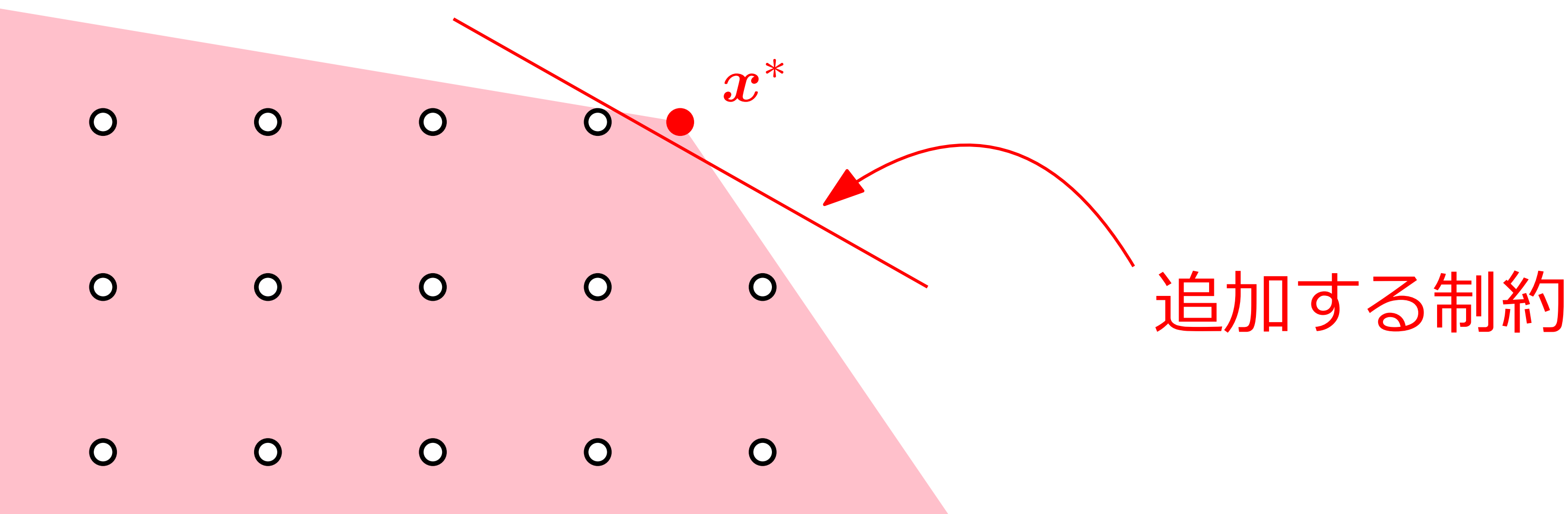
追加する制約

$$x_i + \lfloor (A_B^{-1} A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b} \rfloor$$

成り立つ性質

(a) $\boldsymbol{x}^*$ は追加する制約を満たさない

(b) $\boldsymbol{x}$ が P の許容解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$ は追加する制約を満たす



線形計画緩和 R

minimize	$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$
	$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$

追加する制約

$$x_i + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b} \rfloor$$

$$\boldsymbol{x}_B^* = A_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$$

(a) $\boldsymbol{x}^*$ は追加する制約を満たさない

$\boldsymbol{x}_B^* = A_B^{-1}\boldsymbol{b}, i \in B$ なので，$x_i^* = (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b}$

x_i^* は非整数なので，$x_i^* > \lfloor x_i^* \rfloor = \lfloor (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b} \rfloor$

$\boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$ なので，

$$x_i^* + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N^* = x_i^* > \lfloor (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b} \rfloor \qquad \square$$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

追加する制約

$$x_i + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b} \rfloor$$

(b) $\boldsymbol{x}$ が P の許容解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$ は追加する制約を満たす

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より，$\boldsymbol{x}_B + A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

したがって，$x_i + (A_B^{-1}A_N)_i\boldsymbol{x}_N = (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b}$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

追加する制約

$$x_i + \lfloor (A_B^{-1} A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b} \rfloor$$

(b) $\boldsymbol{x}$ が P の許容解 ⇒ $\boldsymbol{x}$ は追加する制約を満たす

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より，$\boldsymbol{x}_B + A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

したがって，$x_i + (A_B^{-1} A_N)_i \boldsymbol{x}_N = (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ より，$x_i + \lfloor (A_B^{-1} A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b}$

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

追加する制約

$$x_i + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i \boldsymbol{b} \rfloor$$

(b) $\boldsymbol{x}$ が P の許容解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$ は追加する制約を満たす

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より，$\boldsymbol{x}_B + A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

したがって，$x_i + (A_B^{-1}A_N)_i\boldsymbol{x}_N = (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ より，$x_i + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ より，$x_i + \lfloor (A_B^{-1}A_N)_i \rfloor \boldsymbol{x}_N \leq \lfloor (A_B^{-1})_i\boldsymbol{b} \rfloor$

□

整数計画問題 P

$\downarrow$ 緩和

線形計画緩和 R

Gomory の小数カット：アルゴリズム (6)

整数計画問題 P

$\downarrow$ 緩和

線形計画緩和 R $\longrightarrow$ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$

整数計画問題 P

↓ 緩和

線形計画緩和 R → 端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$

↙ 制約の追加

線形計画緩和 R^1

Gomory の小数カット：アルゴリズム (6)

整数計画問題 P

$\downarrow$ 緩和

線形計画緩和 R $\longrightarrow$ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$

$\swarrow$ 制約の追加

線形計画緩和 R^1 $\longrightarrow$ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*1}$

$\swarrow$ 制約の追加

線形計画緩和 R^2 $\longrightarrow$ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*2}$

$\swarrow$ 制約の追加

線形計画緩和 R^3 $\longrightarrow$ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*3}$

Gomory の小数カット：アルゴリズム (6)

整数計画問題 P

緩和

線形計画緩和 R → 端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$

制約の追加

線形計画緩和 R^1 → 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*1}$

制約の追加

線形計画緩和 R^2 → 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*2}$

制約の追加

線形計画緩和 R^3 → 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*3} \in \mathbb{Z}^n$

このとき，$\boldsymbol{x}^{*3}$ は P の最適解

Gomory の小数カット：定理

定理 (Gomory '63)

小数カットを 適切に 追加していくことによって，
有限回の反復の後，整数計画問題 P の最適解が得られる

整数計画問題 P

↓ 緩和

線形計画緩和 R ⟶ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^*$

制約の追加

線形計画緩和 R^1 ⟶ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*1}$

制約の追加

線形計画緩和 R^2 ⟶ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*2}$

制約の追加

線形計画緩和 R^3 ⟶ 端点最適解 $\boldsymbol{x}^{*3} \in \mathbb{Z}^n$

このとき，$\boldsymbol{x}^{*3}$ は P の最適解

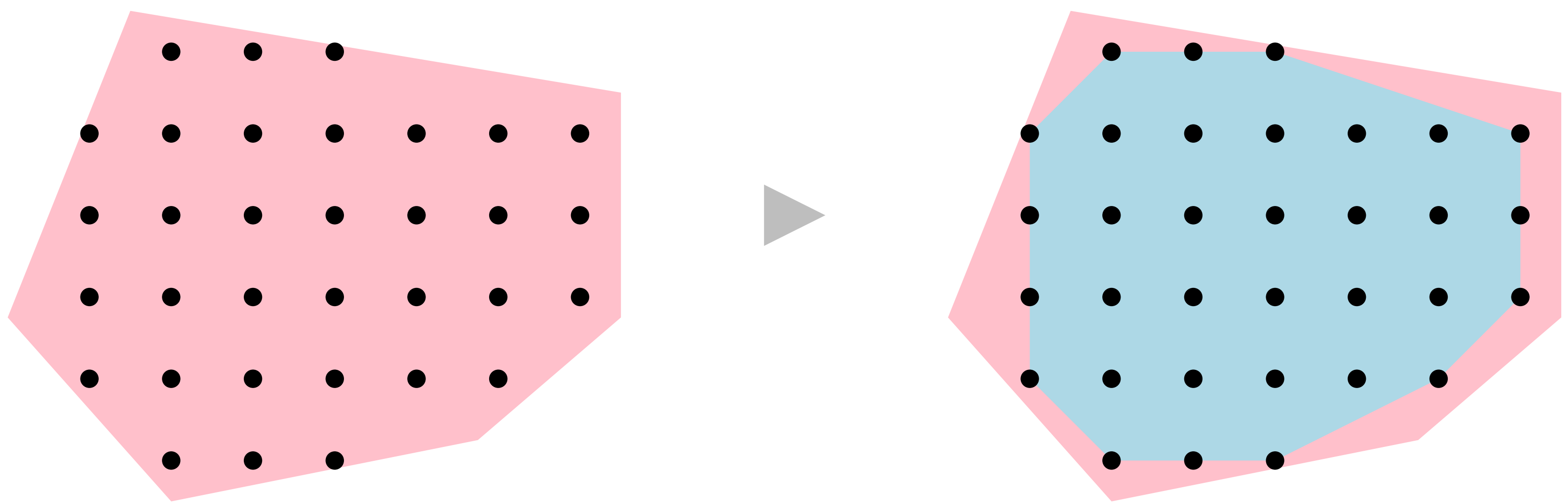
↓

この反復は
必ず停止する

実践的な側面：Zanette, Fischetti, Balas '11

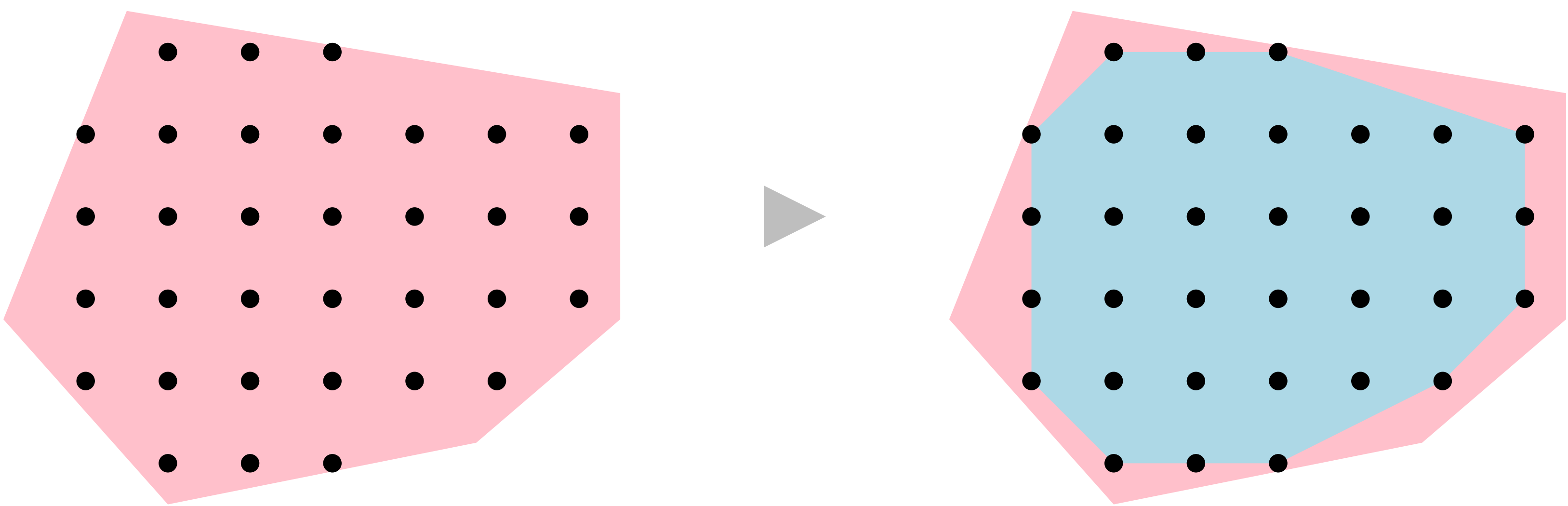
今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



様々な切除平面 (再掲)

これまでに 様々な切除平面が 提案されている

(1) 整数計画問題全般に使えるもの

- **Gomory の小数カット** (Gomory fractional cut) (Gomory '58)
- Chvátal-Gomory カット (Gomory-Chvátal cut) (Chvátal '73)
- 離接カット (disjunctive cut) (Balas '74)
- $\cdots$

(2) 特殊な問題に対して使えるもの

$\longrightarrow$ 次回

切除平面が満たさないといけない性質

設定：

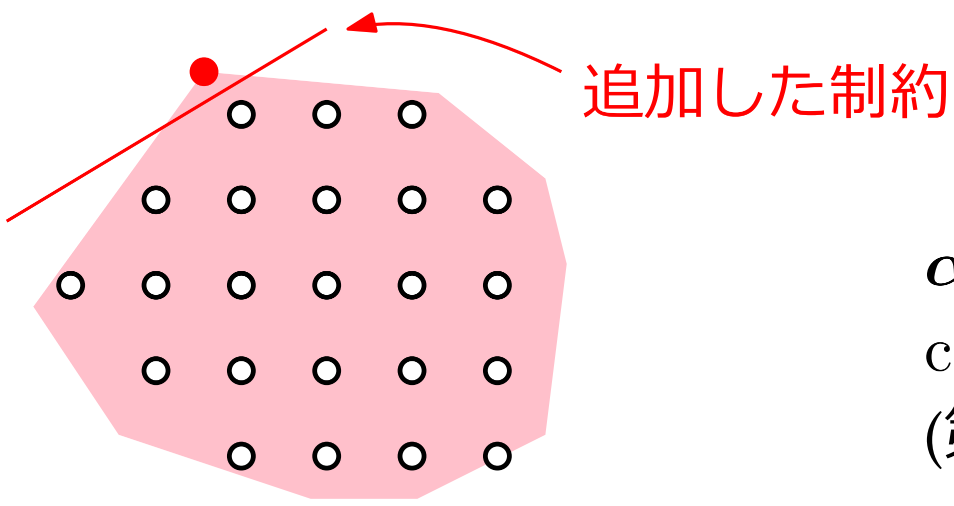
$S =$ 整数計画問題 P の許容領域

$\boldsymbol{x}^* =$ 整数計画問題 P の線形計画緩和の端点最適解 (の 1 つ)

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$：追加した制約

切除平面 (追加した制約) が満たさないといけない性質

1. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* < \beta$ ($\boldsymbol{x}^*$ は追加した制約を満たさない)
2. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \geq \beta$ ($\forall\ \boldsymbol{z} \in S$) (P の許容解は追加した制約を満たす)



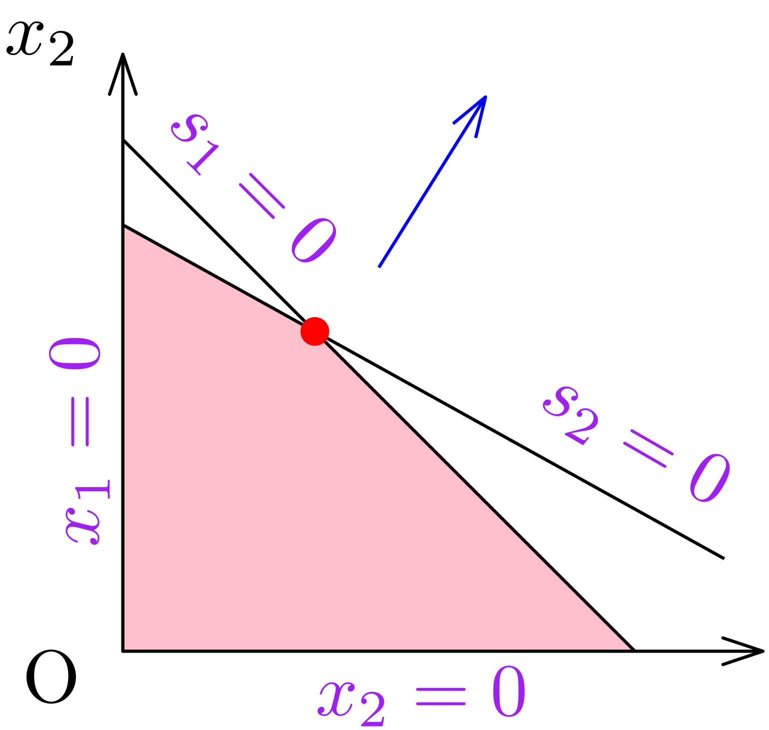
$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ は
$\mathrm{conv}(S)$ に対する妥当不等式でもある
(第 2 回講義 参照)

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める

$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

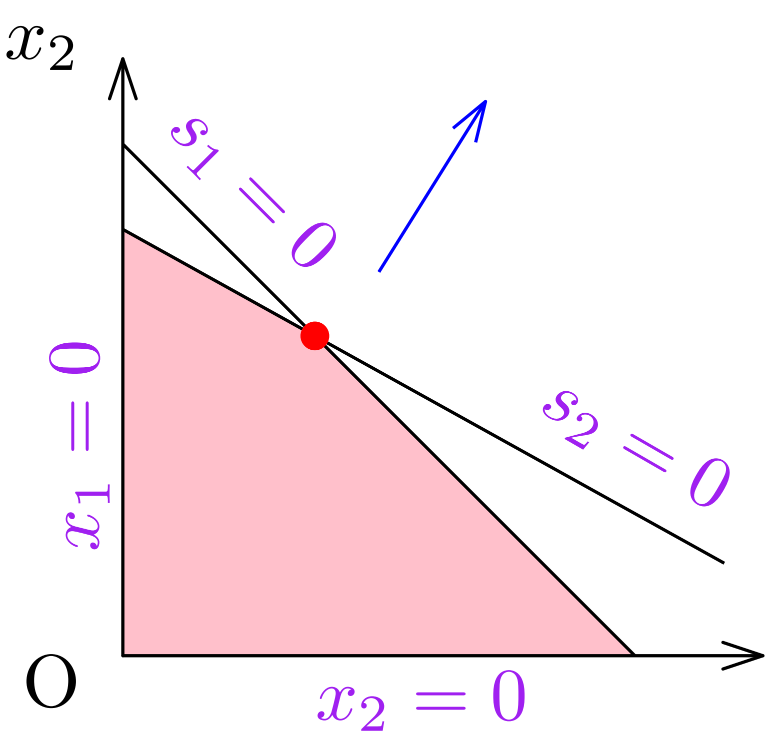


線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める

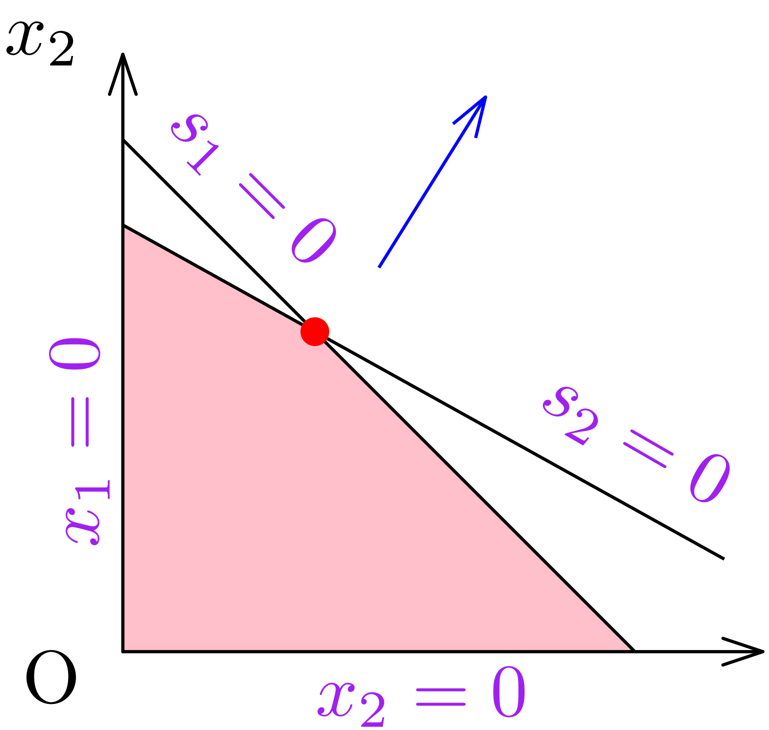
$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times\mathbf{3}$$



Chvátal-Gomory カット：例

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$



Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める

$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times \mathbf{3}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \frac{27}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 = \frac{27}{4}$$

Chvátal-Gomory カット：例

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

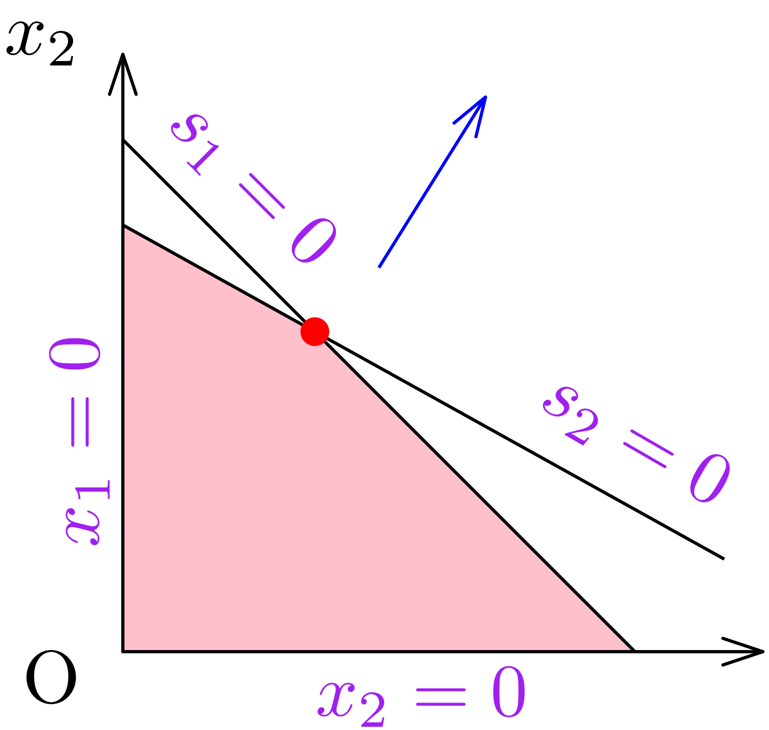
変数の非負性から

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める

$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times \mathbf{3}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \frac{27}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{27}{4}$$



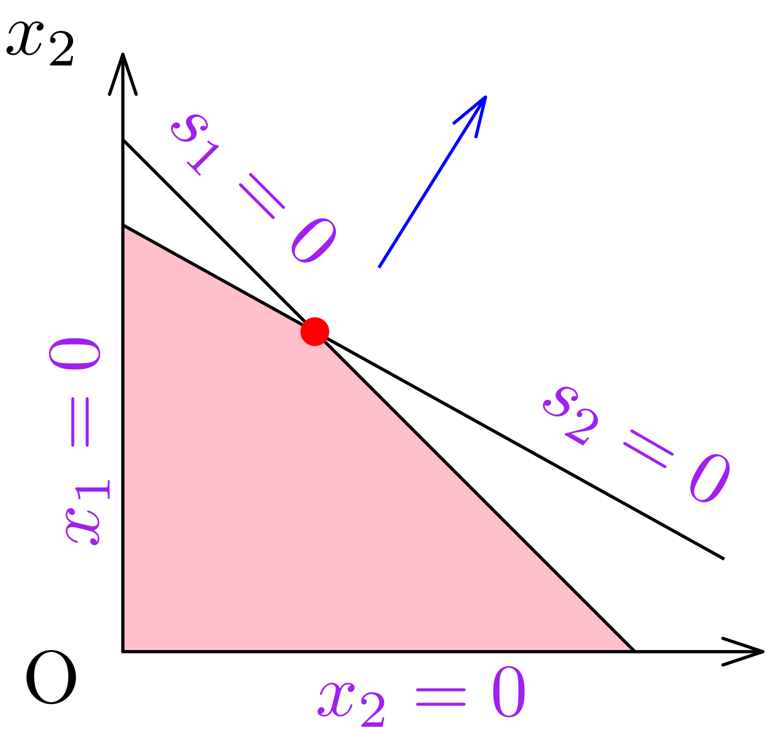
Chvátal-Gomory カット：例

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める



$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times\mathbf{3}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \frac{27}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor\frac{27}{4}\right\rfloor s_1 + \left\lfloor-\frac{3}{4}\right\rfloor s_2 \leq \frac{27}{4}$$

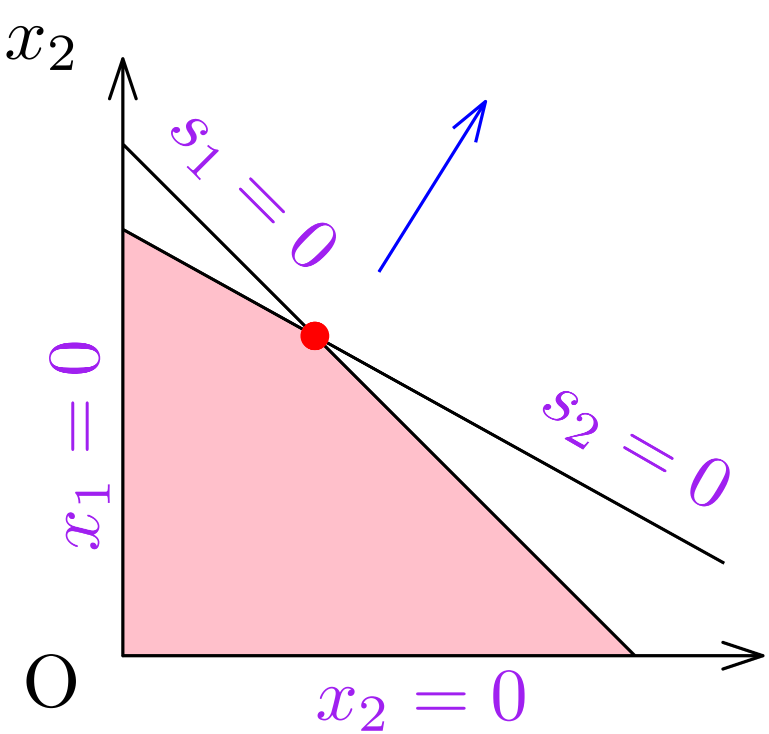
$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor\frac{27}{4}\right\rfloor s_1 + \left\lfloor-\frac{3}{4}\right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor\frac{27}{4}\right\rfloor$$

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める



$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times \mathbf{3}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \frac{27}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor$$

$$\therefore\ 3x_1 + 6s_1 - s_2 \leq 6 \qquad \longleftarrow$$ これを追加

Chvátal-Gomory カット：例

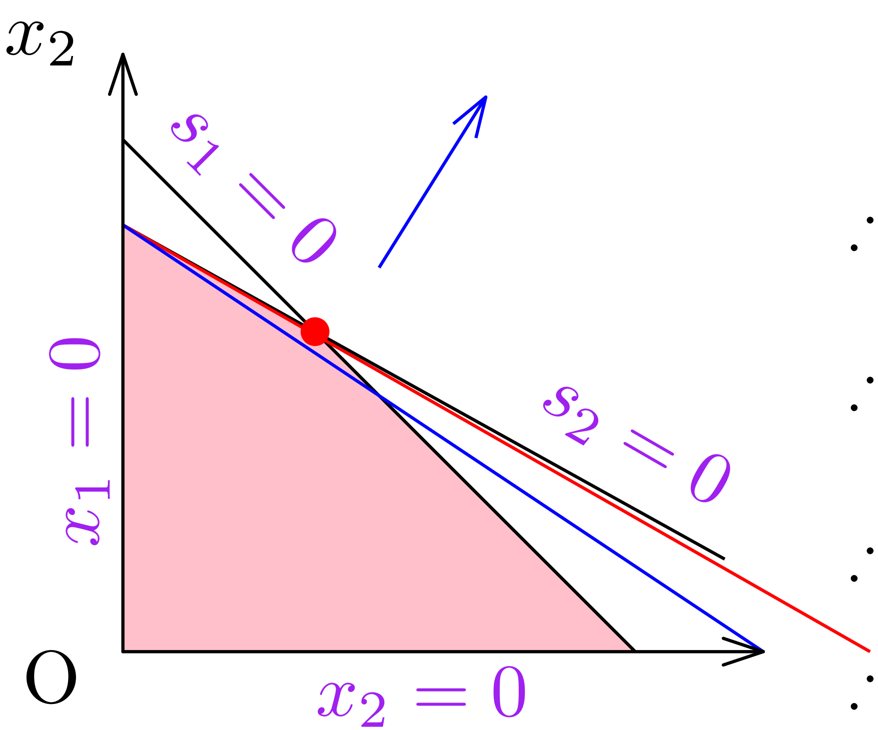
線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 6s_1 - s_2 \leq 6 \\ \Leftrightarrow\ & 3x_1 + 6(6 - x_1 - x_2) \\ & -(45 - 5x_1 - 9x_2) \leq 6 \\ \Leftrightarrow\ & 9x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{aligned}$$

変数が整数だと仮定すると

Step 2：**適当な整数を掛けて** 丸める



$$x_1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \qquad \times\mathbf{3}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \frac{27}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 3x_1 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor$$

$$\therefore\ 3x_1 + 6s_1 - s_2 \leq 6 \qquad \longleftarrow \text{これを追加}$$

離接カット：例

線形計画緩和 R

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\
 & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

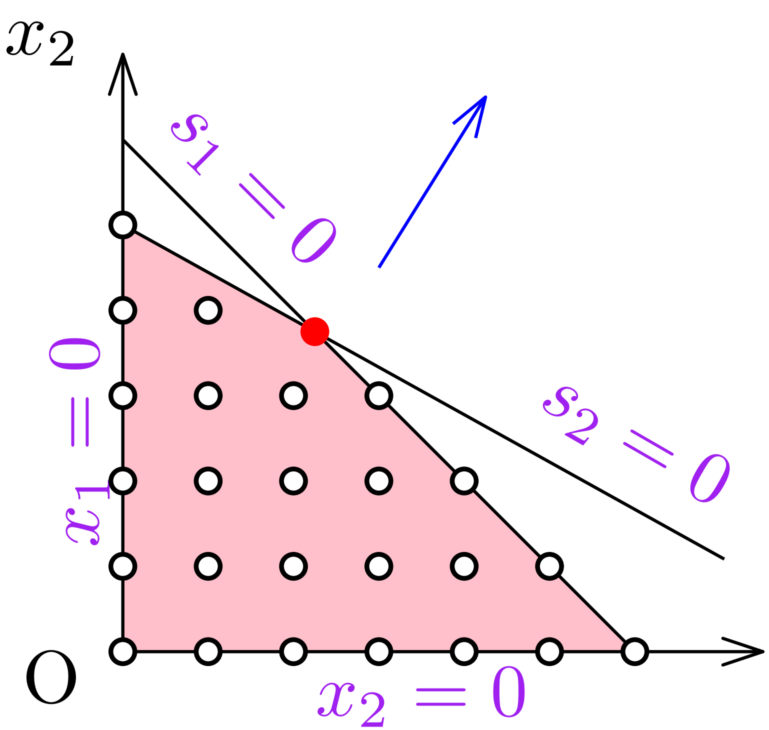
端点最適解

$$x_1^* = 9/4, x_2^* = 15/4,$$

基底変数

$$s_1^* = 0, s_2^* = 0$$

非基底変数



線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

端点最適解

$\boxed{x_1^* = 9/4}, x_2^* = 15/4,$

基底変数

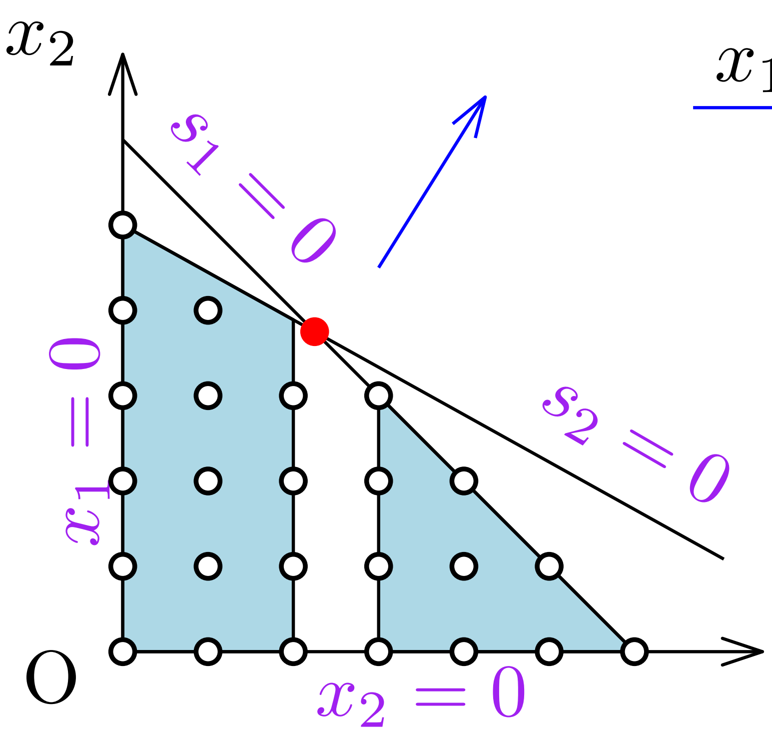
$s_1^* = 0, s_2^* = 0$

非基底変数

2 つの場合に分ける

$\underline{x_1 \leq \lfloor 9/4 \rfloor = 2}$ または $\underline{x_1 \geq \lceil 9/4 \rceil = 3}$

左　　　右



離接カット：例

線形計画緩和 R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 8x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + s_1 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

端点最適解

$\boxed{x_1^* = 9/4}, x_2^* = 15/4,$

基底変数

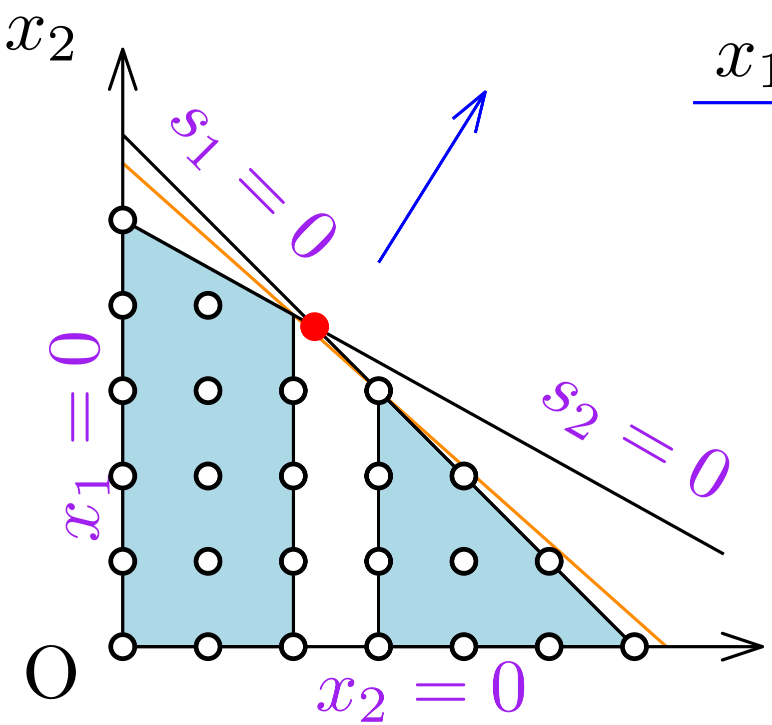
$s_1^* = 0, s_2^* = 0$

非基底変数

2 つの場合に分ける

$\underline{x_1 \leq \lfloor 9/4 \rfloor = 2}$ または $\underline{x_1 \geq \lceil 9/4 \rceil = 3}$

左　　右

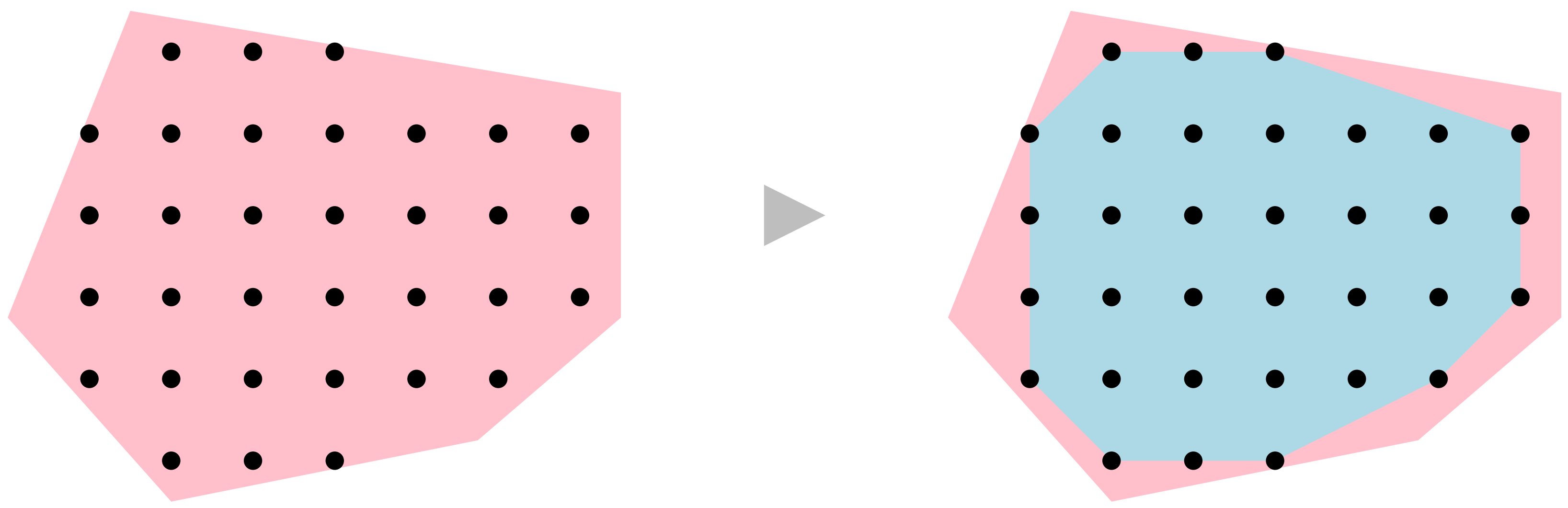


この「または」に対して，
離接計画のモデリングを適用

(この場合，変数の数を増やさない表現も
簡単に得られる)

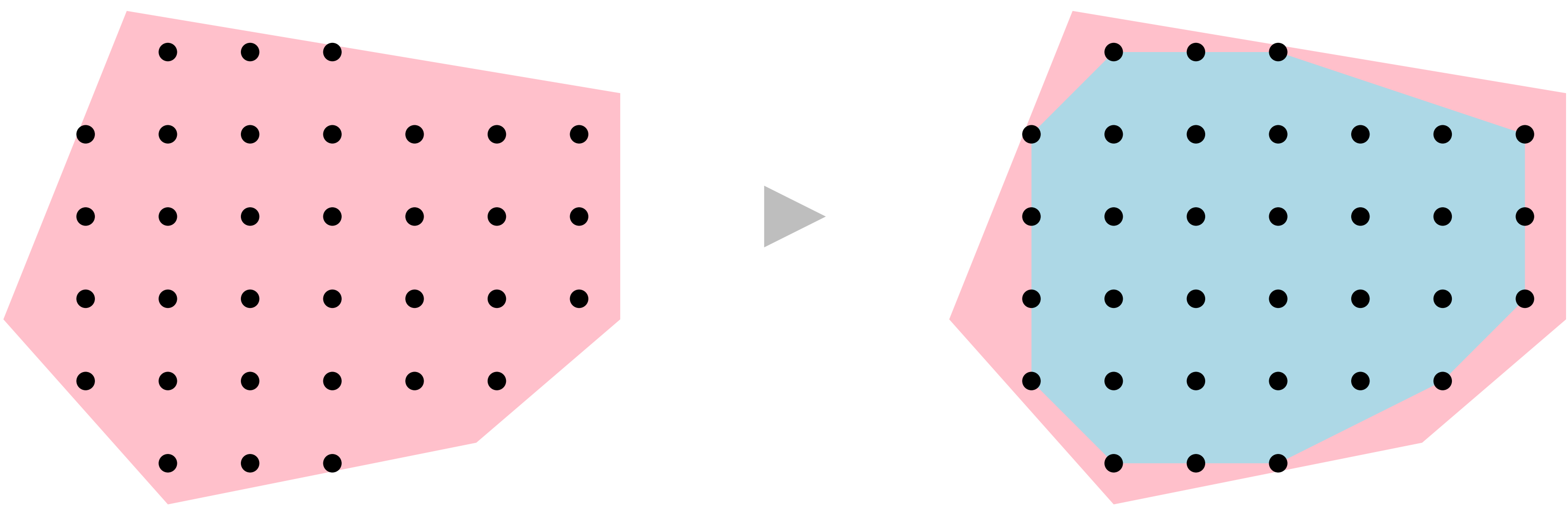
今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



今日の内容

- 切除平面法：基本的な考え方
- 切除平面法：例
- 切除平面法：一般論
- 他の切除平面
- 分枝切除法



分枝切除法：基本的な考え方

分枝限定法
(branch-and-bound method)

場合分けと枝刈り

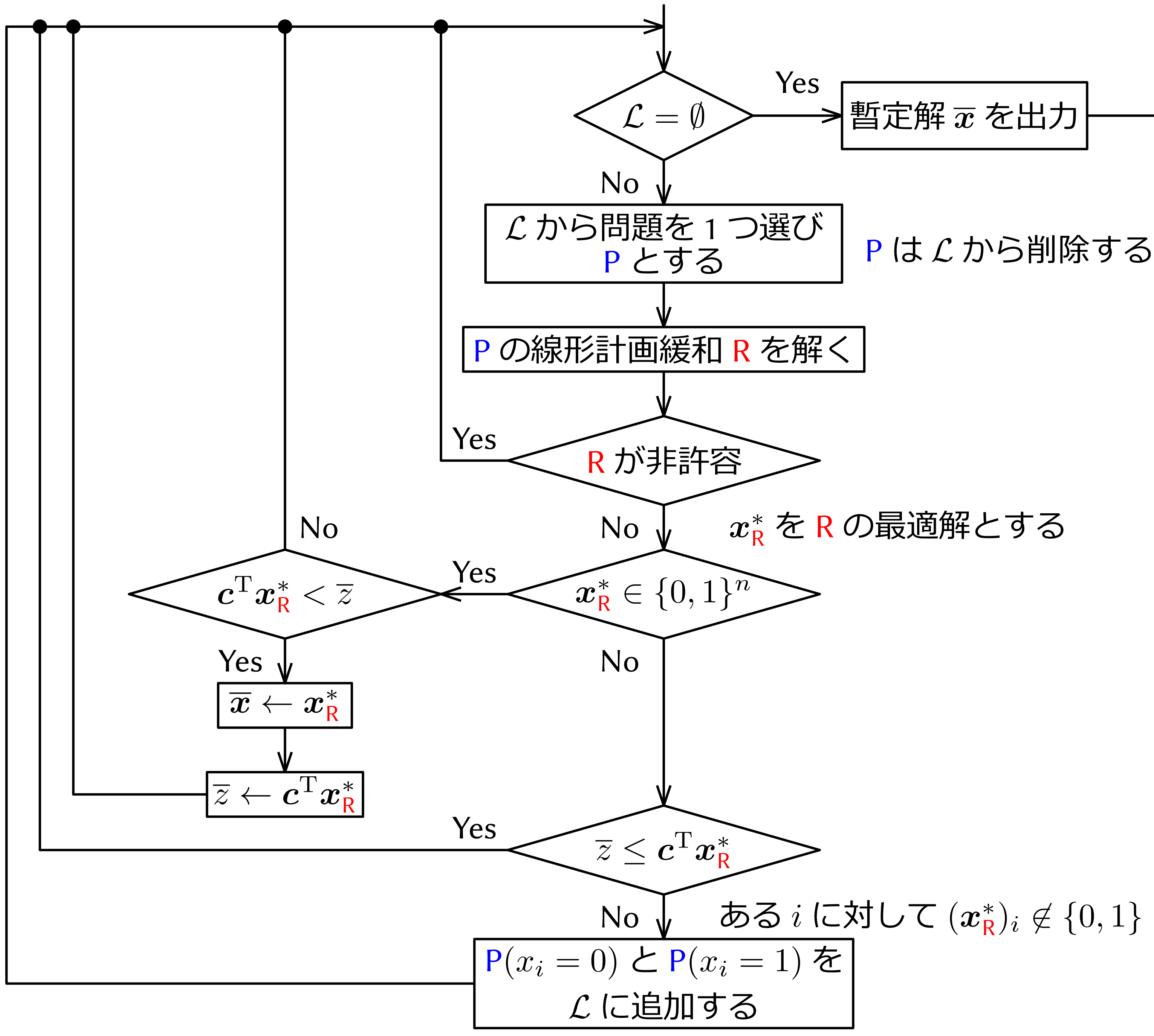
切除平面法
(cutting-plane method)

緩和の強化

分枝切除法
(branch-and-cut method)

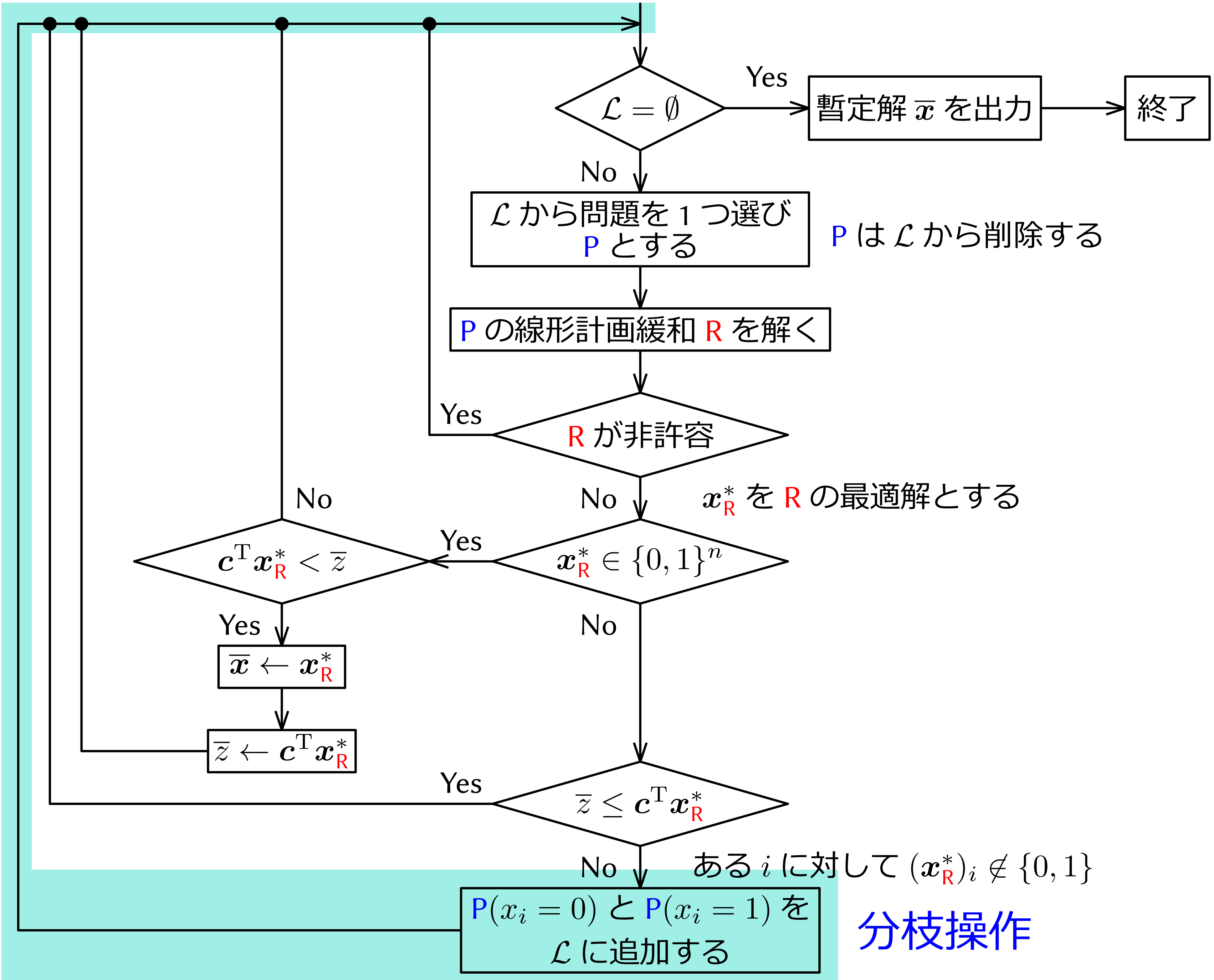
緩和の強化をしながら (してから)
場合分けと枝刈り

(復習) 分枝限定法



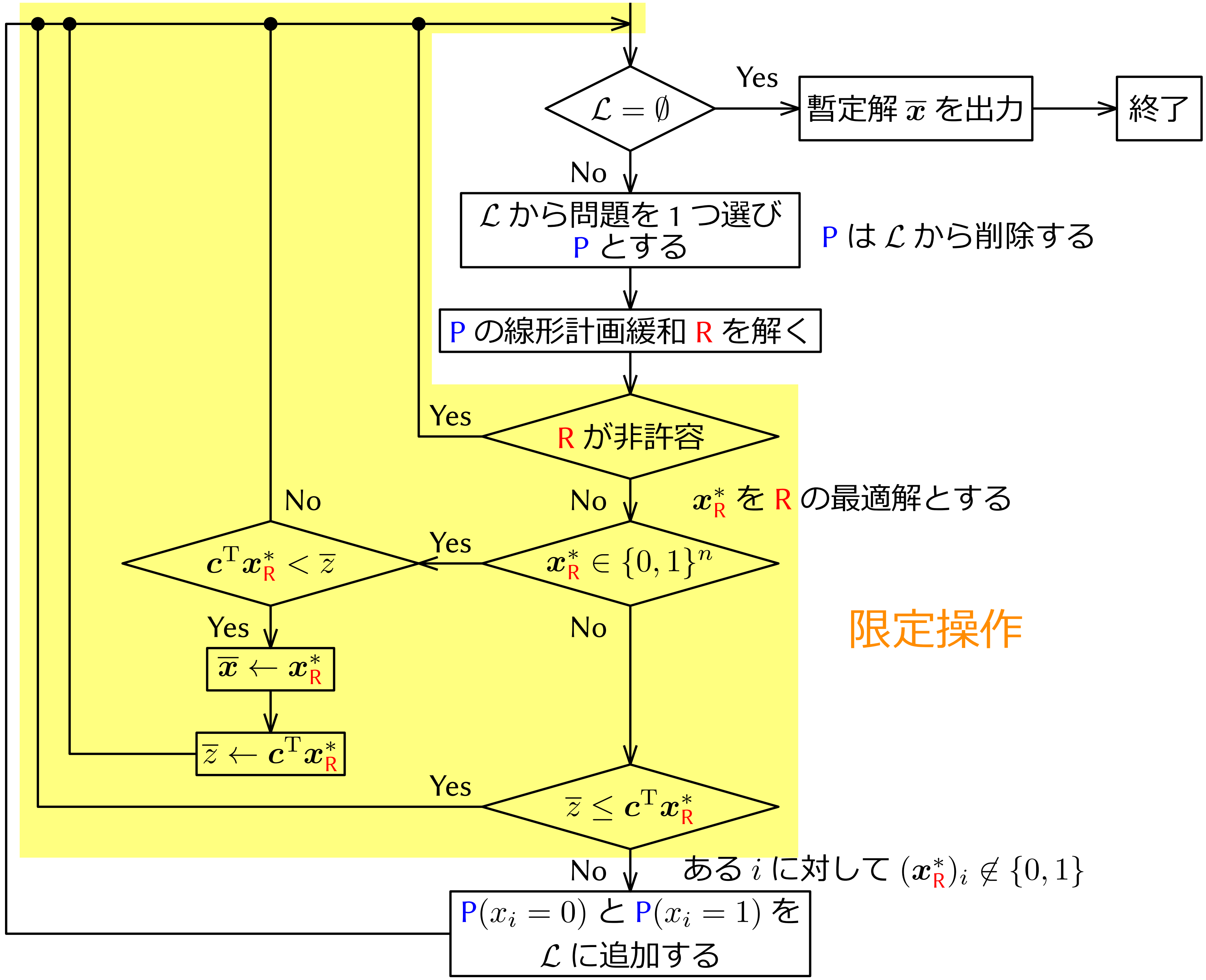
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ を R の最適解とする
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* \in \{0,1\}^n$
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* < \overline{z}$
No
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
No
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*)_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

(復習) 分枝限定法



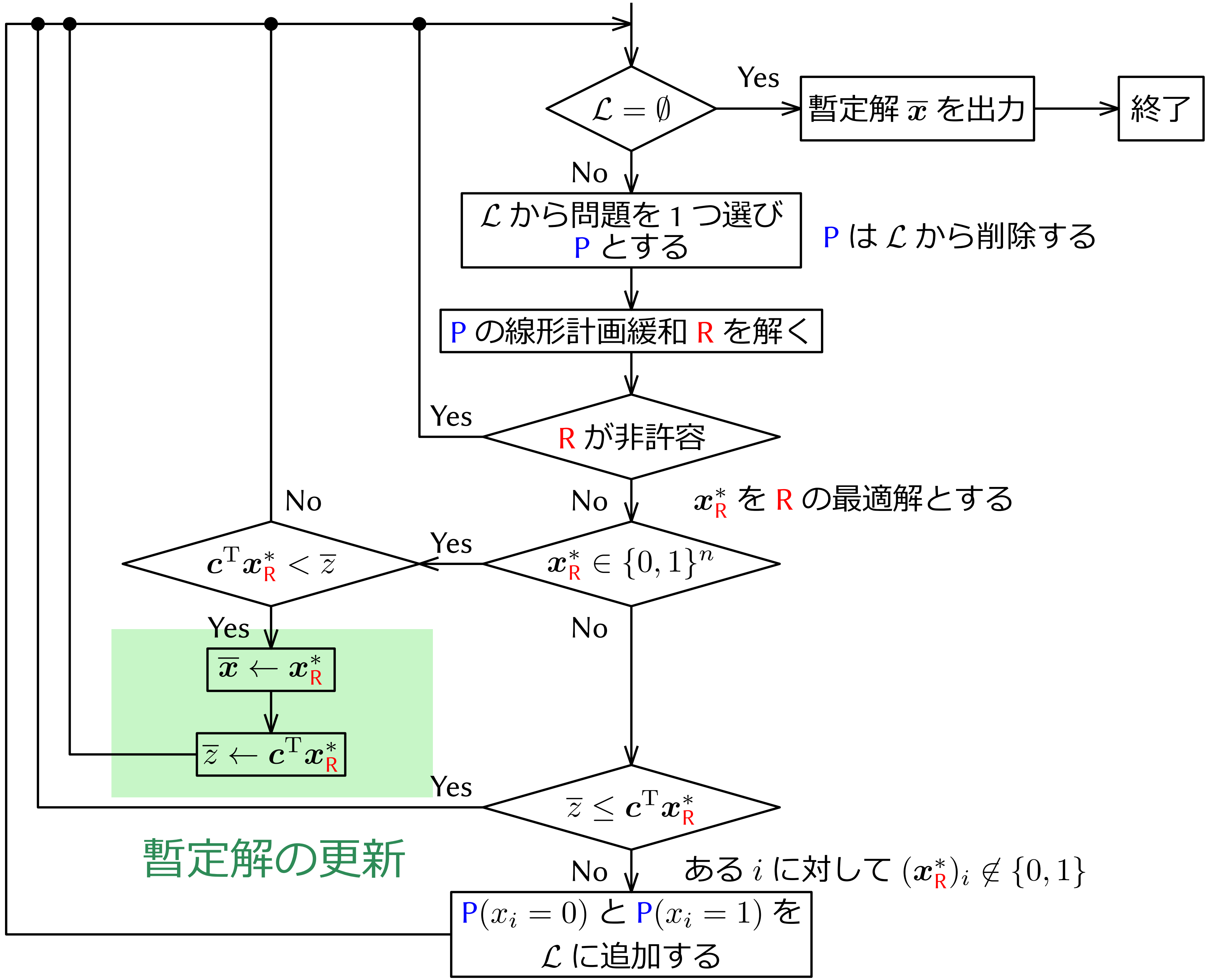
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
No
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する
分枝操作

(復習) 分枝限定法



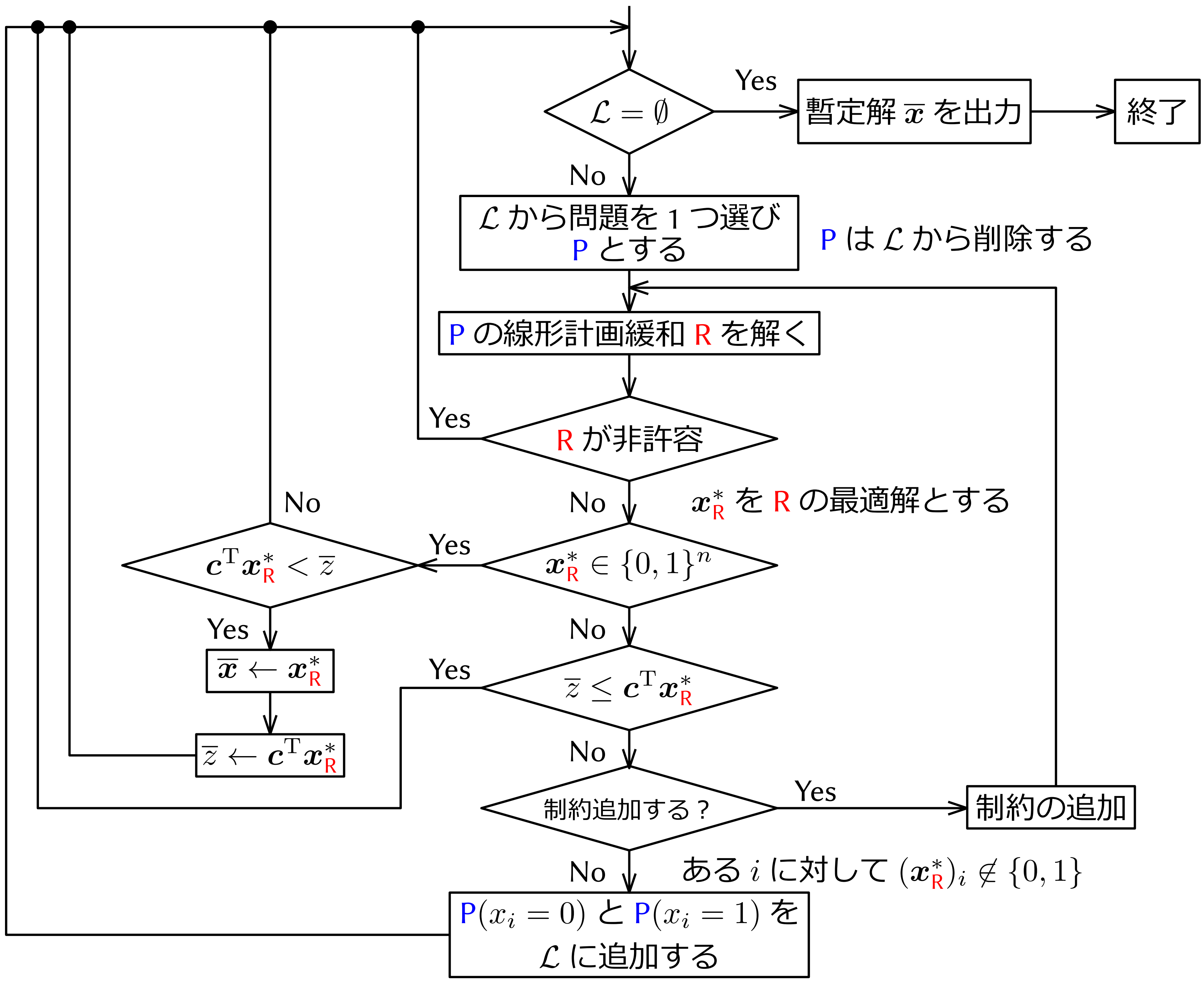
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
No
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
Yes
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
限定操作
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

(復習) 分枝限定法



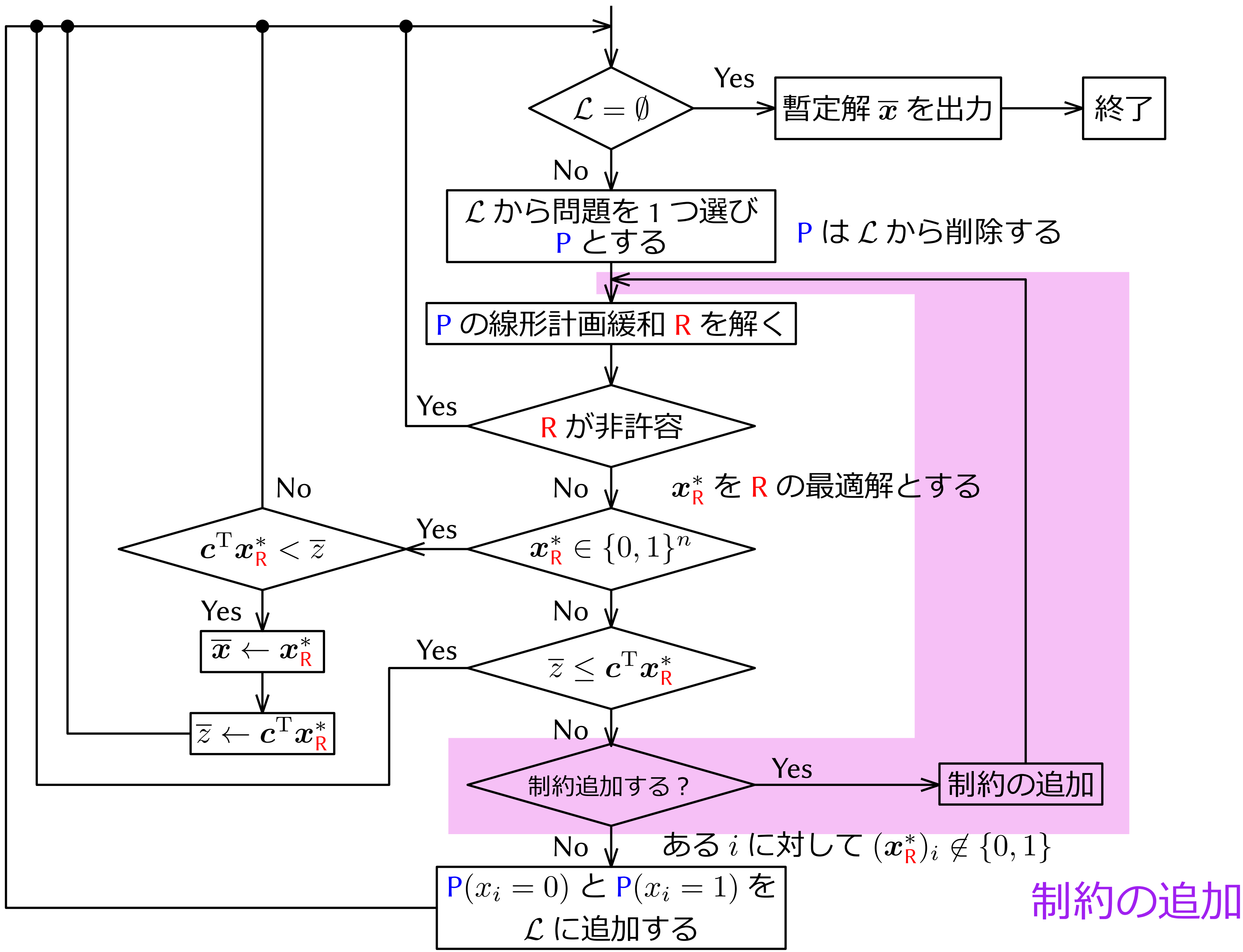
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{x}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
R が非許容
Yes
No
x^*_{R} を R の最適解とする
$x^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
No
Yes
$\overline{x} \leftarrow x^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$
暫定解の更新
No
$\overline{z} \leq c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$
Yes
No
ある i に対して $(x^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

分枝切除法



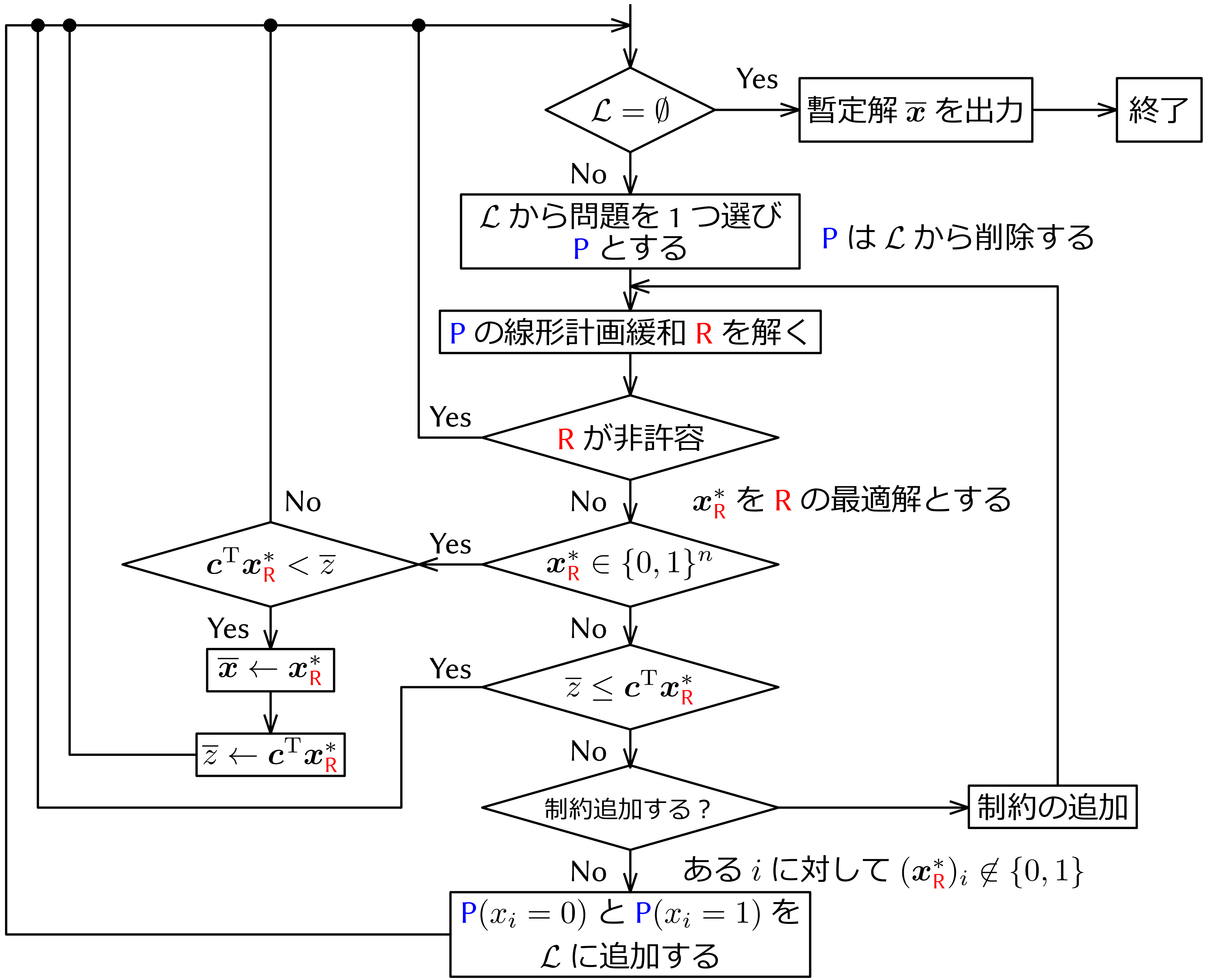
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
No
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
制約追加する？
Yes
制約の追加
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

分枝切除法

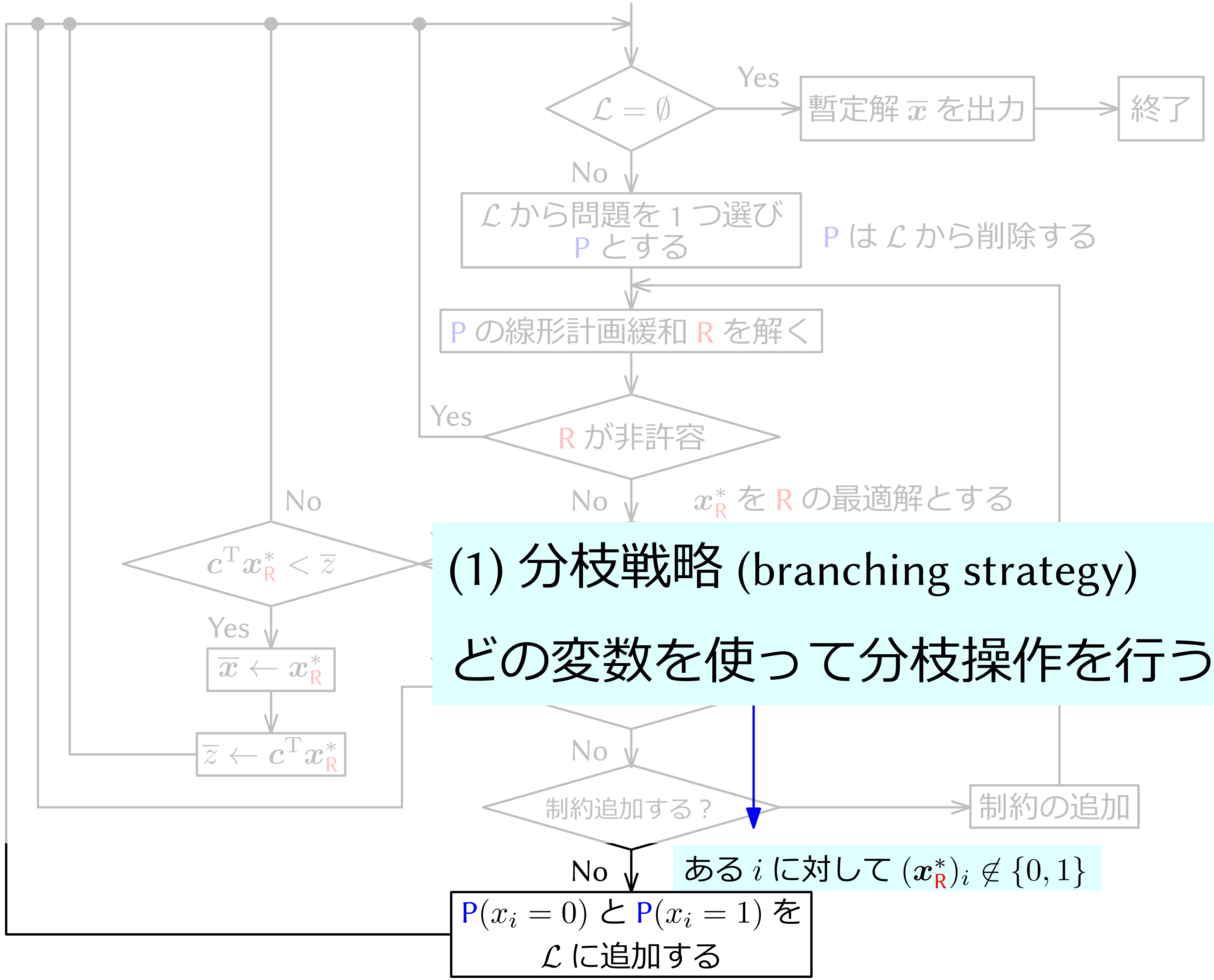


$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$ を R の最適解とする
No
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* < \overline{z}$
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^* \in \{0,1\}^n$
Yes
No
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*$
No
制約追加する？
Yes
制約の追加
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}^*)_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する
制約の追加

分枝切除法：戦略



$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
R が非許容
Yes
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
No
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
Yes
No
制約追加する？
制約の追加
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

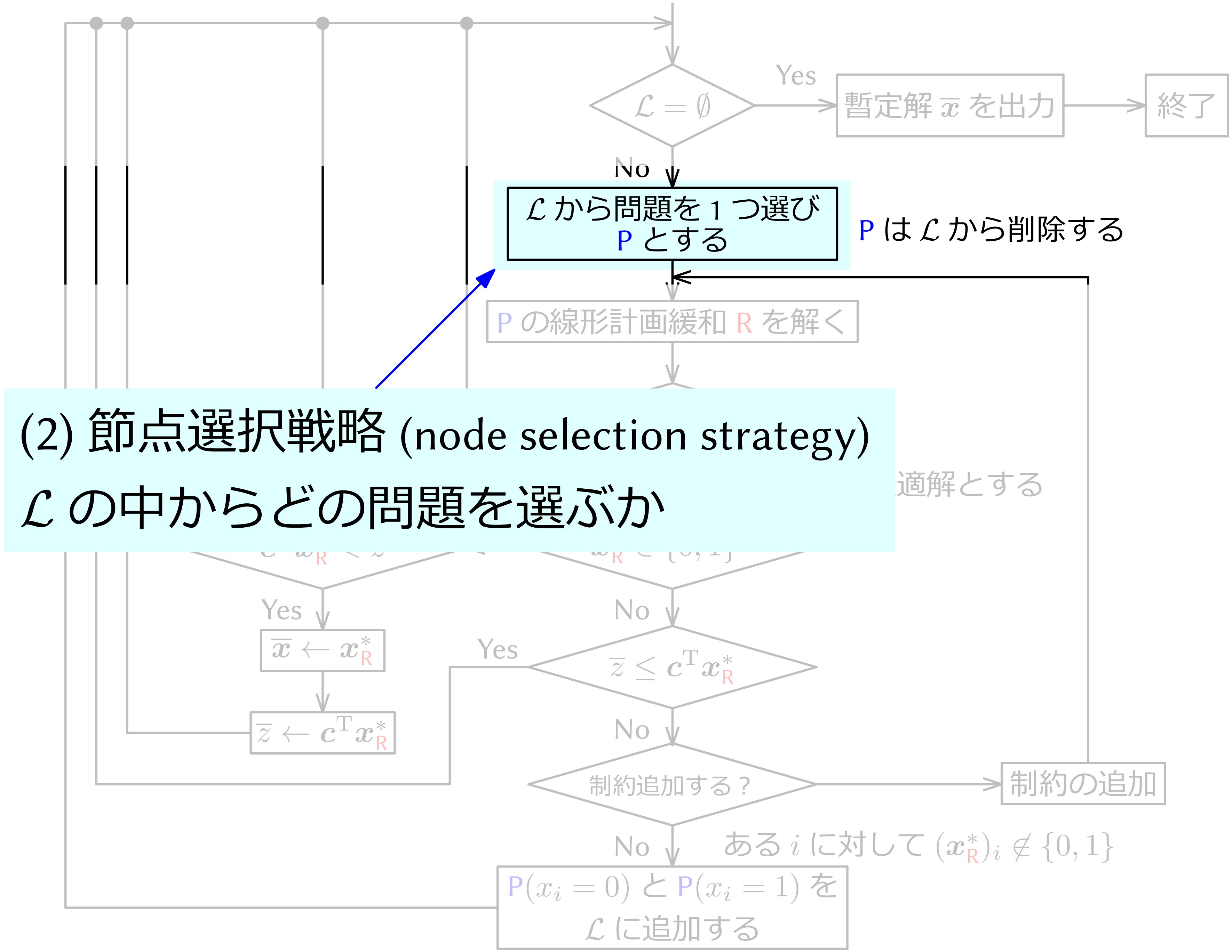


(1) 分枝戦略 (branching strategy)

どの変数を使って分枝操作を行うか

ある i に対して $(x_R^*)_i \notin \{0, 1\}$

分枝切除法：戦略



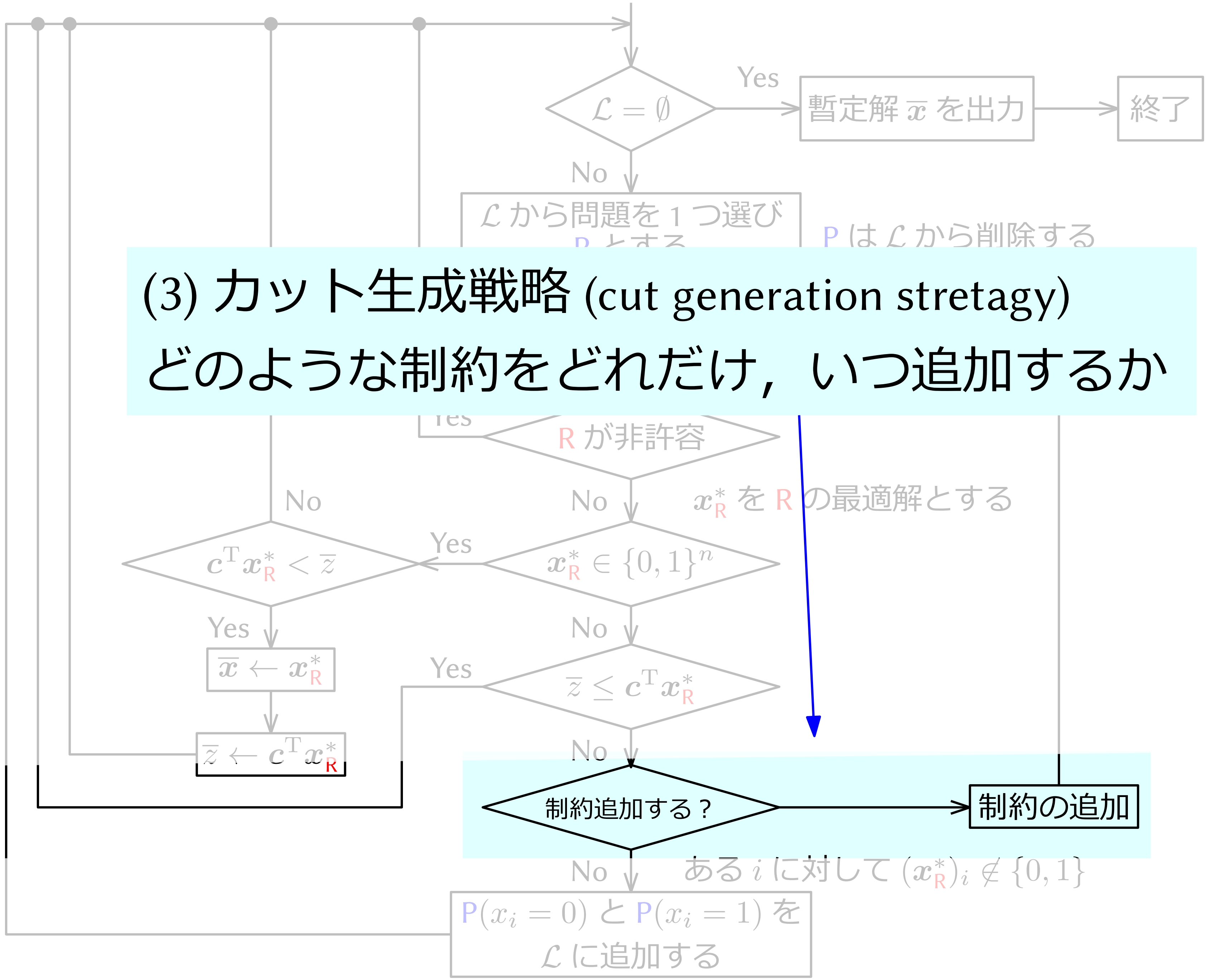
(2) 節点選択戦略 (node selection strategy)

$\mathcal{L}$ の中からどの問題を選ぶか

分枝切除法：戦略

(3) カット生成戦略 (cut generation stretagy)

どのような制約をどれだけ，いつ追加するか



分枝切除法：戦略まとめ

(1) **分枝戦略** (branching strategy)
どの変数を使って分枝操作を行うか
(2) **節点選択戦略** (node selection strategy)
$\mathcal{L}$ の中からどの問題を選ぶか
(3) **カット生成戦略** (cut generation strategy)
どのような制約をどれだけ，いつ追加するか

戦略によって，分枝切除法のパフォーマンスは大きく変わる
入力の構造によって，よい戦略は変わりうる

分枝切除法：戦略 まとめ

(1) **分枝戦略** (branching strategy)
どの変数を使って分枝操作を行うか

(2) **節点選択戦略** (node selection strategy)
$\mathcal{L}$ の中からどの問題を選ぶか

(3) **カット生成戦略** (cut generation strategy)
どのような制約をどれだけ，いつ追加するか

戦略によって，分枝切除法のパフォーマンスは大きく変わる

入力の構造によって，よい戦略は変わりうる

(4) **前求解戦略** (presolve strategy)
どのような前求解を行うか

時間があれば，最後の方の授業で扱うかもしれない

多くの最適化ソルバーでは，戦略の選択をパラメータで行える

次回予告

次回の内容

巡回セールスマン問題に対する切除平面

- 部分巡回路除去制約
- 櫛不等式