離散最適化基礎論

第 8 回

分枝限定法

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 11 月 29 日

最終更新：2022 年 12 月 6 日　10:30

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

＊ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

＜アルゴリズム＞

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

∗ 休み (国内出張) (12/27)

∗ 休み (冬季休業) (1/3)

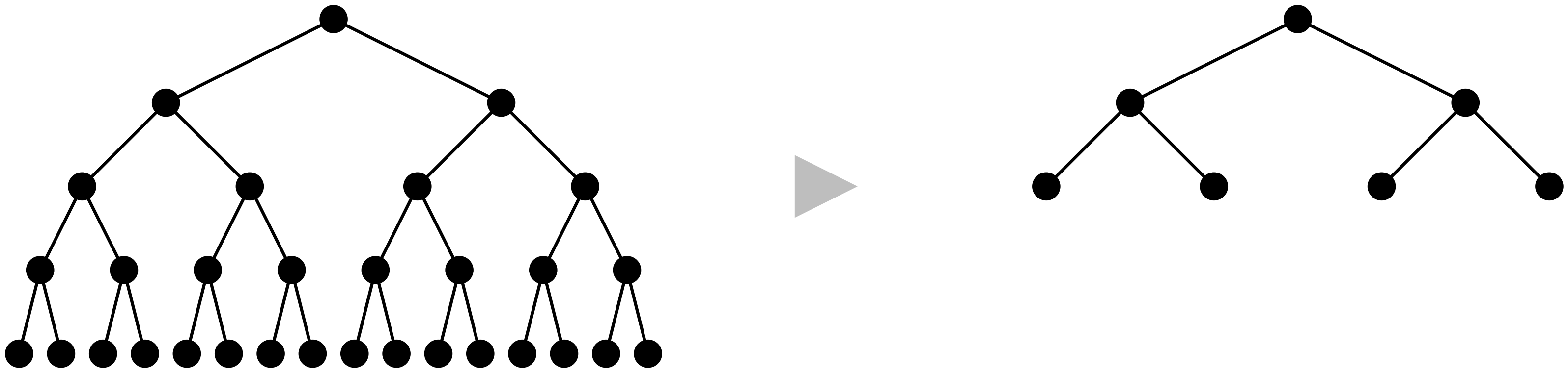
12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

＜まとめ・予備＞

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

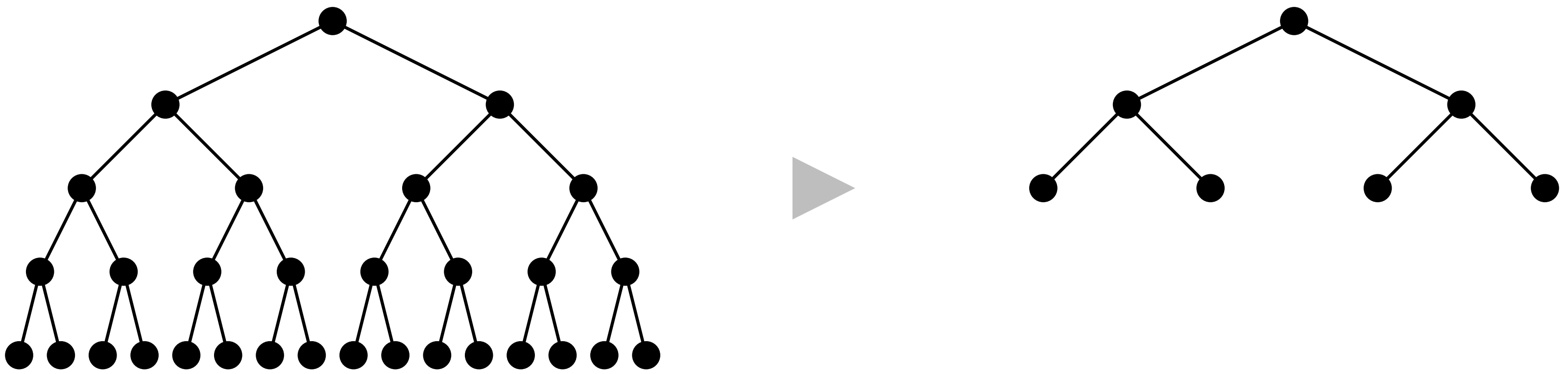
今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



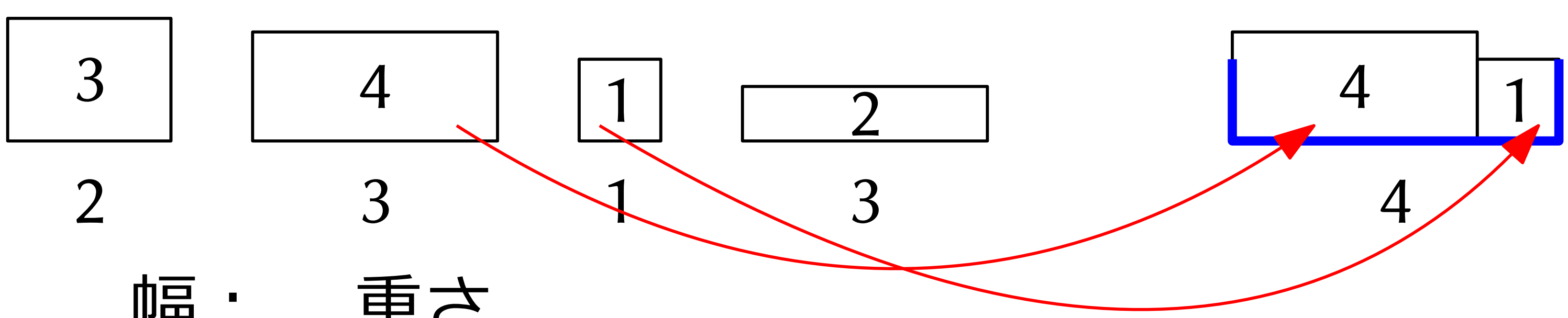
ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい



幅： 重さ
面積： 収入

(森，松井 2004 より)

ナップサック問題：整数計画モデル

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

基本的な考え方

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
 & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$

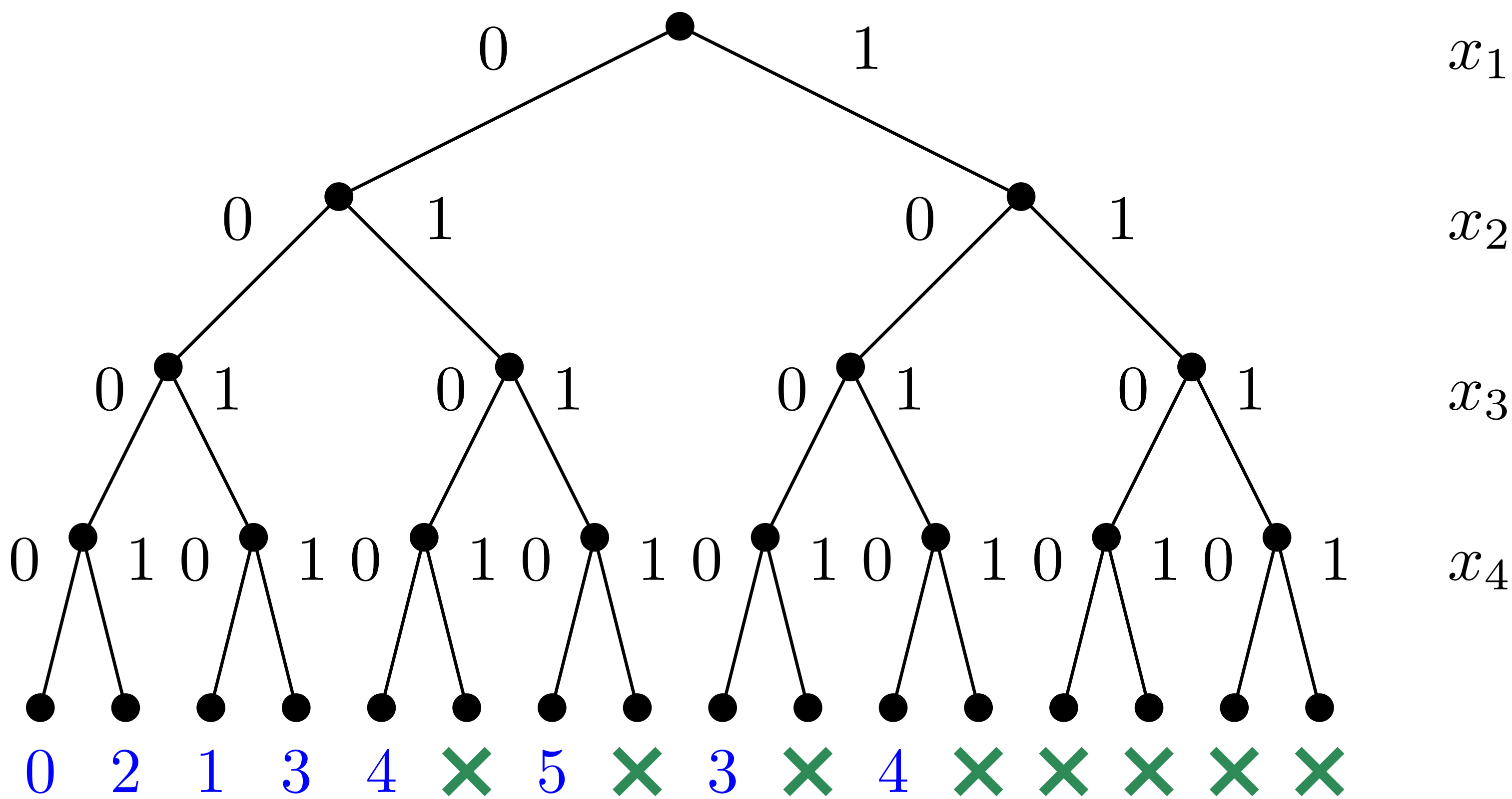
基本的な考え方

各変数の値を 0 か 1 に決めると，次のどちらかになる
- 許容解が得られる
- 非許容解が得られる

最適解は，許容解の中で目的関数値が最も大きいもの

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

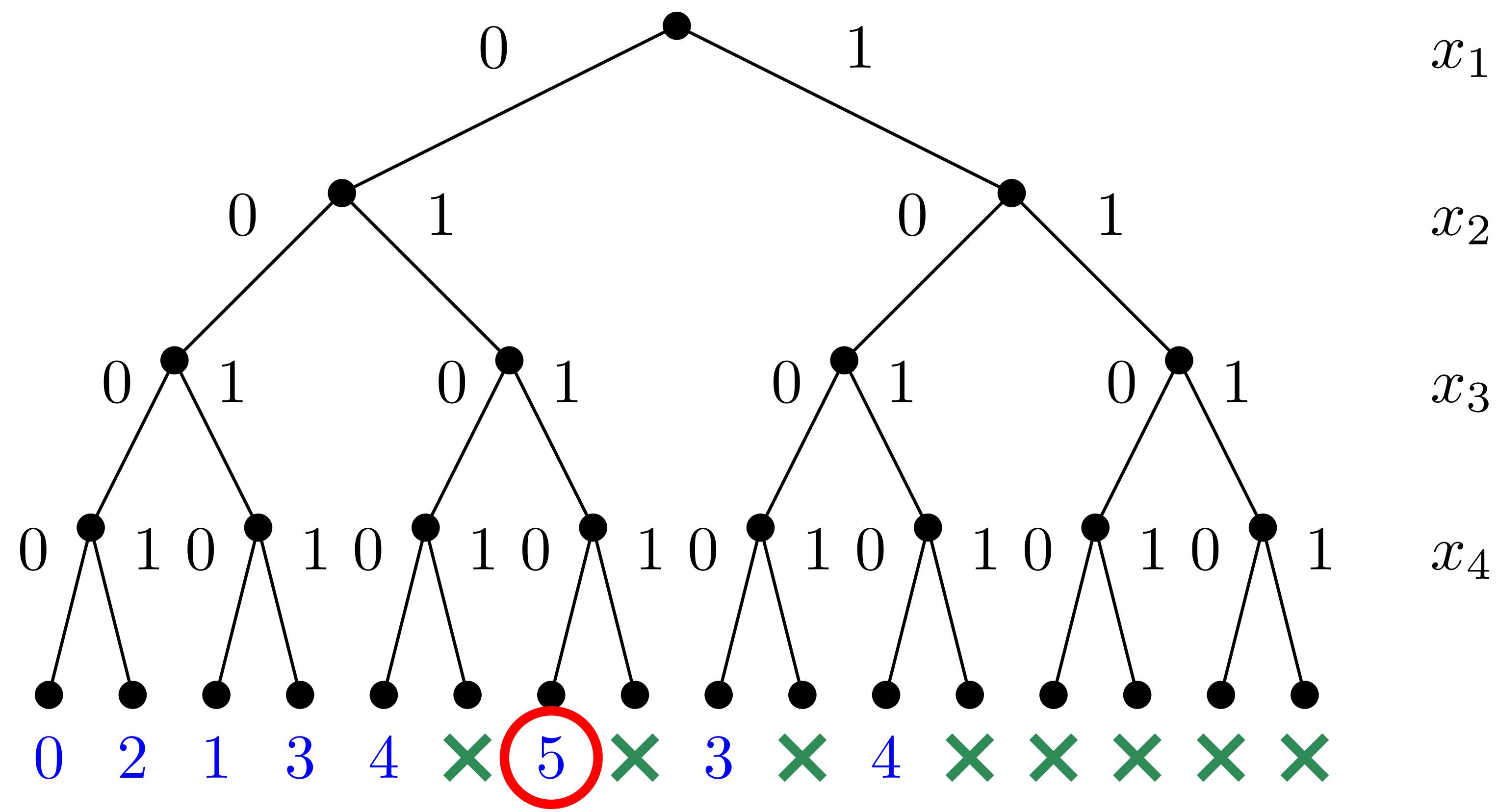
maximize	$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$
subject to	$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4$
	$x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$



場合分けの様子

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

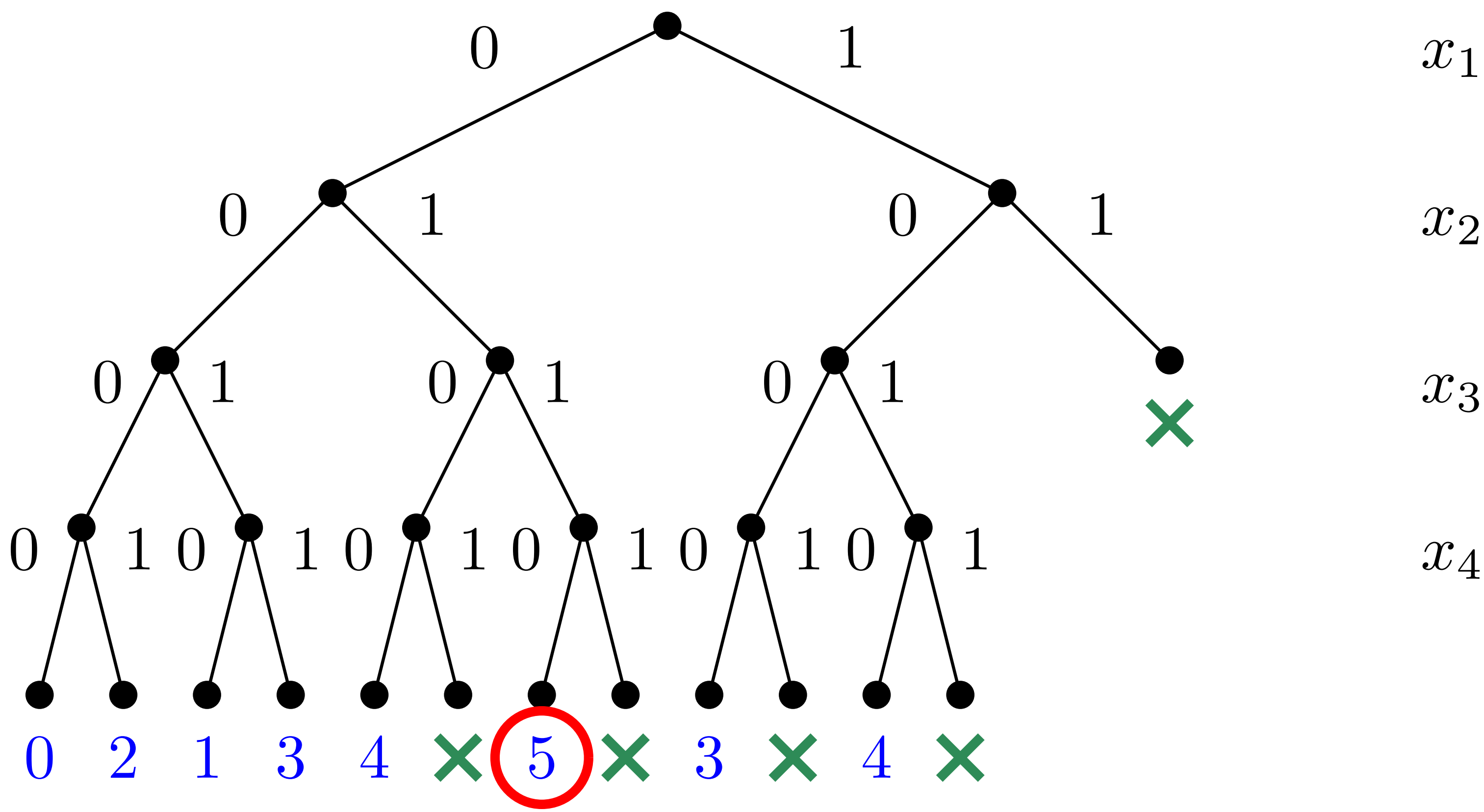
$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 & \\
 & x_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$



ちょっと観察

P$(1, 1, x_3, x_4)$

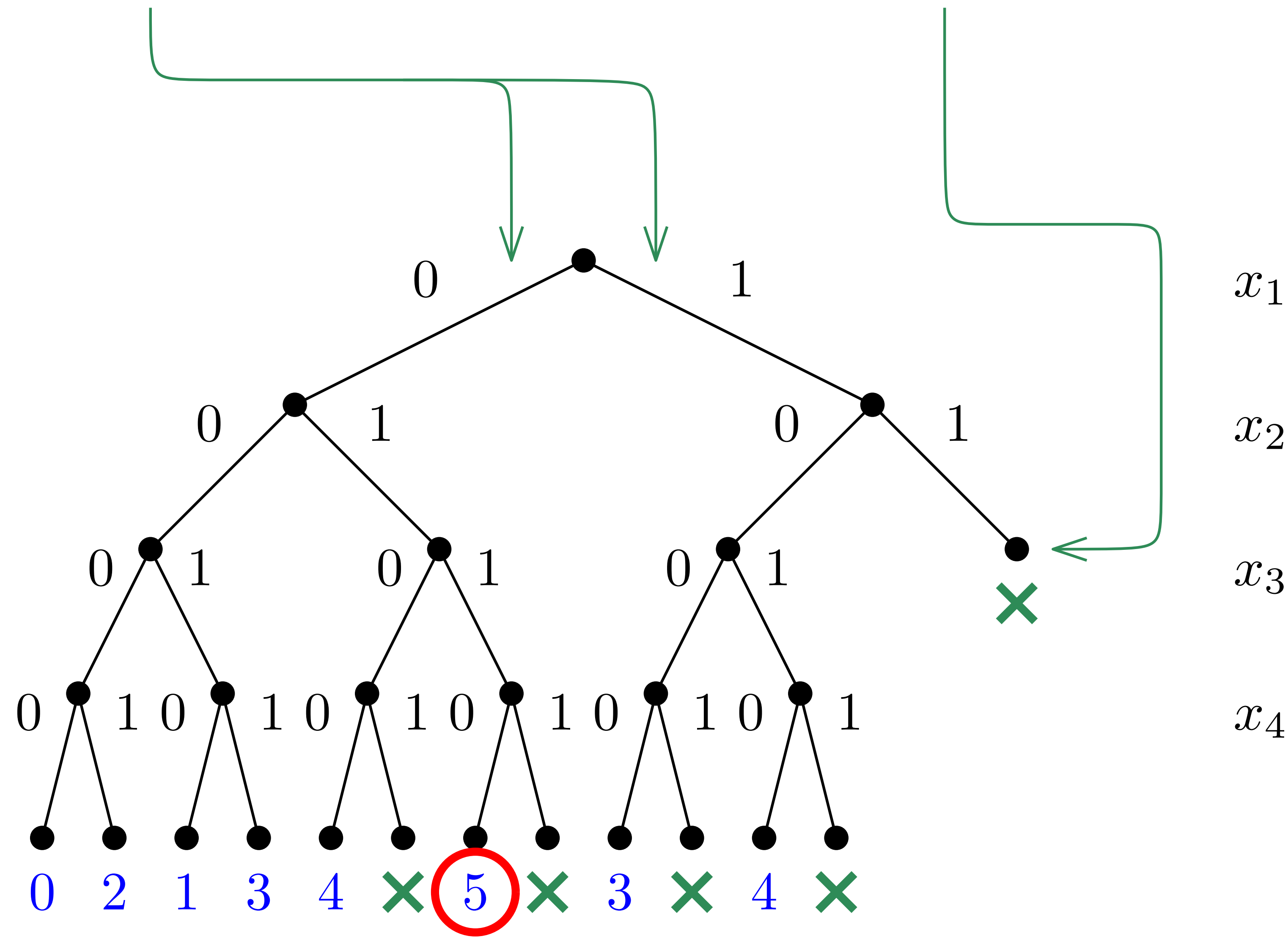
maximize	$3 + 4 + x_3 + 2x_4$
subject to	$2 + 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4$
	$x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{3, 4\}$



分枝操作と限定操作

ぶんし
分枝操作
(branching)

限定操作
(bounding)

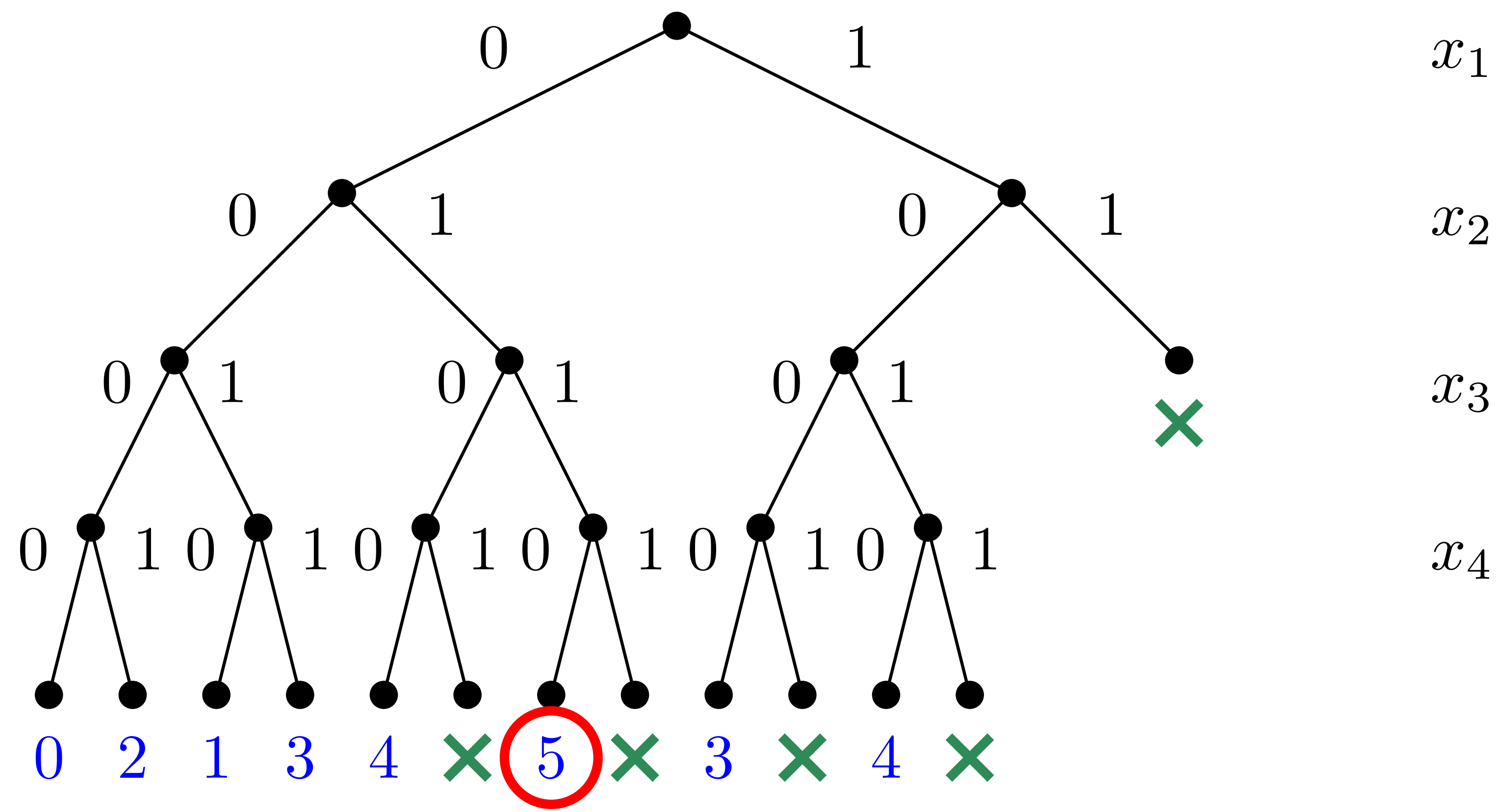


分枝限定法：基本アイディア

分枝限定法の基本アイディア

次の 2 つを繰り返す

- 分枝操作：解くべき問題を分割する (場合分け)
- 限定操作：解かない問題を無視する (枝刈り)



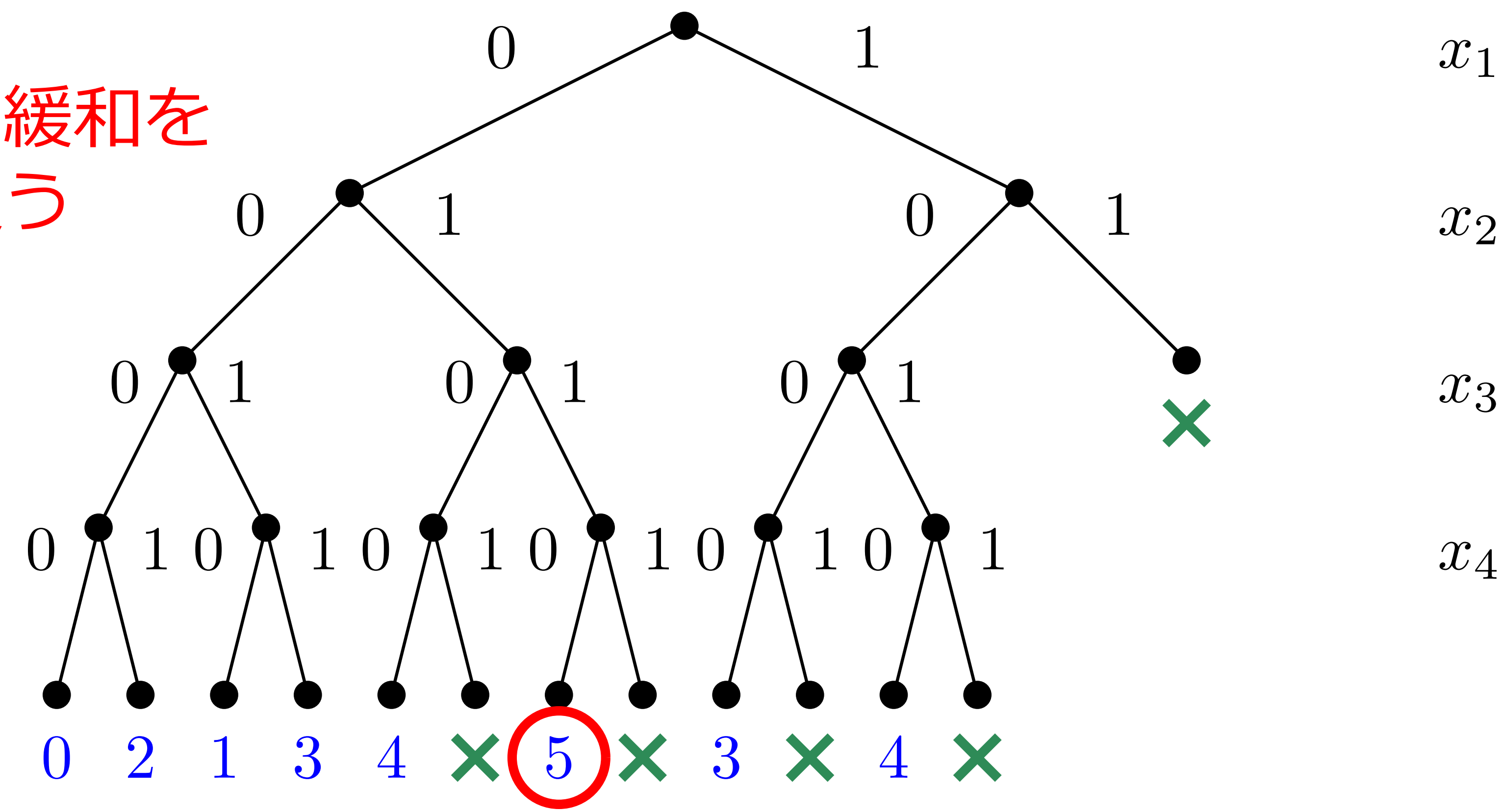
分枝限定法：基本アイディア

分枝限定法の基本アイディア

次の 2 つを繰り返す

- 分枝操作：解くべき問題を分割する (場合分け)
- 限定操作：解かない問題を無視する (枝刈り)

線形計画緩和を
上手に使う



ナップサック問題の線形計画緩和

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

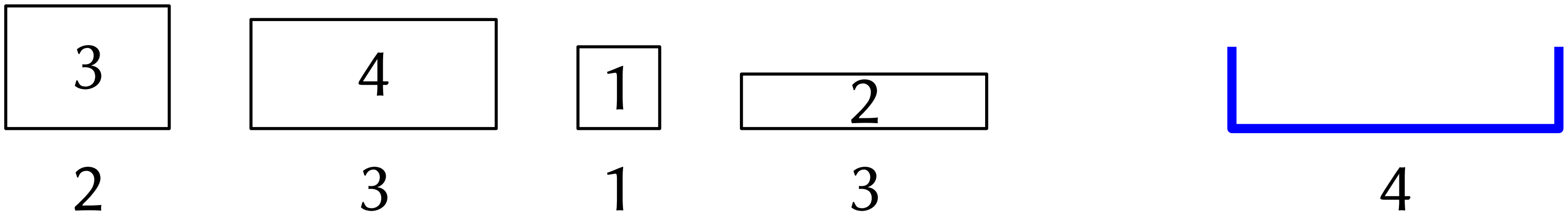
$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

$\downarrow$ 緩和

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

簡単に解ける線形計画緩和



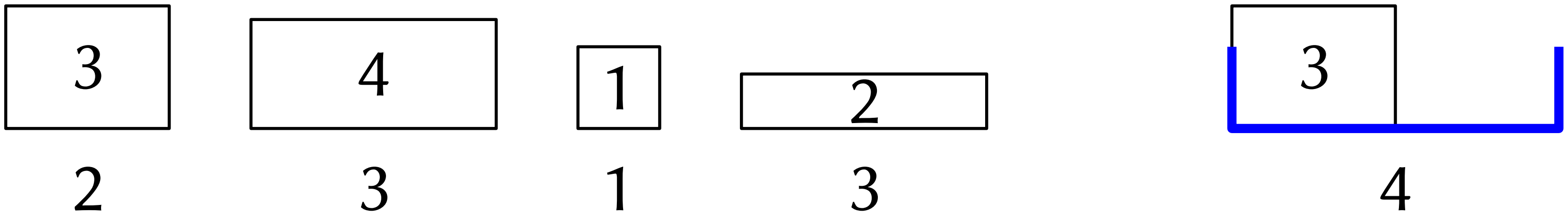
幅： 重さ
面積： 収入

$\boxed{\text{考え方}}$：高さ (= 収入/重さ) の大きいものから順に選ぶ

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$

簡単に解ける線形計画緩和



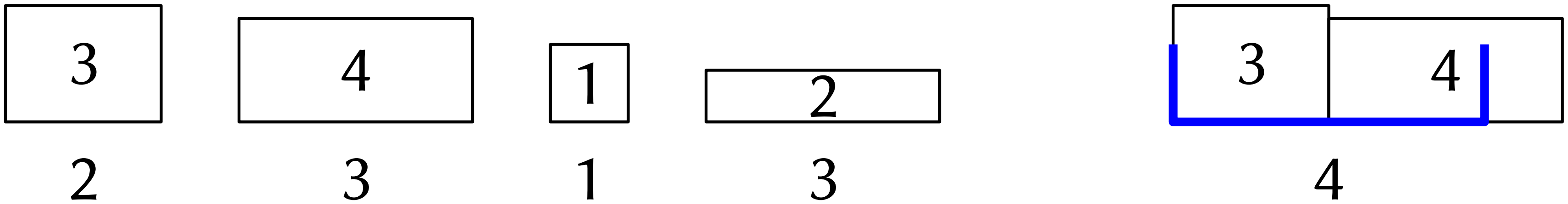
幅： 重さ
面積： 収入

$\boxed{\text{考え方}}$：高さ (= 収入/重さ) の大きいものから順に選ぶ

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4 & \\
 & 0 \le x_i \le 1 & \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$

簡単に解ける線形計画緩和



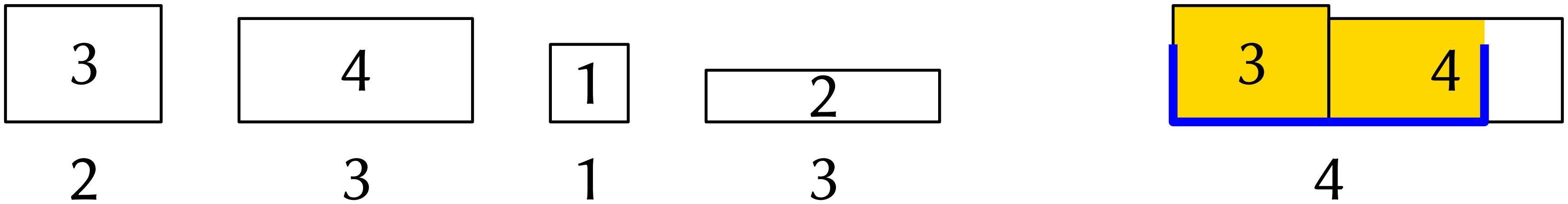
幅：　重さ
面積：収入　最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3, x_3 = 0, x_4 = 0$
最適値 $= 17/3$

$\boxed{\text{考え方}}$：高さ ($=$ 収入/重さ) の大きいものから順に選ぶ

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$

簡単に解ける線形計画緩和



幅：　重さ
面積：収入

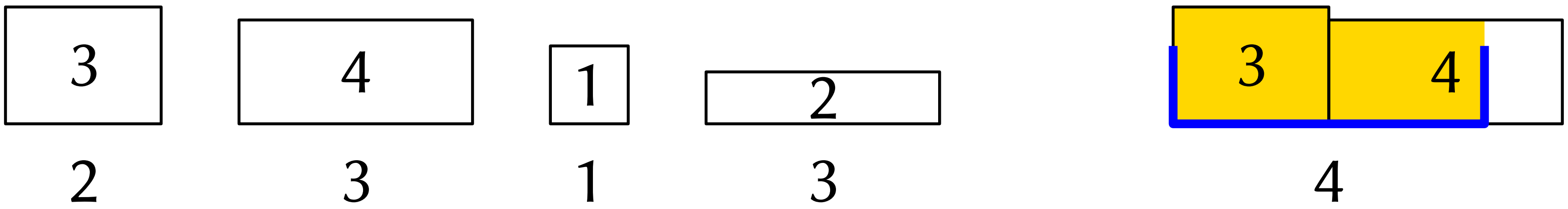
最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3, x_3 = 0, x_4 = 0$
最適値 $= 17/3$

$\boxed{\text{考え方}}$：高さ (= 収入/重さ) の大きいものから順に選ぶ

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 & \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

簡単に解ける線形計画緩和



幅： 重さ

面積： 収入 最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3, x_3 = 0, x_4 = 0$

最適値 $= \underline{17/3}$

$\boxed{\text{考え方}}$：高さ (= 収入/重さ) の大きいものから順に選ぶ

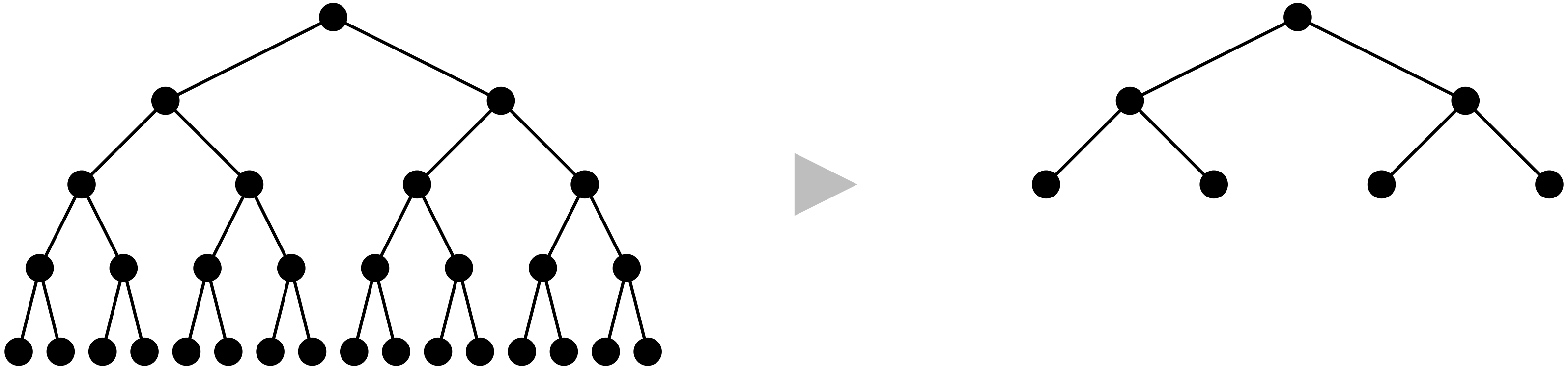
注：ナップサック問題だから適用できる考え方

R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{array}
$$

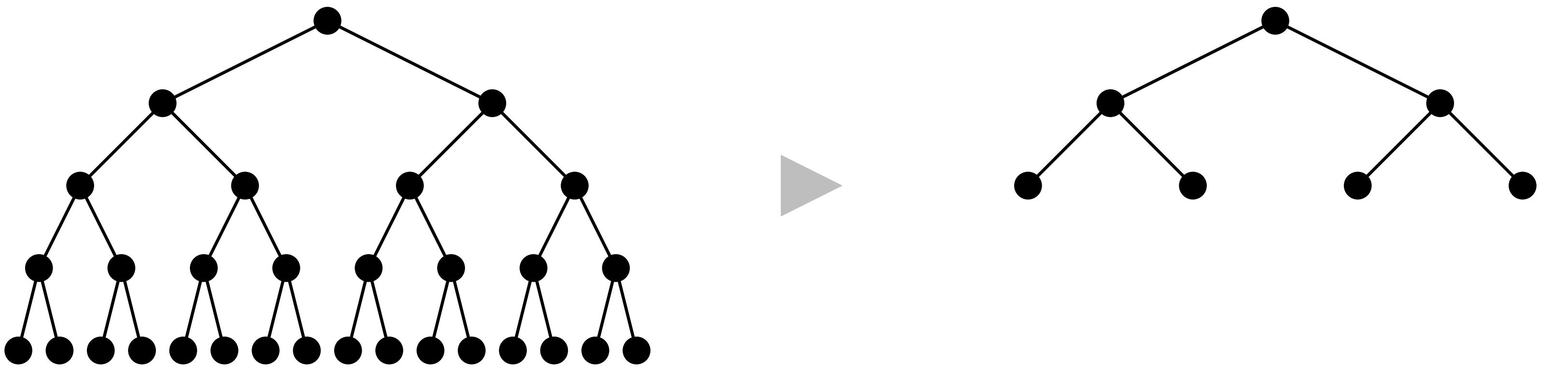
今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



$\mathsf{P}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$\mathsf{P}(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow{\text{緩和}} \mathsf{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3,$
$x_3 = 0, x_4 = 0$

最適値 $= 17/3$

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

P(x_1, x_2, x_3, x_4) —— 緩和 ——→ R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

線形計画緩和の性質 1：系 (最大化問題の場合)

P と R に最適解が存在する $\Rightarrow$

P の最適値 $\leq$ R の最適値

P(x_1, x_2, x_3, x_4)

P(x_1, x_2, x_3, x_4) —— 緩和 ——> R(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\
 & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\
 & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i
\end{array}
$$

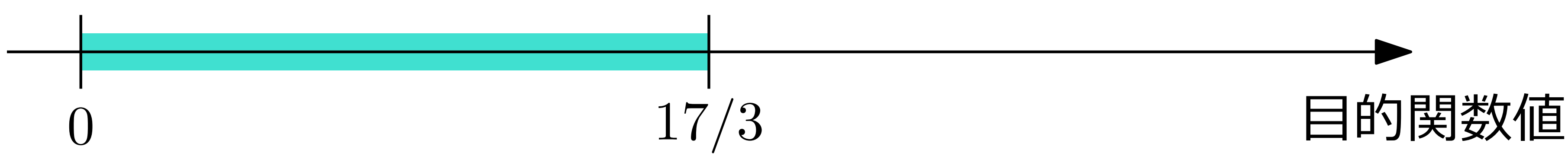
暫定解：$x_1 = 0, x_2 = 0,$
$x_3 = 0, x_4 = 0$

(incumbent)

最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3,$
$x_3 = 0, x_4 = 0$

最適値 $= 17/3$

P(x_1, x_2, x_3, x_4) の
最適値



P(x_1, x_2, x_3, x_4)：分枝操作

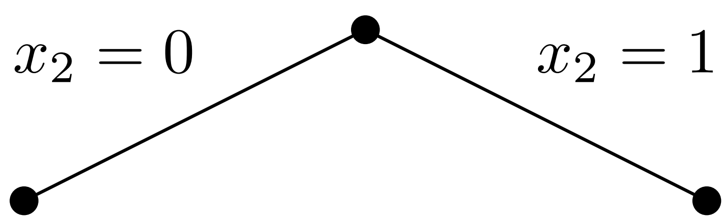
P(x_1, x_2, x_3, x_4) —— 緩和 ——→ R(x_1, x_2, x_3, x_4)

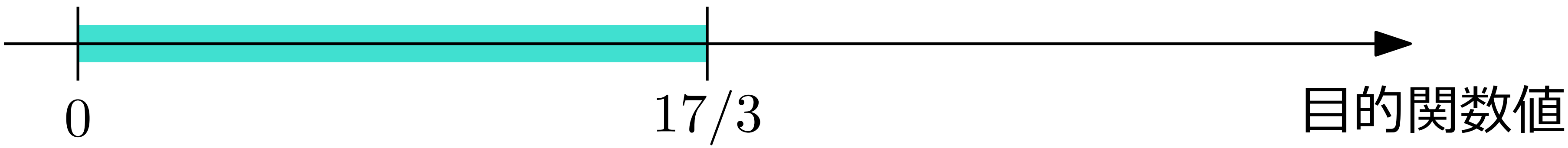
$$\begin{array}{ll}\text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{max.} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i\end{array}$$

最適解：$x_1 = 1, x_2 = 2/3,$
$x_3 = 0, x_4 = 0$

最適値 $= 17/3$





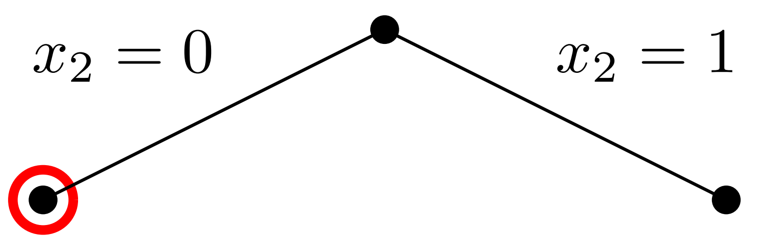
P$(x_1, 0, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 0, x_3, x_4)$

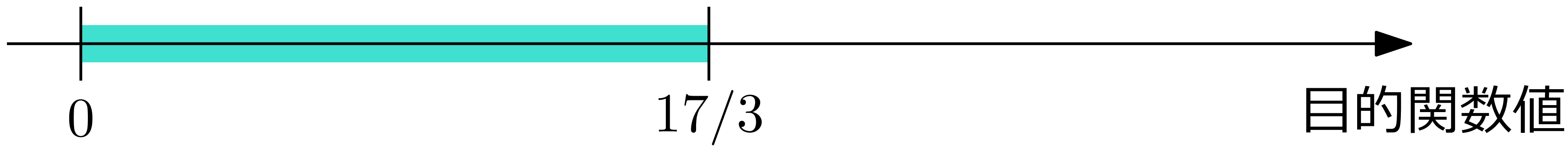
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1, x_4 = 1/3$

最適値 $= 14/3$





$\mathsf{P}(x_1, 0, x_3, x_4)$：分枝操作

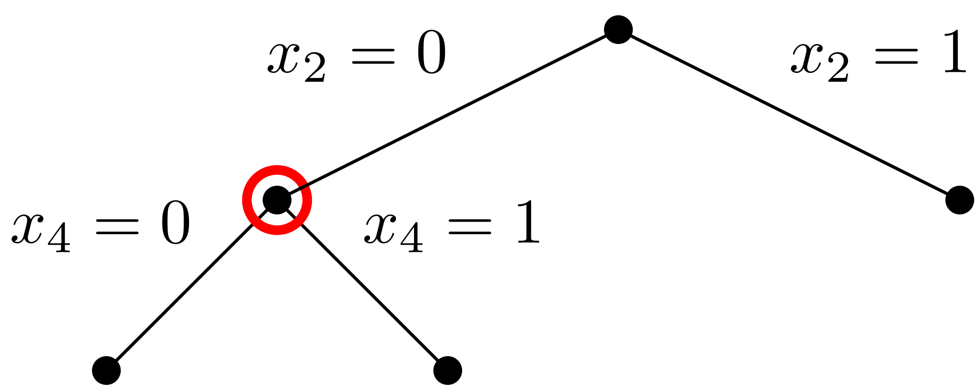
$\mathsf{P}(x_1, 0, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> $\mathsf{R}(x_1, 0, x_3, x_4)$

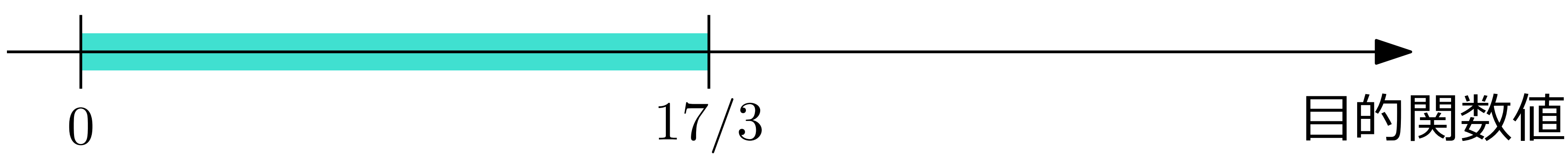
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1, x_4 = 1/3$

最適値 $= 14/3$





P$(x_1, 0, x_3, 0)$

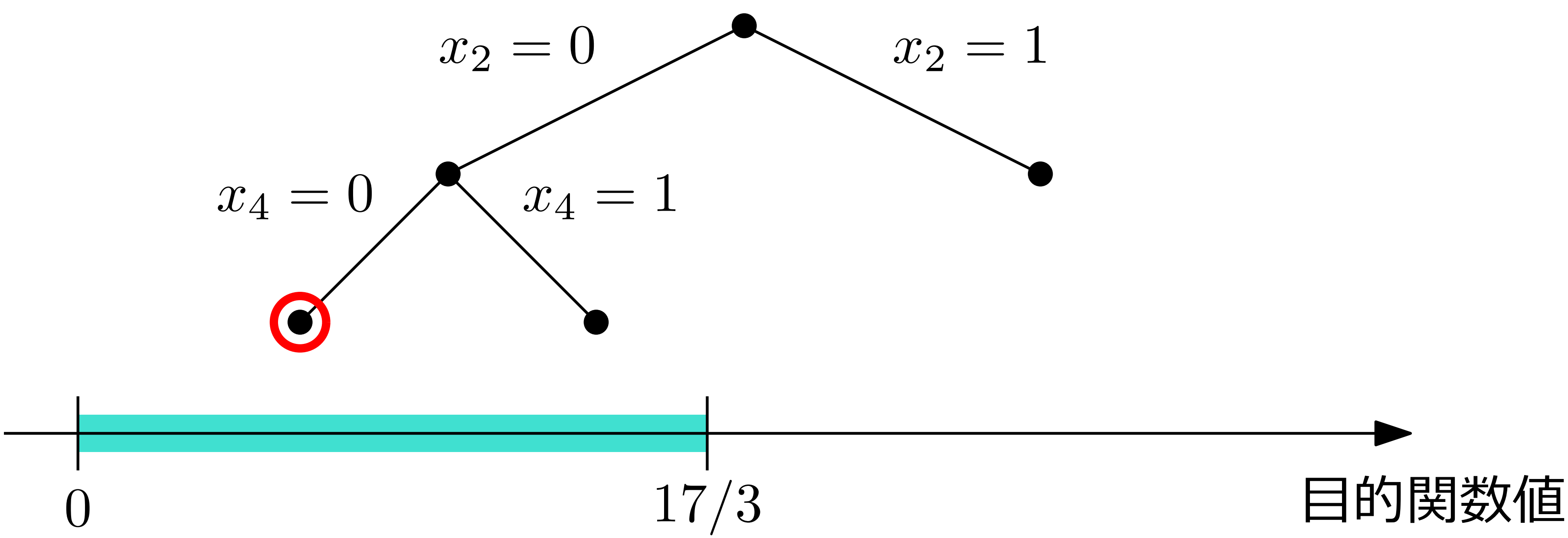
P$(x_1, 0, x_3, 0)$ —— 緩和 ——→ R$(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$

最適値 $= 4$



P$(x_1, 0, x_3, 0)$ —— 緩和 ⟶ R$(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$
最適値 $= 4$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$
最適値 $= 4$

線形計画緩和の性質 3

P と R に最適解が存在する
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解である
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

0　　17/3　　目的関数値

$\mathsf{P}(x_1, 0, x_3, 0)$：下界の更新

$\mathsf{P}(x_1, 0, x_3, 0)$ —— 緩和 ⟶ $\mathsf{R}(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

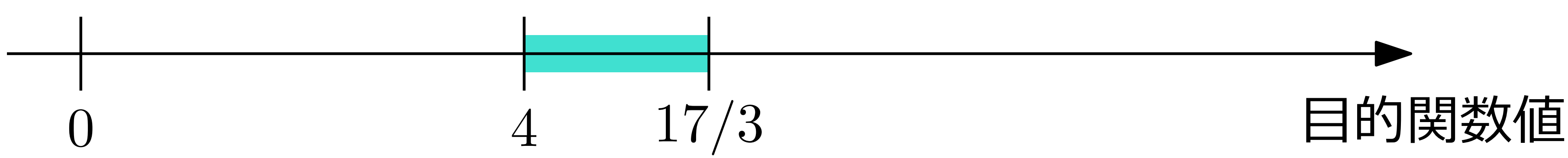
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$
最適値 $= 4$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$
最適値 $= 4$

特に，$\underline{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0}$ は $\mathsf{P}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の許容解

新しい暫定解とする



$\mathrm{P}(x_1, 0, x_3, 0)$：限定操作

$\mathrm{P}(x_1, 0, x_3, 0)$ —— 緩和 ⟶ $\mathrm{R}(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

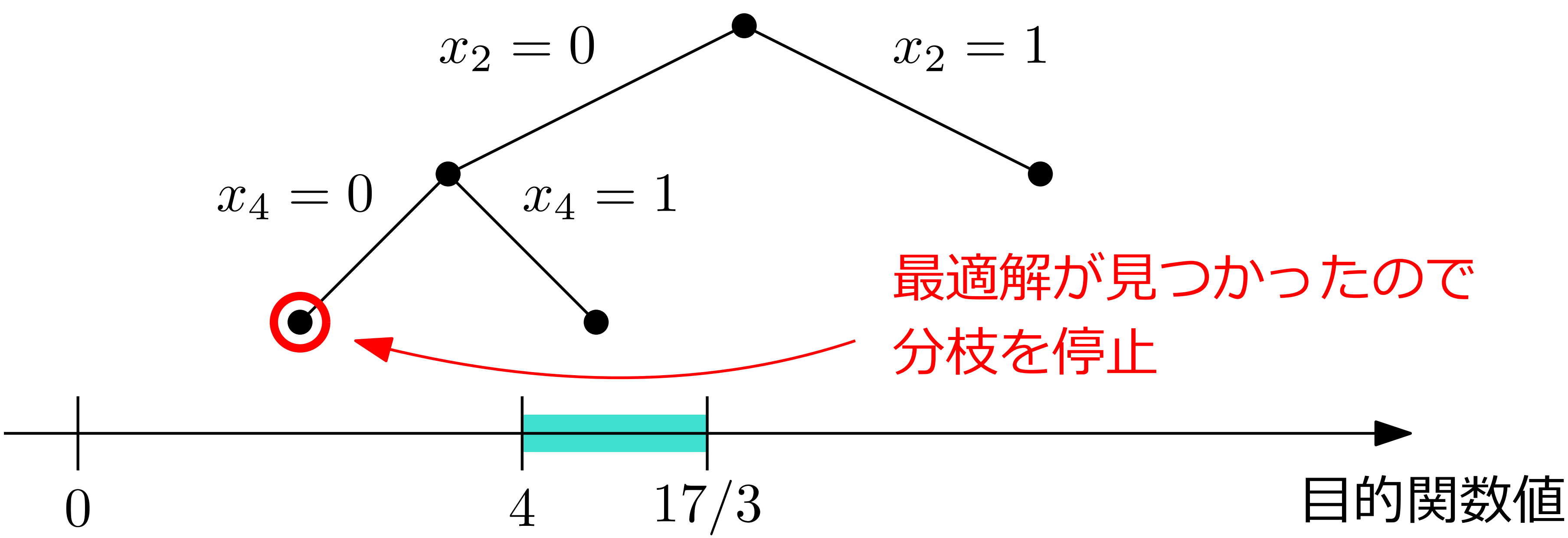
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$

最適値 $= 4$

最適解：$x_1 = 1,$
$x_3 = 1$

最適値 $= 4$



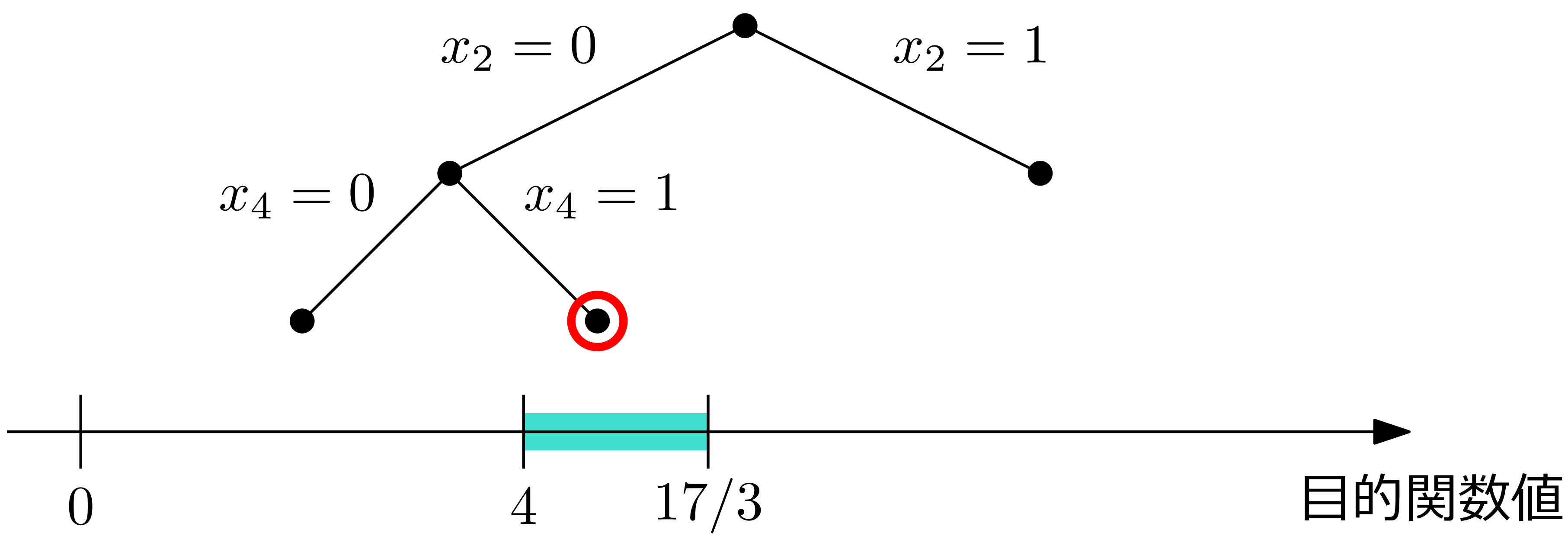
P$(x_1, 0, x_3, 1)$

P$(x_1, 0, x_3, 1)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2,$
$x_3 = 0$
最適値 $= 7/2$



P$(x_1, 0, x_3, 1)$：最適値の比較

P$(x_1, 0, x_3, 1)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

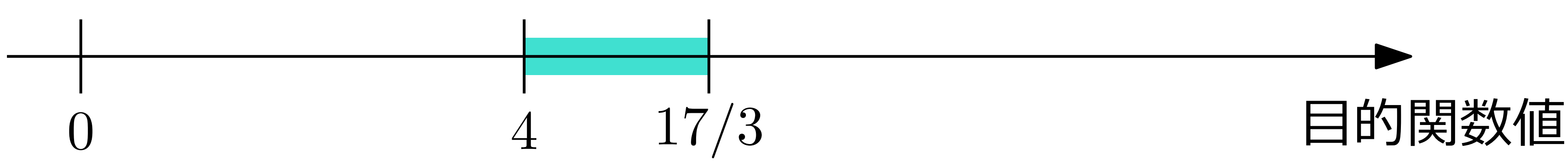
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2,$
$x_3 = 0$

P$(x_1, 0, x_3, 1)$ の最適値 $\leq 7/2$ ← 最適値 $= 7/2$

線形計画緩和の性質 1：系 (最大化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒
P の最適値 $\leq$ R の最適値



P$(x_1, 0, x_3, 1)$ —— 緩和 ——→ R$(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

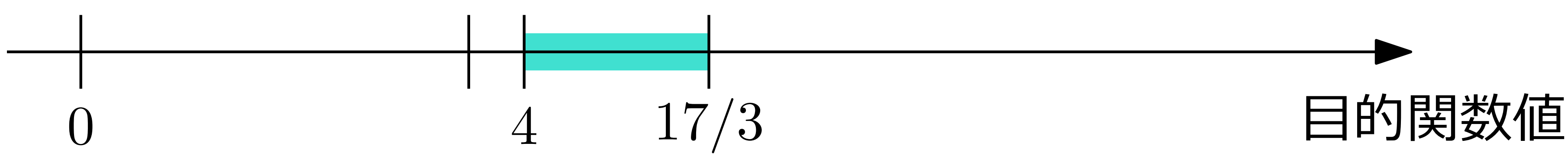
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2,$
$x_3 = 0$

P$(x_1, 0, x_3, 1)$ の最適値 $\leq 7/2$ ← 最適値 $= 7/2$

線形計画緩和の性質 1：系 (最大化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒
P の最適値 $\leq$ R の最適値



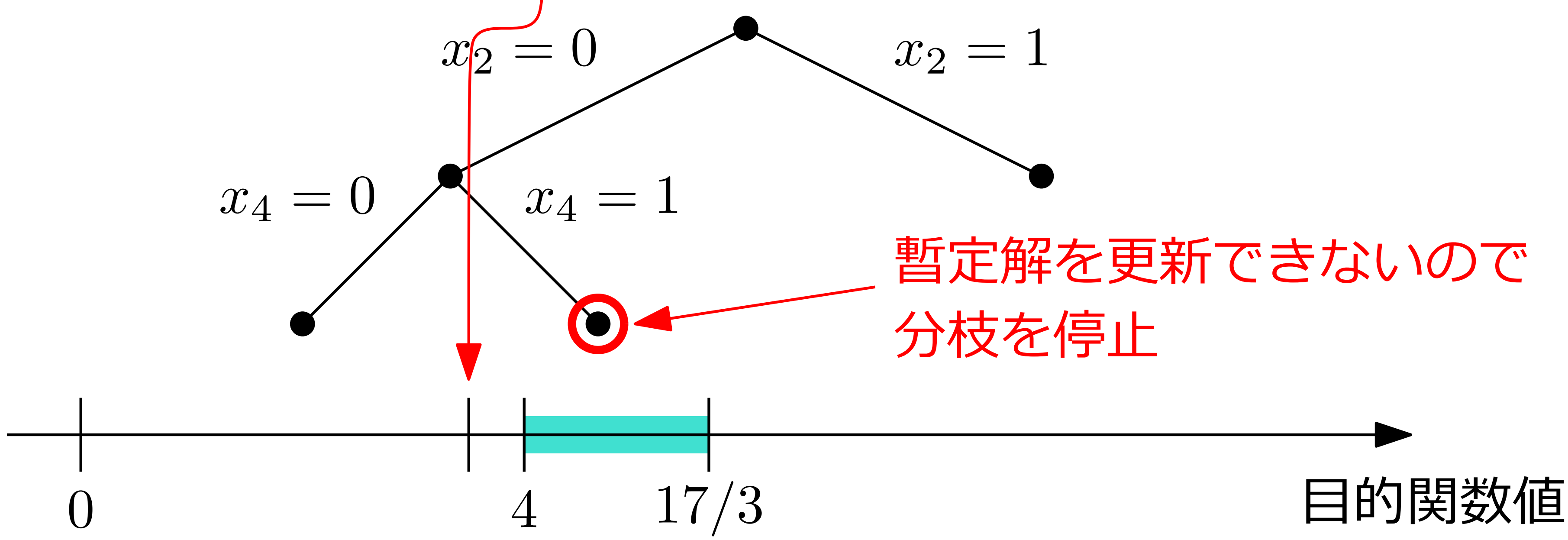
P$(x_1, 0, x_3, 1)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + x_3 + 2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + 3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2,$
$x_3 = 0$

P$(x_1, 0, x_3, 1)$ の最適値 $\leq 7/2$ ← 最適値 $= 7/2$



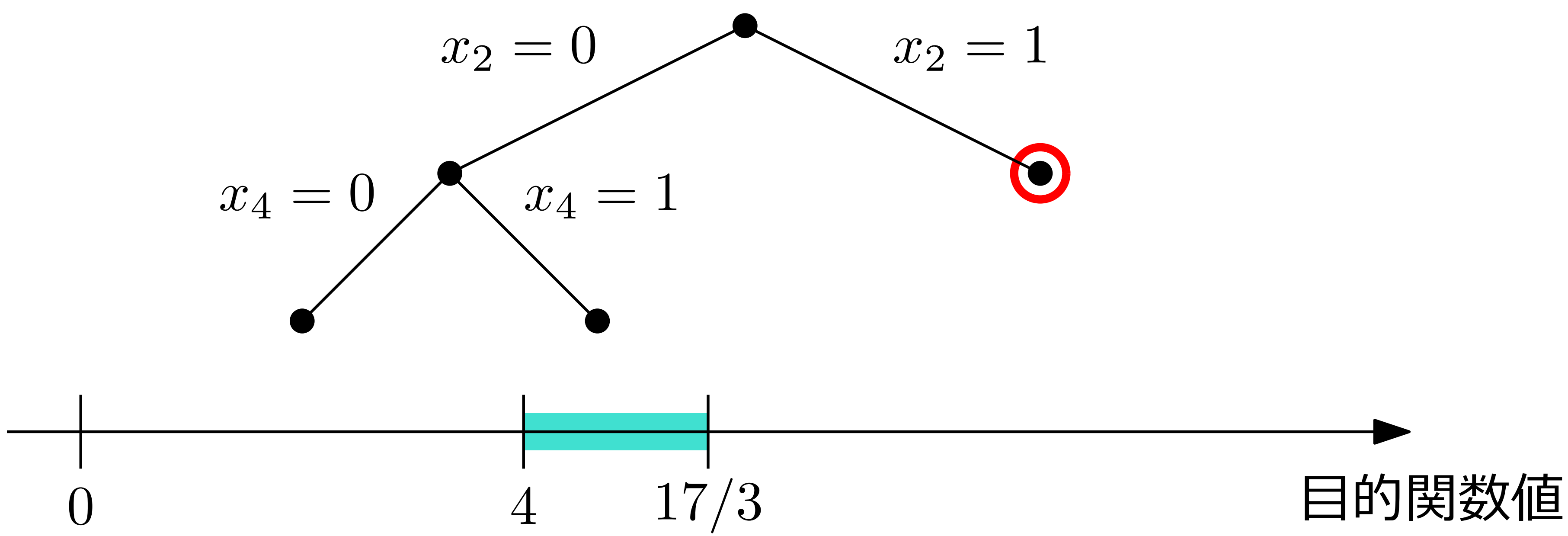
P$(x_1, 1, x_3, x_4)$

P$(x_1, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2,$
$x_3 = 0, x_4 = 0$
最適値 $= 11/2$



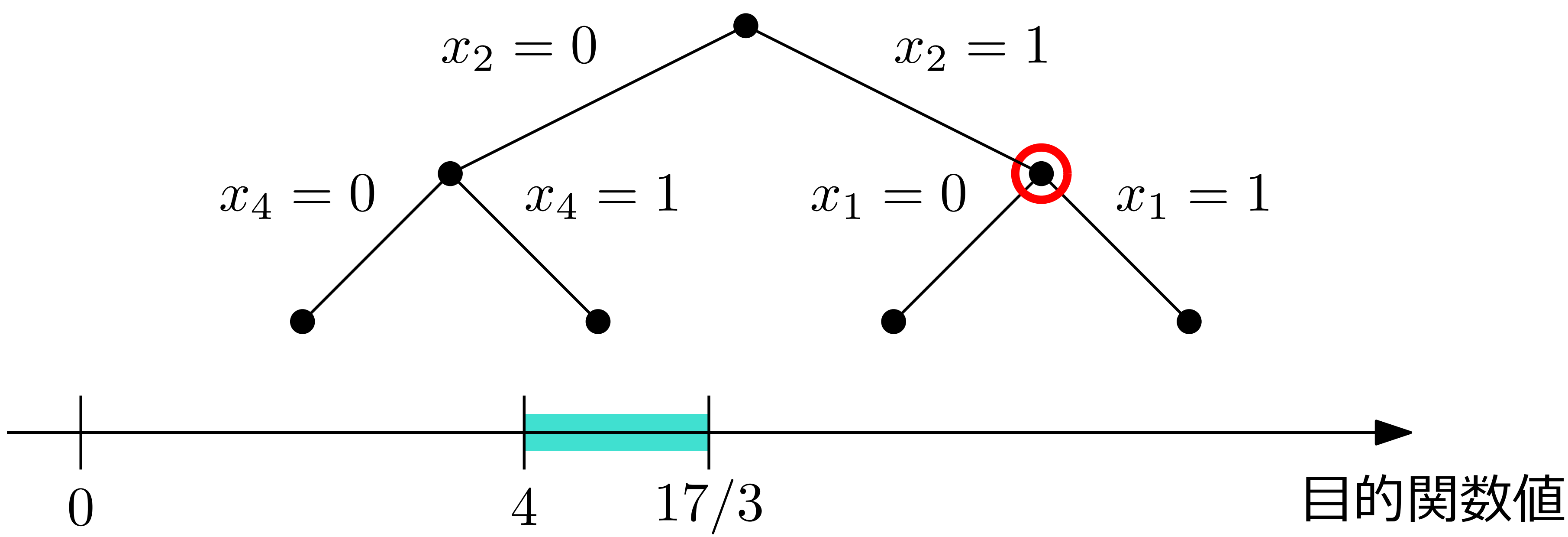
P$(x_1, 1, x_3, x_4)$：分枝操作

P$(x_1, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> R$(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3x_1 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：$x_1 = 1/2$,
$x_3 = 0, x_4 = 0$
最適値 $= 11/2$



$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$

$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> $\mathsf{R}(0, 1, x_3, x_4)$

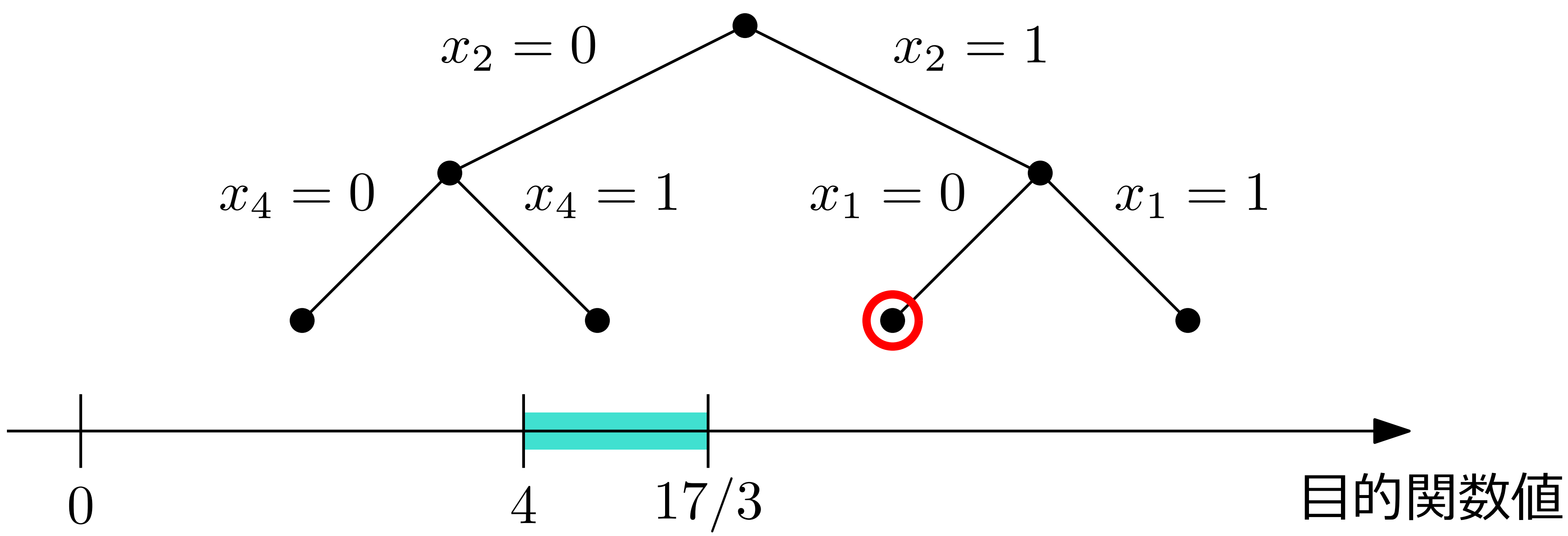
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$



$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$

$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ⟶ $\mathsf{R}(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$

線形計画緩和の性質 3

P と R に最適解が存在する

$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$ が R の最適解である

$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$ は P の最適解である

0 4 17/3 目的関数値

$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$：暫定解の更新

$\mathsf{P}(0, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ⟶ $\mathsf{R}(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 3 + x_3 + 3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$

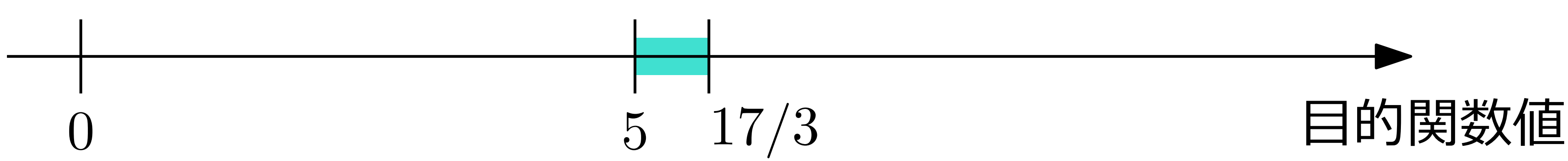
最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$

特に，$\underline{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0}$ は $\mathsf{P}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の許容解

新しい暫定解とする



P$(0, 1, x_3, x_4)$：限定操作

P$(0, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ⟶ R$(0, 1, x_3, x_4)$

P$(0, 1, x_3, x_4)$	R$(0, 1, x_3, x_4)$
max. $4 + x_3 + 2x_4$	max. $4 + x_3 + 2x_4$
s.t. $3 + x_3 + 3x_4 \leq 4$	s.t. $3 + x_3 + 3x_4 \leq 4$
$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i$	$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

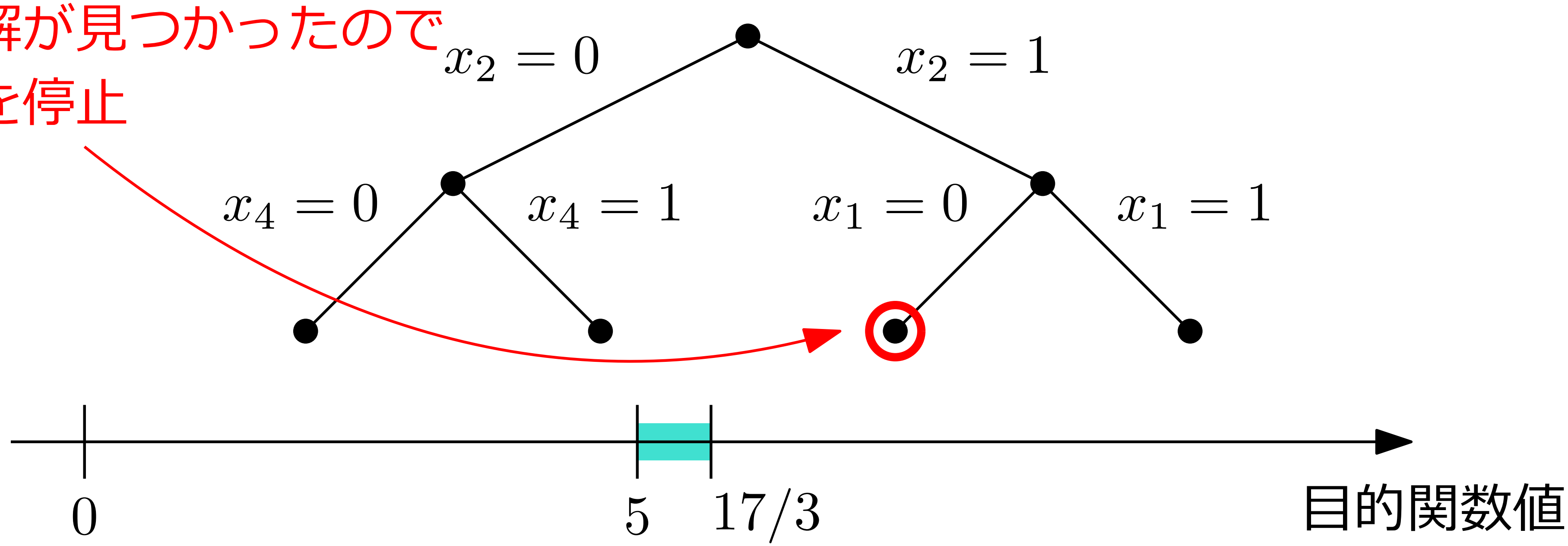
最適値 $= 5$

最適解：

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

最適値 $= 5$

最適解が見つかったので
分枝を停止



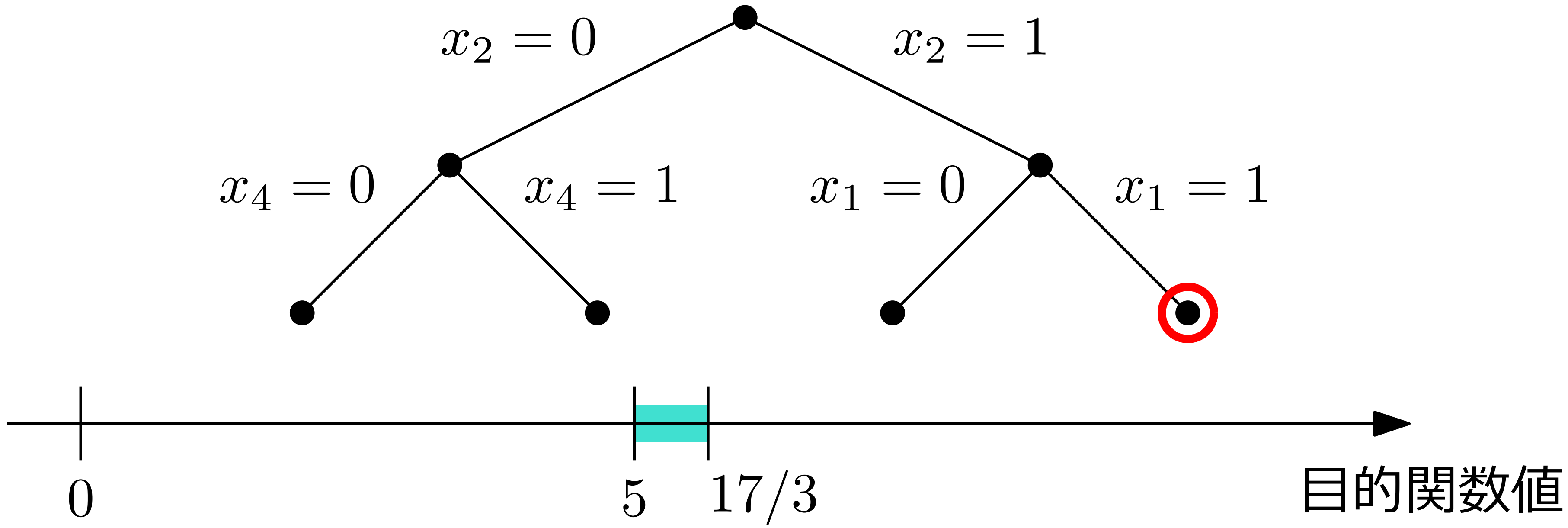
P$(1, 1, x_3, x_4)$

P$(1, 1, x_3, x_4)$ —— 緩和 ——> R$(1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2 + 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3 + 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2 + 3 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

非許容



$\mathsf{P}(1,1,x_3,x_4)$

$\mathsf{P}(1,1,x_3,x_4)$ —— 緩和 ——> $\mathsf{R}(1,1,x_3,x_4)$

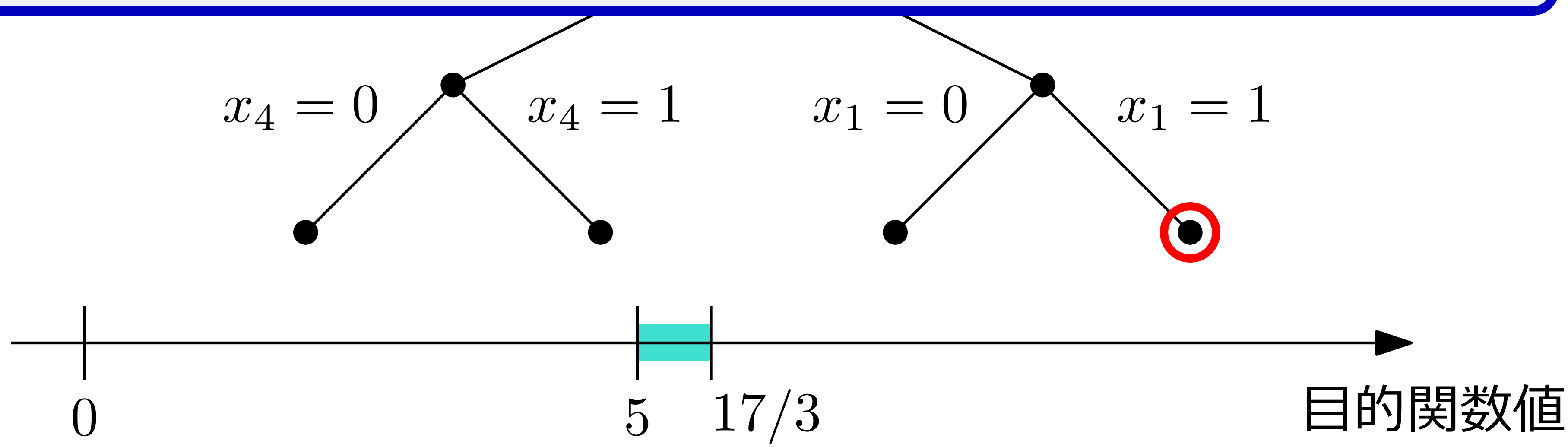
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3+4+x_3+2x_4 \\ \text{s.t.} & 2+3+x_3+3x_4 \le 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3+4+x_3+2x_4 \\ \text{s.t.} & 2+3+x_3+3x_4 \le 4 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

非許容 ←—— 非許容

線形計画緩和の性質 1

整数計画問題 P の許容領域 $\subseteq$ 線形計画緩和 R の許容領域



$\mathsf{P}(1,1,x_3,x_4)$：限定操作

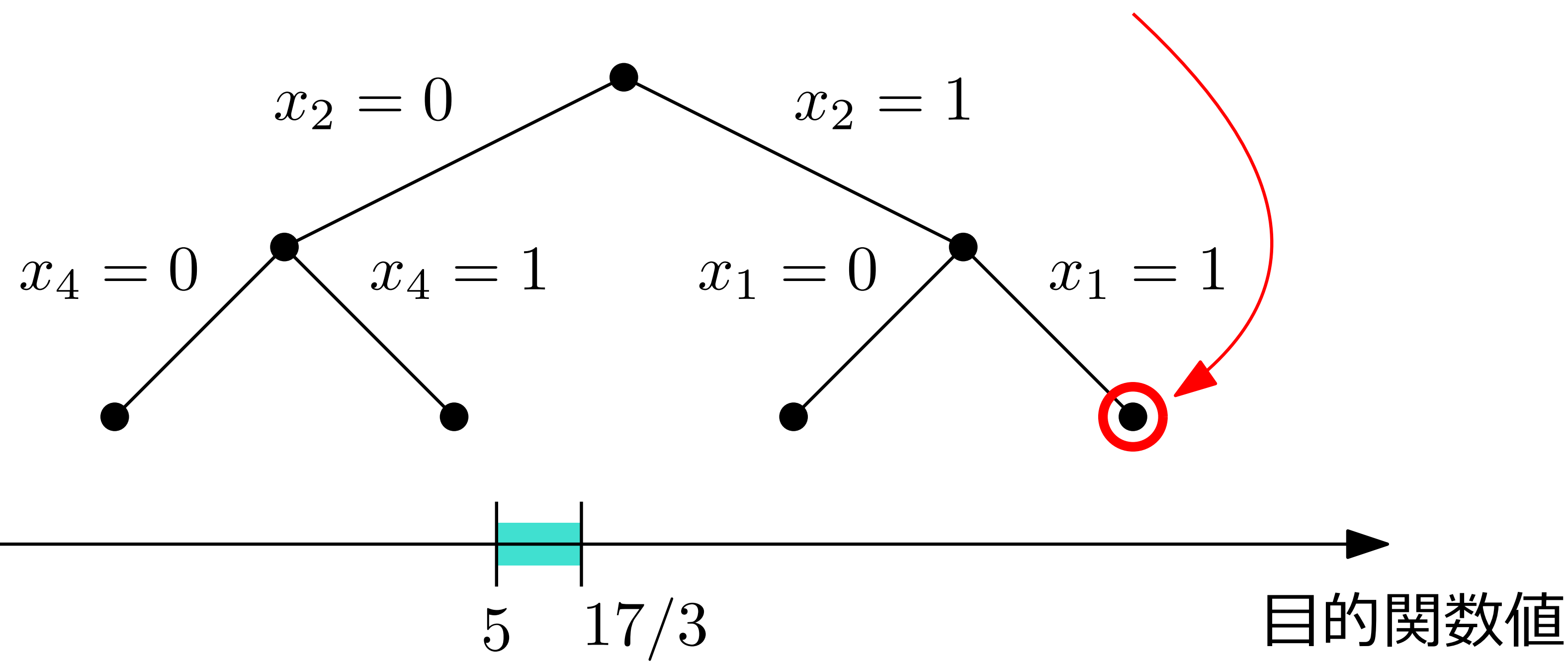
$\mathsf{P}(1,1,x_3,x_4)$ —— 緩和 ——> $\mathsf{R}(1,1,x_3,x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3+4+x_3+2x_4 \\ \text{s.t.} & 2+3+x_3+3x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall\, i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & 3+4+x_3+2x_4 \\ \text{s.t.} & 2+3+x_3+3x_4 \leq 4 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \end{array}$$

非許容 ← 非許容

暫定解を更新できないので，分枝を停止



アルゴリズムの終了

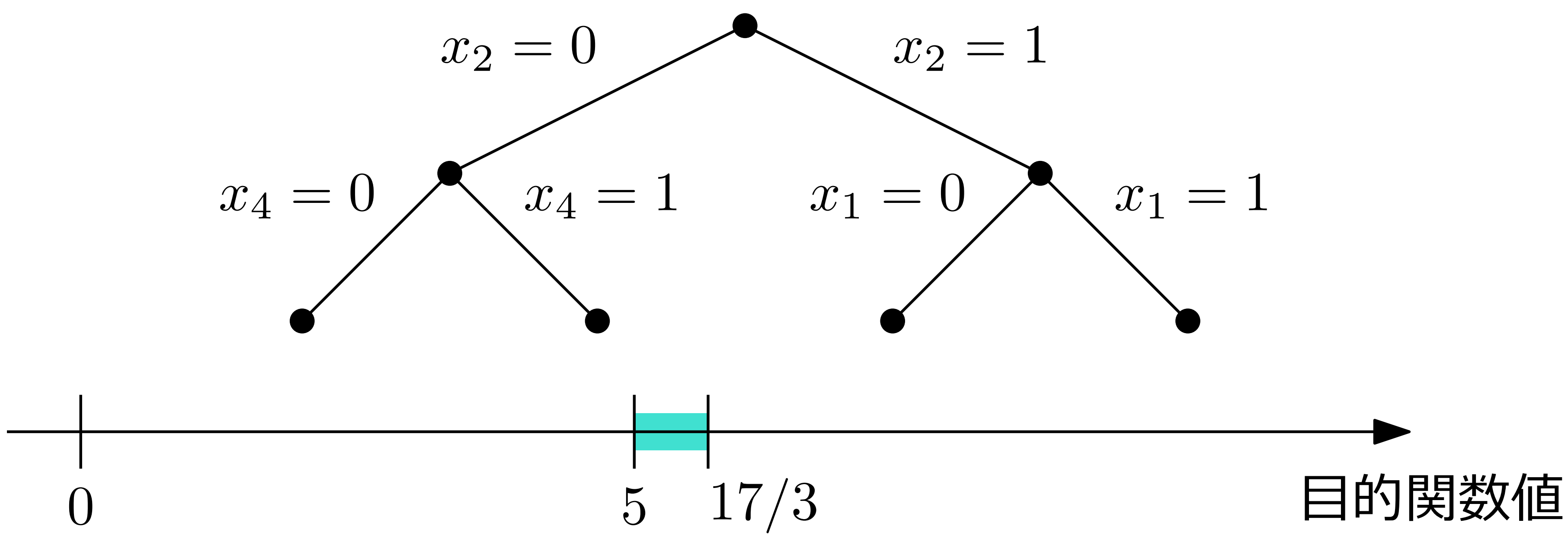
P(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\
& x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i
\end{aligned}
$$

これですべての場合を尽くした

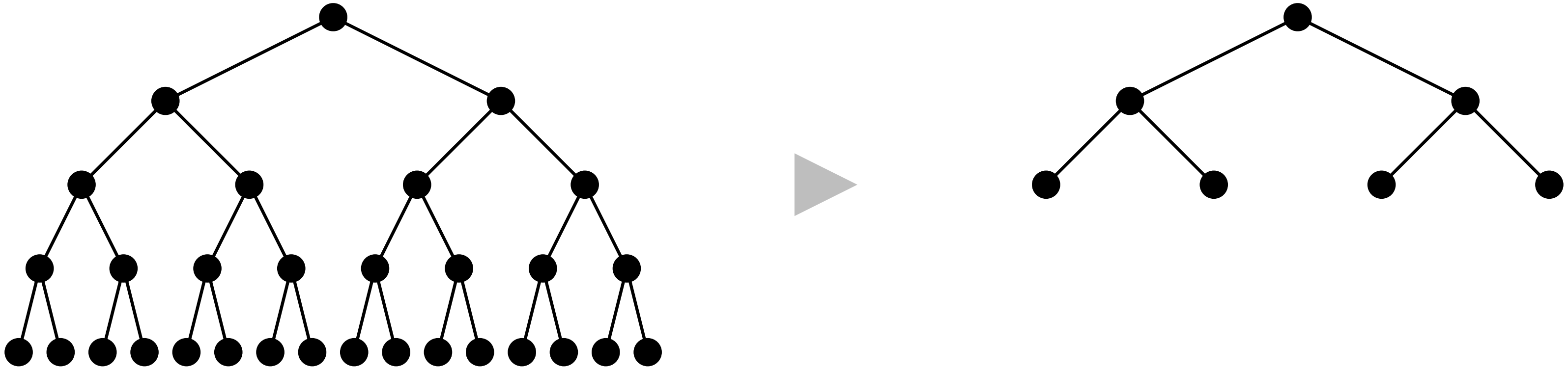
現在の暫定解が P(x_1, x_2, x_3, x_4) の最適解

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$



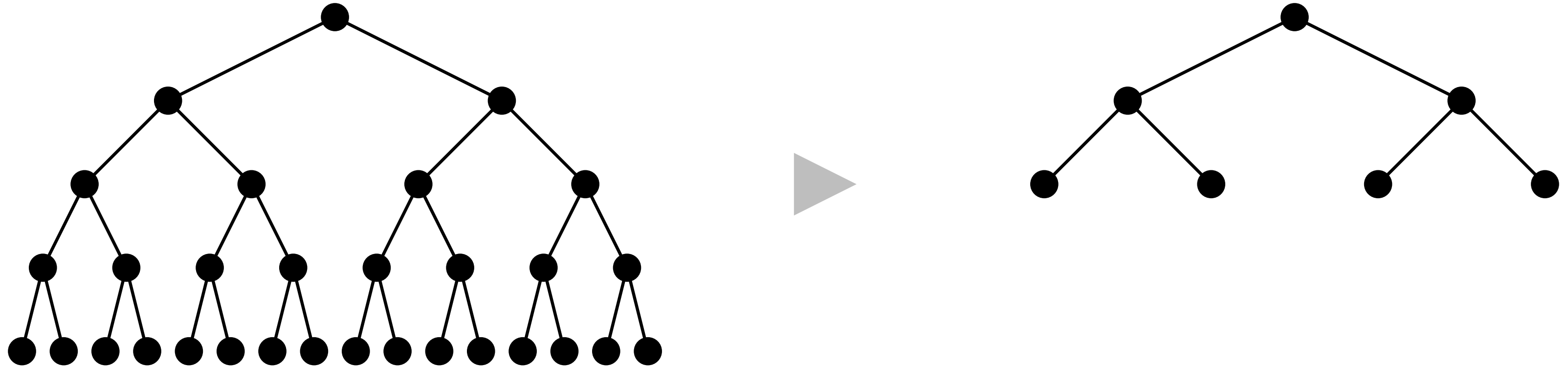
今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n
\end{aligned}
$$

分枝限定法：設定 (1)

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

分枝限定法：設定 (1)

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

↓ 変数の固定

P$(x_1, x_2, \ldots, x_i = a, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad x_i = a, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

分枝限定法：設定 (1)

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

↓ 変数の固定

P$(x_1, x_2, \ldots, x_i = a, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad x_i = a, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

→

R$(x_1, x_2, \ldots, x_i = a, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad x_i = a, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

分枝限定法：設定 (2)

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{lrl} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} & \in \{0,1\}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

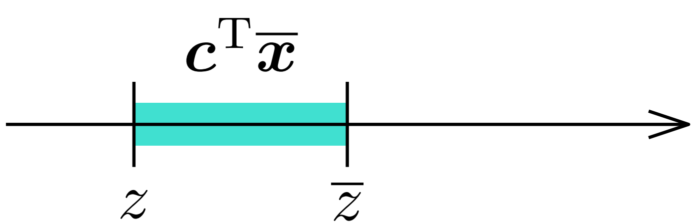
$$\begin{array}{lrl} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

以下を保持

多くの場合，暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{x}}$

- $\mathcal{L}$：解くべき問題の集合 (リスト)
- $\overline{\boldsymbol{x}}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の許容解 (暫定解)
- $\overline{z}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の最適値の上界
- $\underline{z}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の最適値の下界

不変条件：$\underline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{z}$



分枝限定法：初期化

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, & \\
 & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n &
\end{array}
$$

$\boxed{\text{初期化}}$

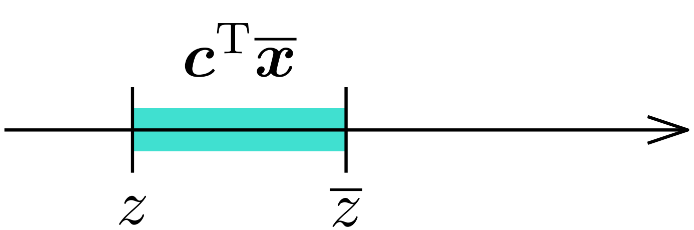
- $\mathcal{L} \leftarrow \{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$
- $\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow$ P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の許容解 (の 1 つ)
  (見つからなかったら初期化しない)
- $\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{x}}$
  ($\overline{\boldsymbol{x}}$ が見つからなかったら $+\infty$)
- $\underline{z} \leftarrow$ 適当に見つける
  (見つからなかったら $-\infty$)

$\boxed{\text{以下を保持}}$

多くの場合，暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{x}}$

- $\mathcal{L}$：解くべき問題の集合 (リスト)
- $\overline{\boldsymbol{x}}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の許容解 (暫定解)
- $\overline{z}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の最適値の上界
- $\underline{z}$：P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の最適値の下界

$\boxed{\text{不変条件}}$：$\underline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{z}$



分枝限定法：反復 (1)

解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

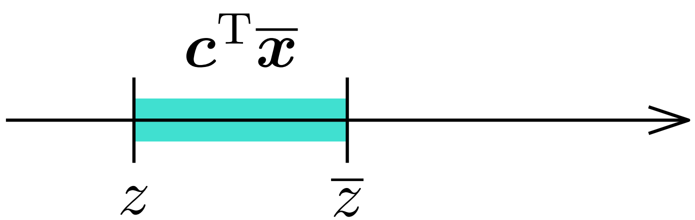
線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

$\boxed{\text{反復}}$：$\mathcal{L} = \emptyset$ となるまで次を反復

1. $\mathcal{L}$ から問題を 1 つ取り出す $\to$ P とする
2. P の線形計画緩和 R を解く
3. 限定操作を行う
4. (必要ならば) 分枝操作を行う



解きたい問題

01 整数計画問題： $\xrightarrow{\text{緩和}}$ 線形計画緩和：

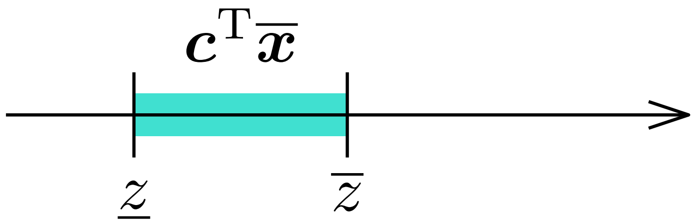
P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\xrightarrow{\text{緩和}}$ R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}
\end{array}
$$

許容領域は有界

- 非許容
- 最適解が存在



解きたい問題

01 整数計画問題：

P$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{lrl} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} & \in \{0,1\}^n \end{array}$$

緩和 →

線形計画緩和：

R$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{lrl} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

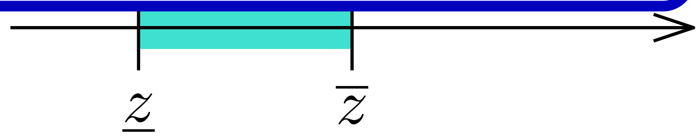
許容領域は有界

非許容 ←

- 非許容
- 最適解が存在

線形計画緩和の性質 1

整数計画問題 P の許容領域 $\subseteq$ 線形計画緩和 R の許容領域



線形計画緩和の性質 3

P と R に最適解が存在する

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解である

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$

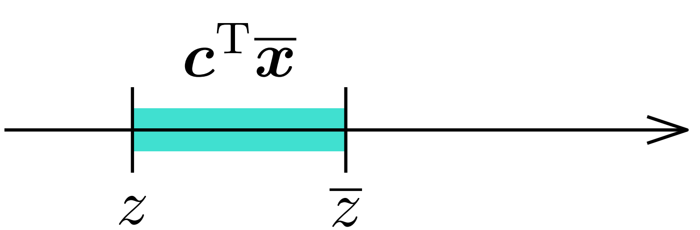
$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}$

- 非許容
- 最適解が存在

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ とする

$(\therefore$ P$(x_1,\ldots,x_n)$ の許容解)

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解 $\longleftarrow$ (1) $\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$ のとき



線形計画緩和の性質 3

P と R に最適解が存在する
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解である
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$

$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}$

- 非許容
- 最適解が存在

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ とする

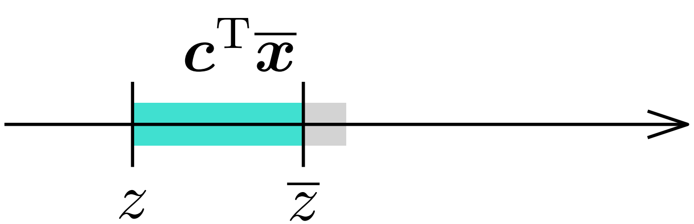
(1) $\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$ のとき

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解 ⟵

($\therefore$ P$(x_1, \ldots, x_n)$ の許容解)

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$ ならば

$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$, $\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ とする



解きたい問題

01 整数計画問題：

線形計画緩和：

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

R の最適値 $\leq$ P の最適値

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$,

$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$,

$\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$

は

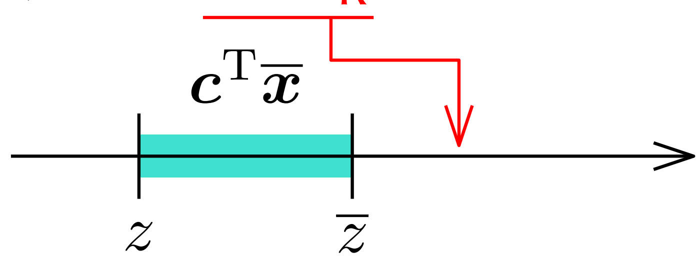
有界

- 非許容
- 最適解が存在

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ とする

P の最適解は ← (2) $\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ のとき

暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ よりよくない



分枝限定法：反復 (3) 分枝操作

解きたい問題

01 整数計画問題：

$\mathsf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

緩和

線形計画緩和：

$\mathsf{R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

許容領域は有界

- 非許容
- 最適解が存在

$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$ とする

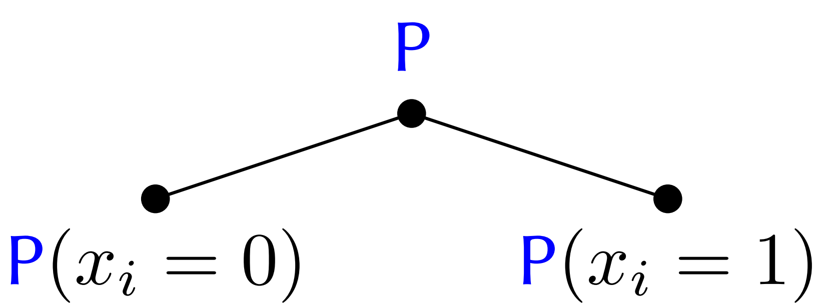
(3) どちらでもないとき

ある i に対して，

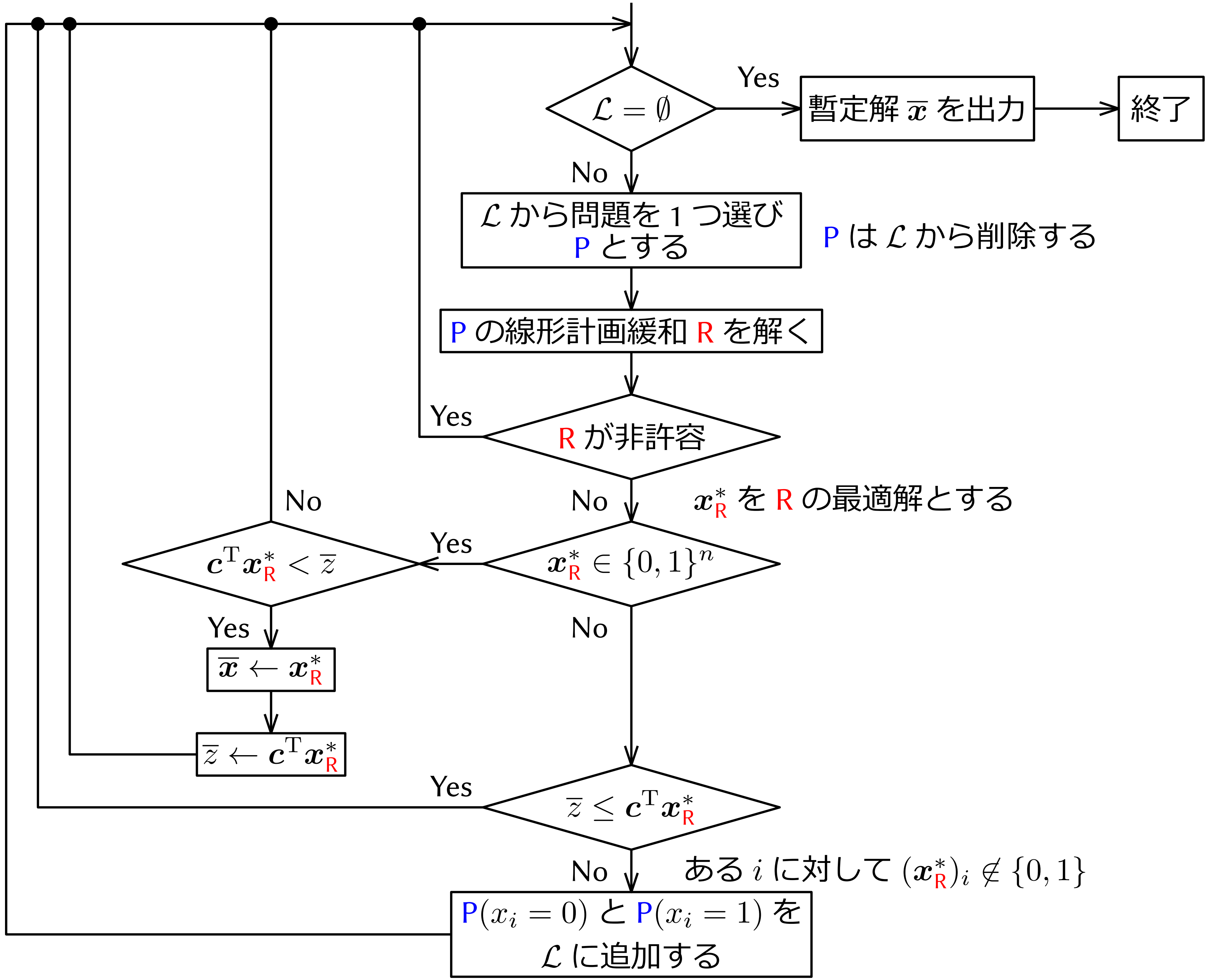
$(x^*_{\mathsf{R}})_i \notin \{0, 1\}$

$\mathcal{L}$ に次の 2 つを追加

- $\mathsf{P}(x_i = 0)$
- $\mathsf{P}(x_i = 1)$

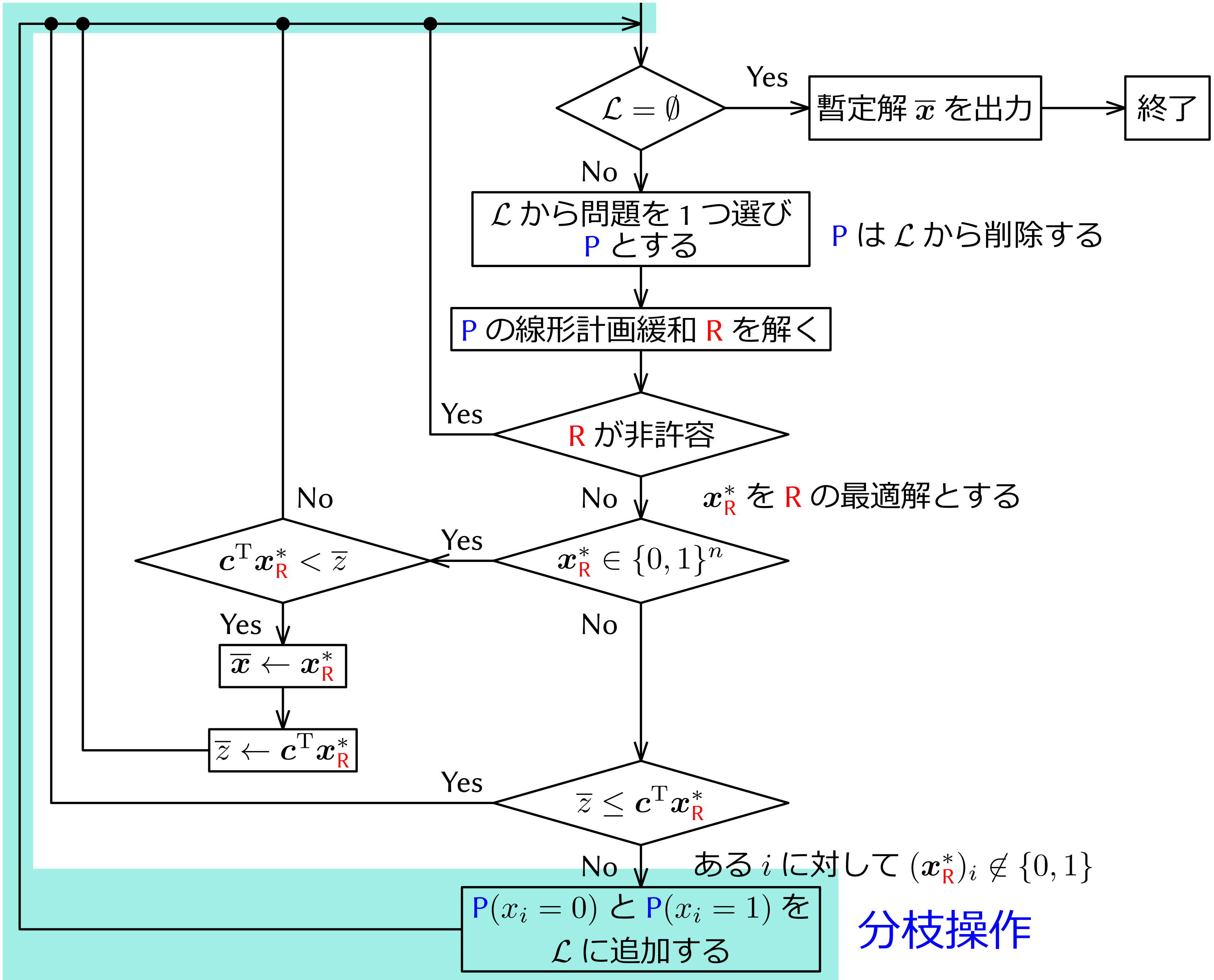


分枝限定法：反復まとめ



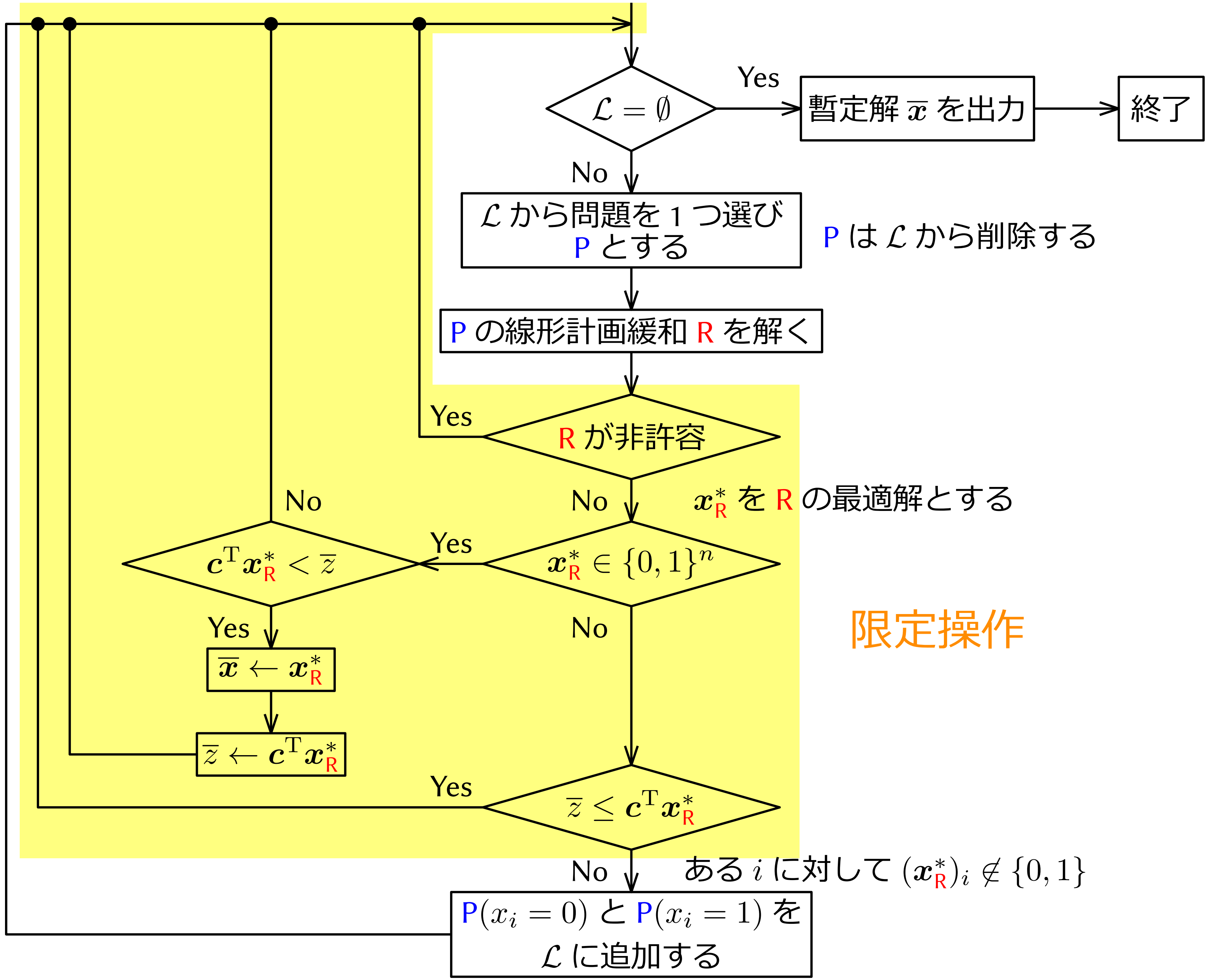
$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
No
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
Yes
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

分枝限定法：反復 まとめ

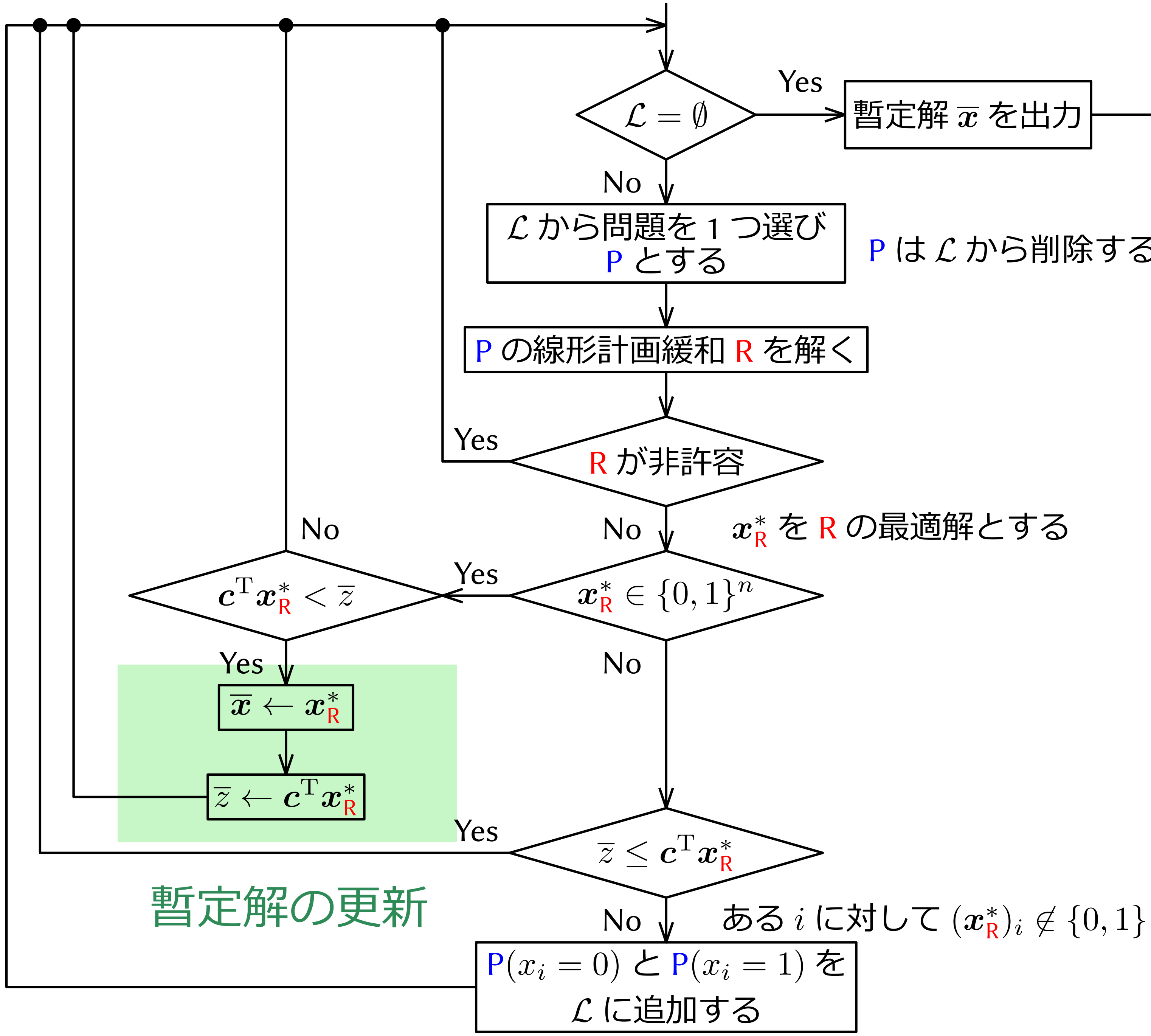


$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$ を R の最適解とする
No
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}} < \overline{z}$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$
No
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$
Yes
$\overline{z} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}}$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathsf{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する
分枝操作

分枝限定法：反復まとめ


$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{x}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
x^*_{R} を R の最適解とする
No
Yes
$c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
$x^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
No
限定操作
$\overline{x} \leftarrow x^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$
Yes
$\overline{z} \leq c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$
No
ある i に対して $(x^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
P$(x_i = 0)$ と P$(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

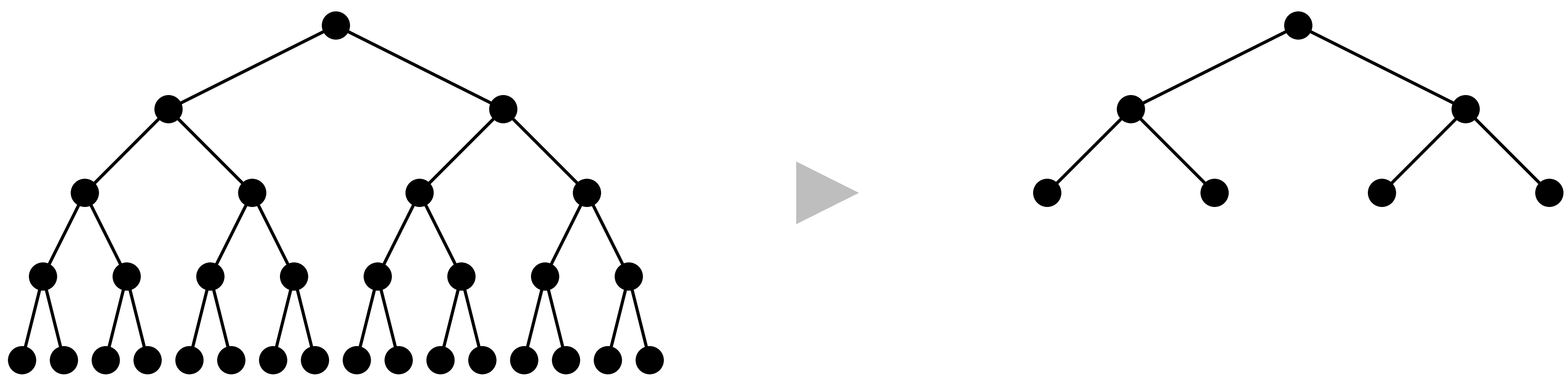
分枝限定法：反復まとめ



$\mathcal{L} = \emptyset$
Yes
暫定解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を出力
終了
No
$\mathcal{L}$ から問題を 1 つ選び P とする
P は $\mathcal{L}$ から削除する
P の線形計画緩和 R を解く
Yes
R が非許容
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする
No
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \{0,1\}^n$
Yes
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} < \overline{z}$
No
Yes
$\overline{\boldsymbol{x}} \leftarrow \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
$\overline{z} \leftarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
暫定解の更新
No
Yes
$\overline{z} \le \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$
No
ある i に対して $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}})_i \notin \{0,1\}$
$\mathrm{P}(x_i = 0)$ と $\mathrm{P}(x_i = 1)$ を $\mathcal{L}$ に追加する

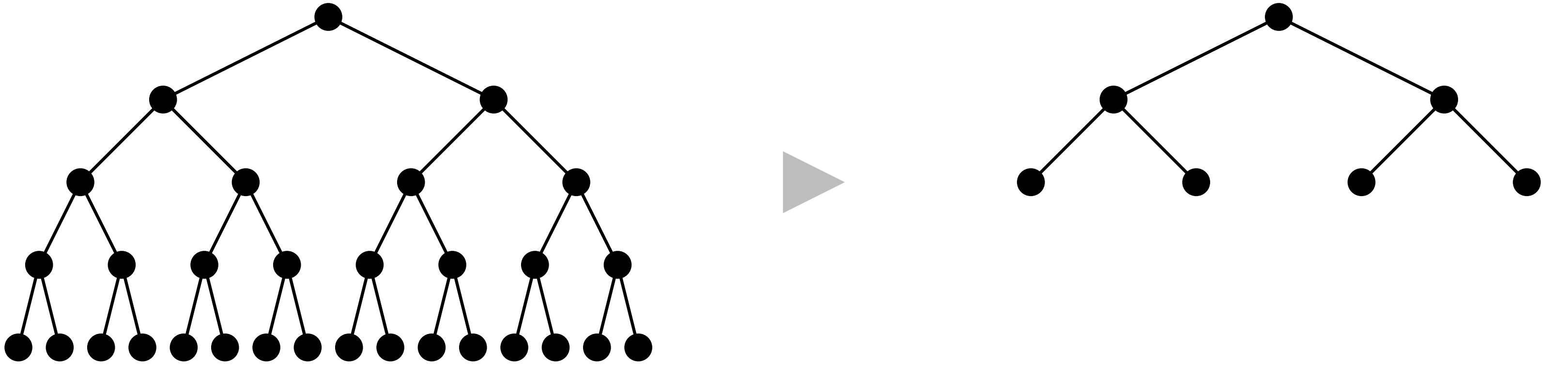
今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界



今日の内容

- 分枝限定法：例 (準備)
- 分枝限定法：例
- 分枝限定法：一般論
- よい上界とよい下界

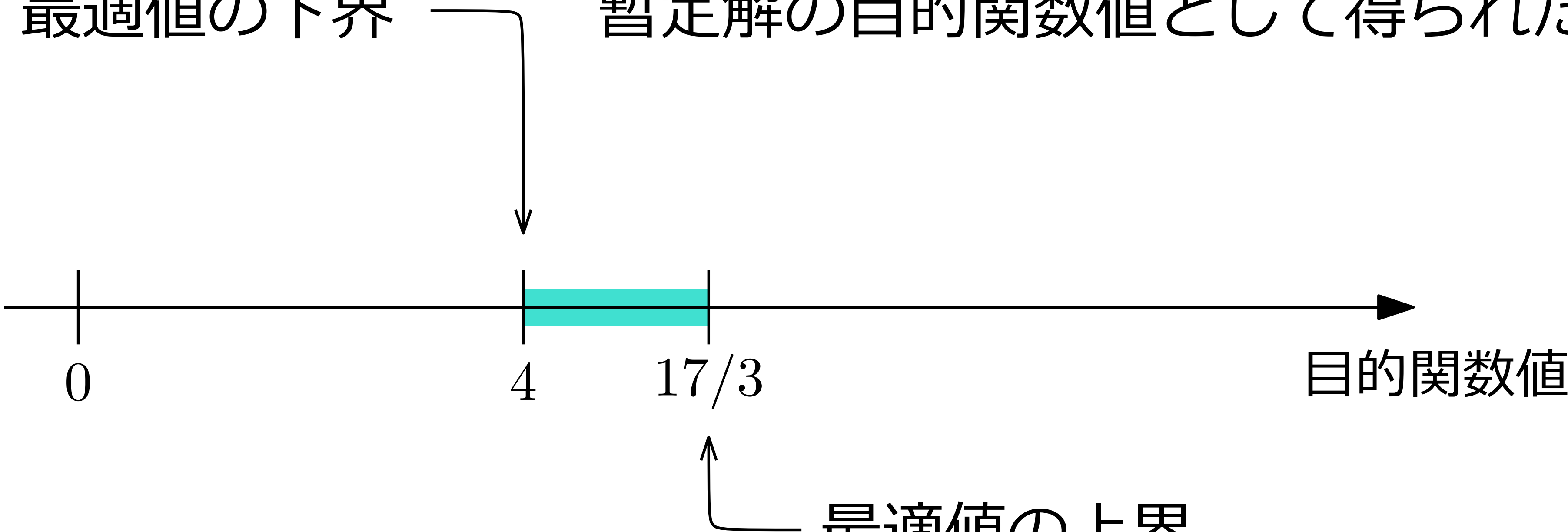


上界と下界

先ほどのナップサックの問題の例において

最適値の下界

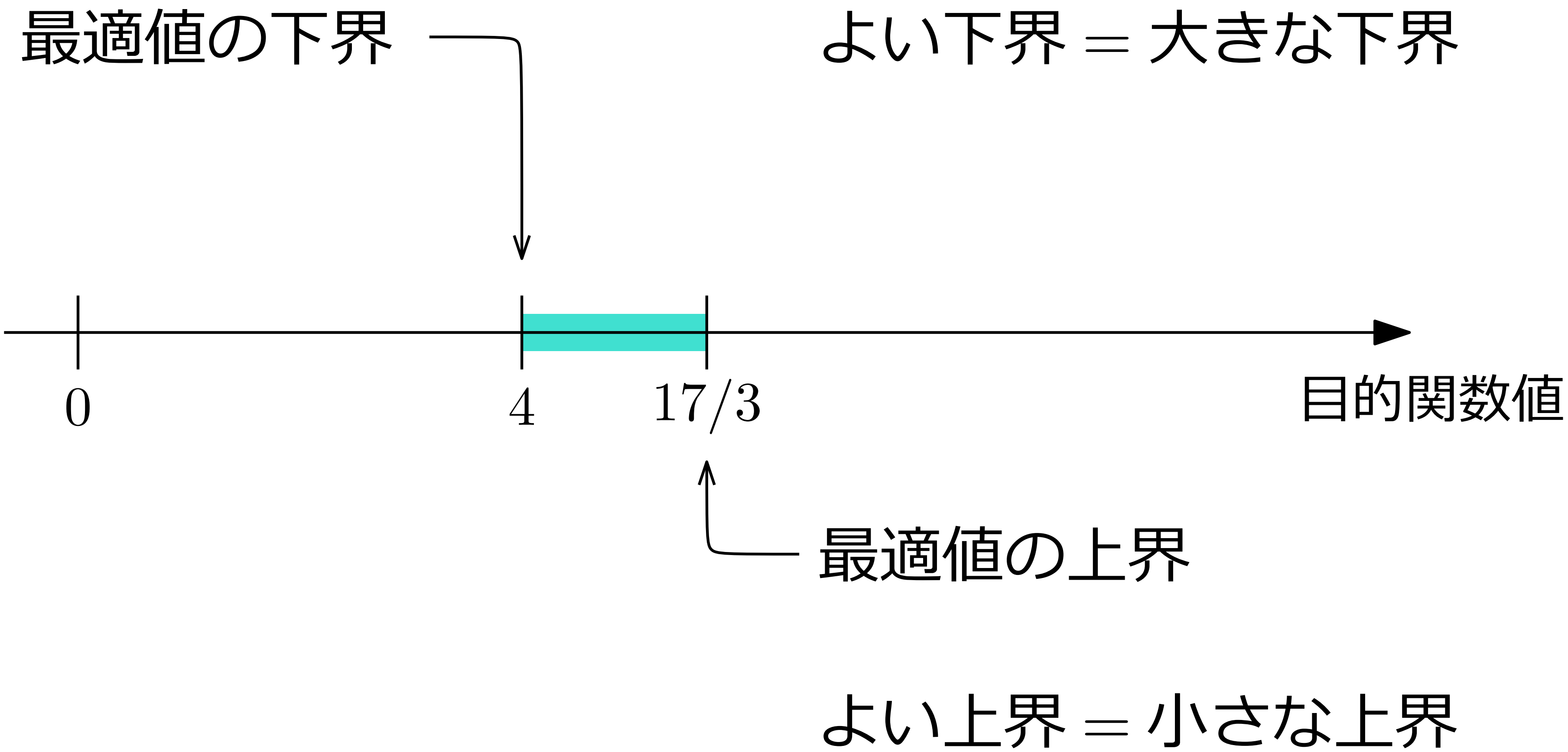
暫定解の目的関数値として得られた



最適値の上界

線形計画緩和の最適値として得られた

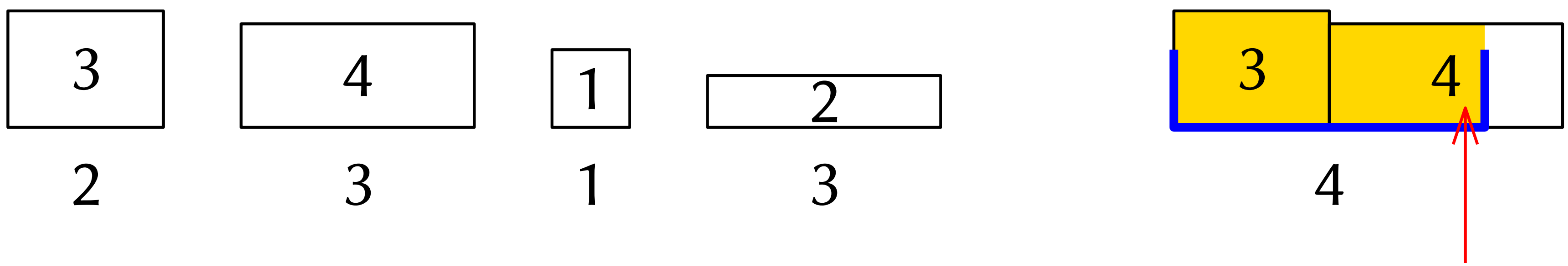
よい上界とよい下界



問題固有 の性質を用いて，よい上界と下界を得る

よい上界を効率よく得る方法

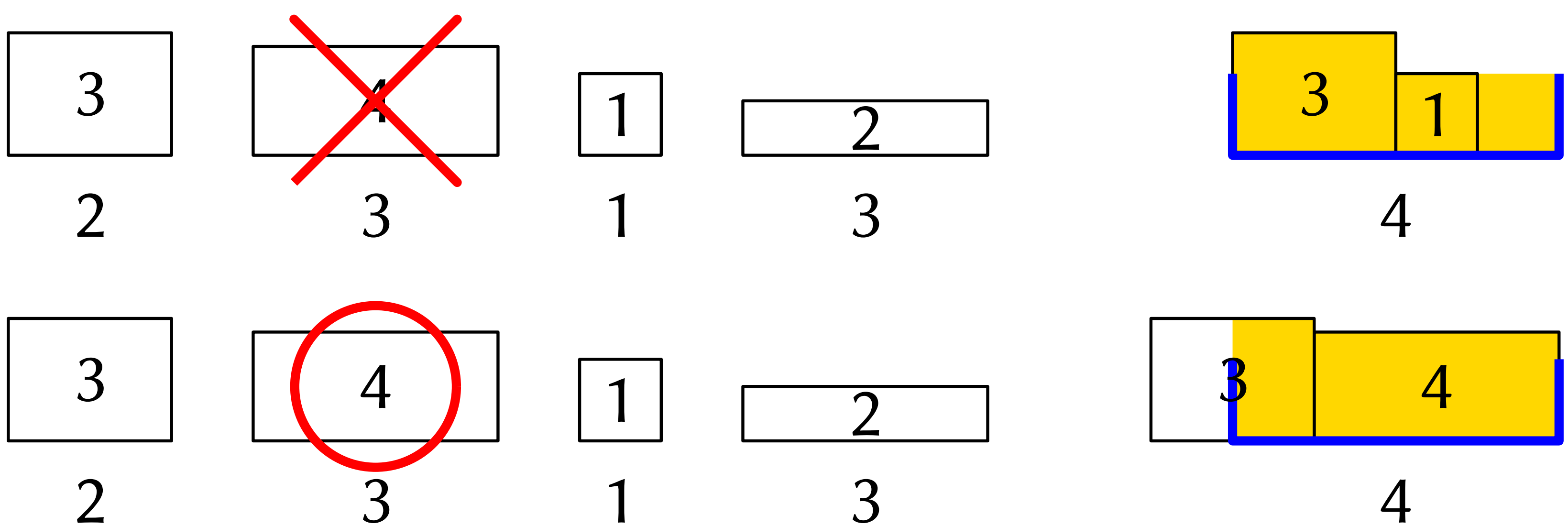
(1) 線形計画緩和の最適値



$O(n)$ 時間で計算可能 (Balas, Zemel ’80)

臨界アイテム

(2) 臨界アイテムの切り捨てと切り上げ (Martello, Toth ’77)

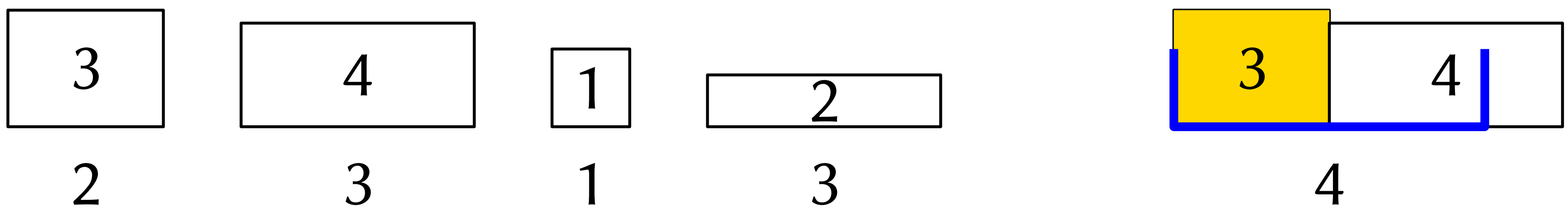


大きな方が上界

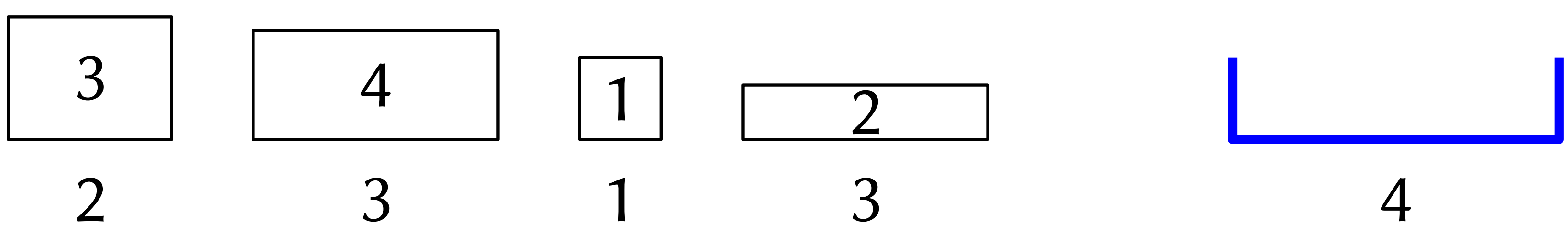
よい下界を効率よく得る方法

≈ よい暫定解を効率よく得る方法

(1) 線形計画緩和の最適解の丸め (rounding)



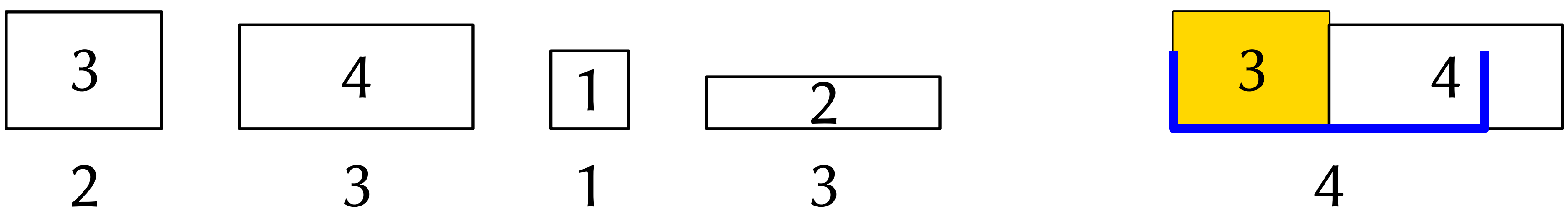
(2) 貪欲法 (greedy method)



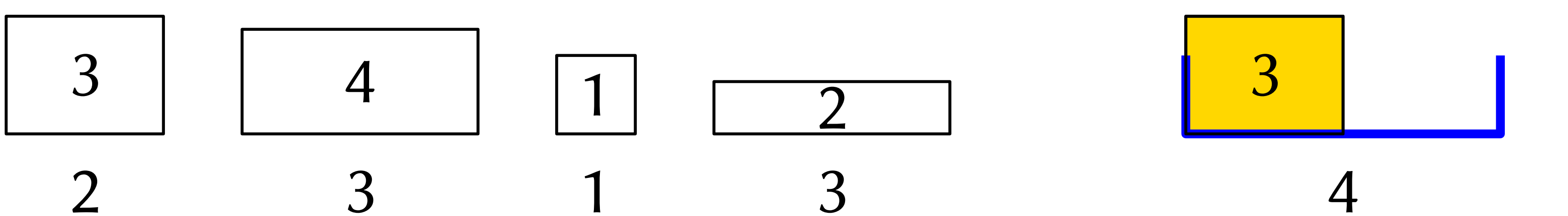
よい下界を効率よく得る方法

≈ よい暫定解を効率よく得る方法

(1) 線形計画緩和の最適解の丸め (rounding)



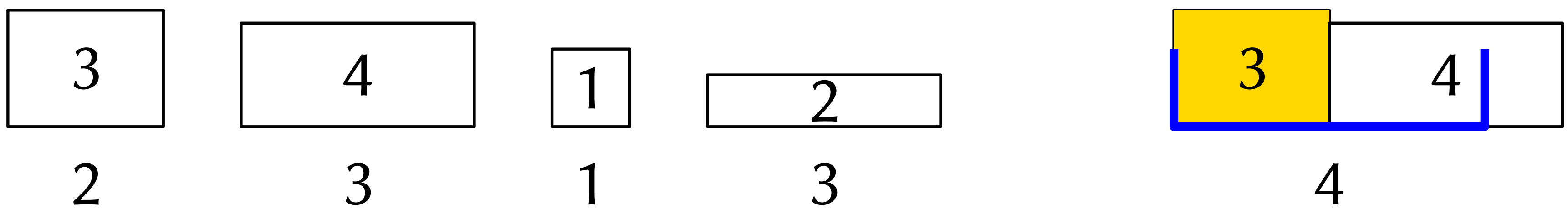
(2) 貪欲法 (greedy method)



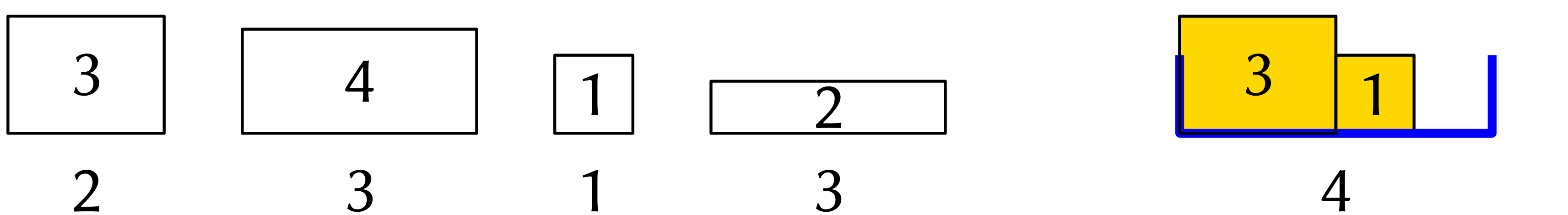
よい下界を効率よく得る方法

≈ よい暫定解を効率よく得る方法

(1) 線形計画緩和の最適解の丸め (rounding)



(2) 貪欲法 (greedy method)



他の方法：前進貪欲法，後退貪欲法 (Pisinger '95)

次回予告

次回の内容

切除平面法

- 重要なアイディア：緩和の強化