離散最適化基礎論

第 7 回

整数計画モデリング (3)：離接計画

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 11 月 22 日

最終更新：2022 年 11 月 29 日　09:07

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

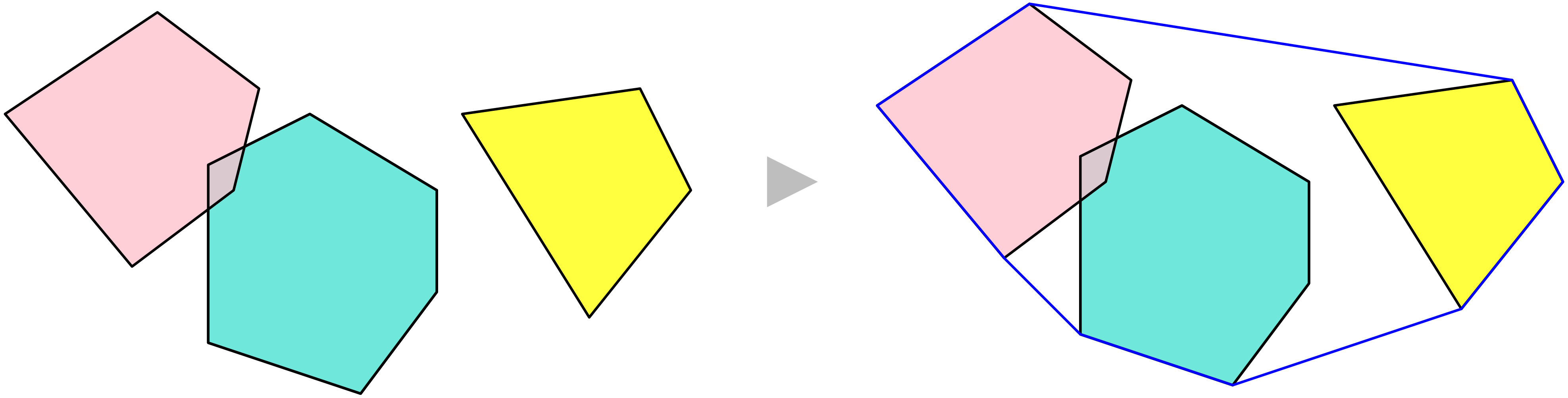
8.	分枝限定法	(11/29)
9.	切除平面法	(12/6)
10.	妥当不等式の追加	(12/13)
11.	列生成法	(12/20)
*	休み (国内出張)	(12/27)
*	休み (冬季休業)	(1/3)
12.	ラグランジュ緩和 (1)：原理	(1/10)
13.	ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和	(1/17)

<まとめ・予備>

14.	まとめ	(1/24)
15.	予備日	(1/31)

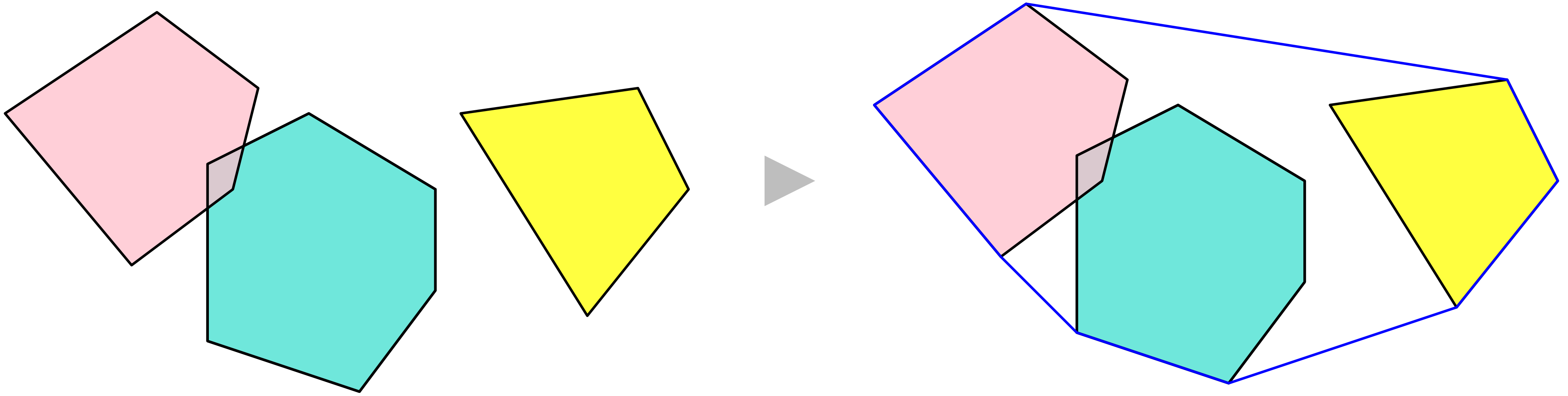
今日の内容

- 離接計画：モデル化
- 離接計画：線形計画緩和



今日の内容

- 離接計画：モデル化
- 離接計画：線形計画緩和

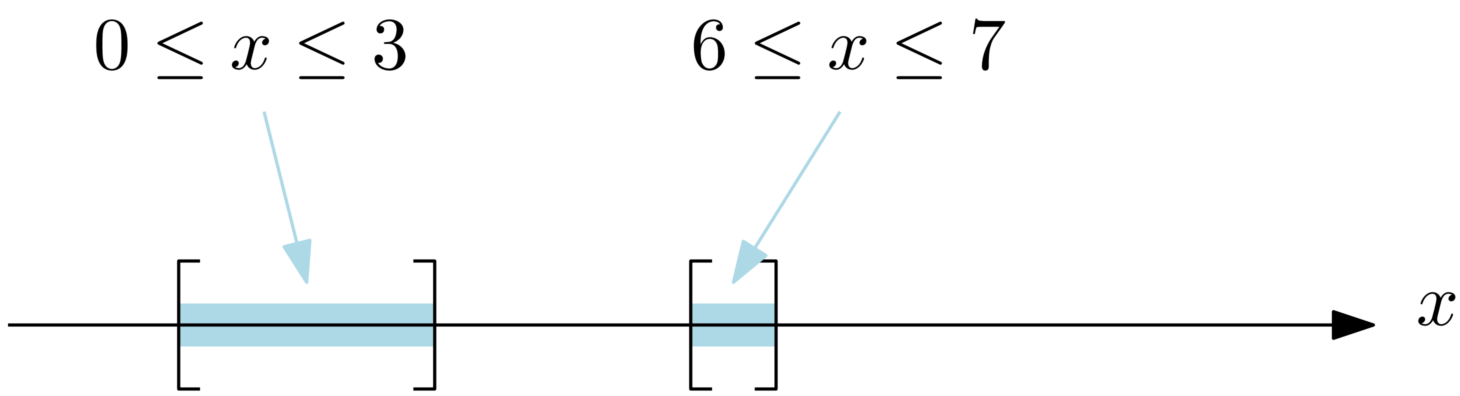


離接計画とは？

離接計画 (disjunctive programming) とは？

数理最適化において，「または」を表現する方法

例 ：変数 $x \in \mathbb{R}$ は 次のどちらかを満たす



注 ： 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3$ または $6 \le x \le 7\}$ は

凸多面集合では **ない**

離接計画：設定

不等式標準形の線形計画問題を k 個考える

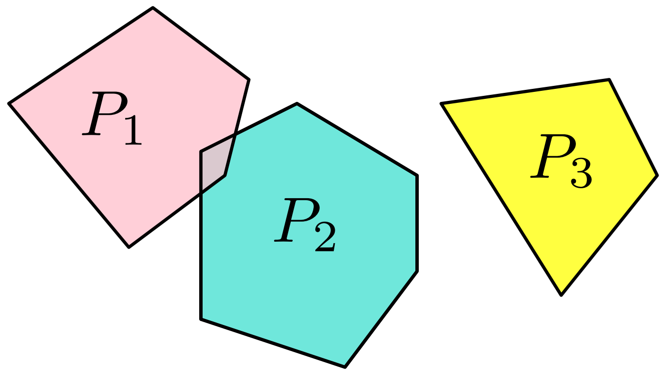
$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \cdots\cdots\cdot \qquad \begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

変数：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

定数：$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$

許容領域　(仮定：どれも有界 (凸多面体) である)

$$P_1 = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdot \qquad P_k = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$



離接計画：考える問題

不等式標準形の線形計画問題を k 個考える

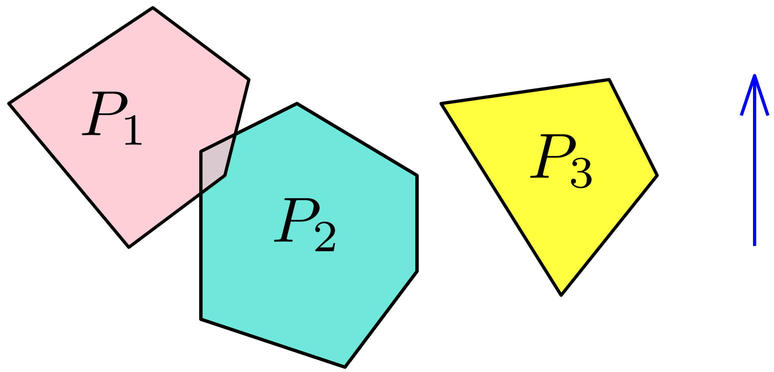
$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdot$

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

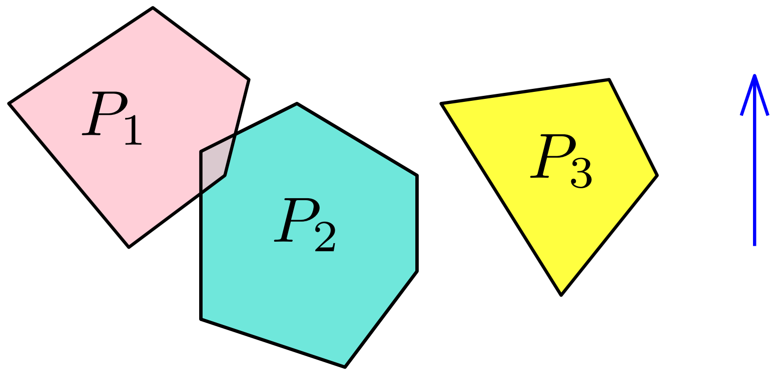
考える問題

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$



アルゴリズムによる解決法

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

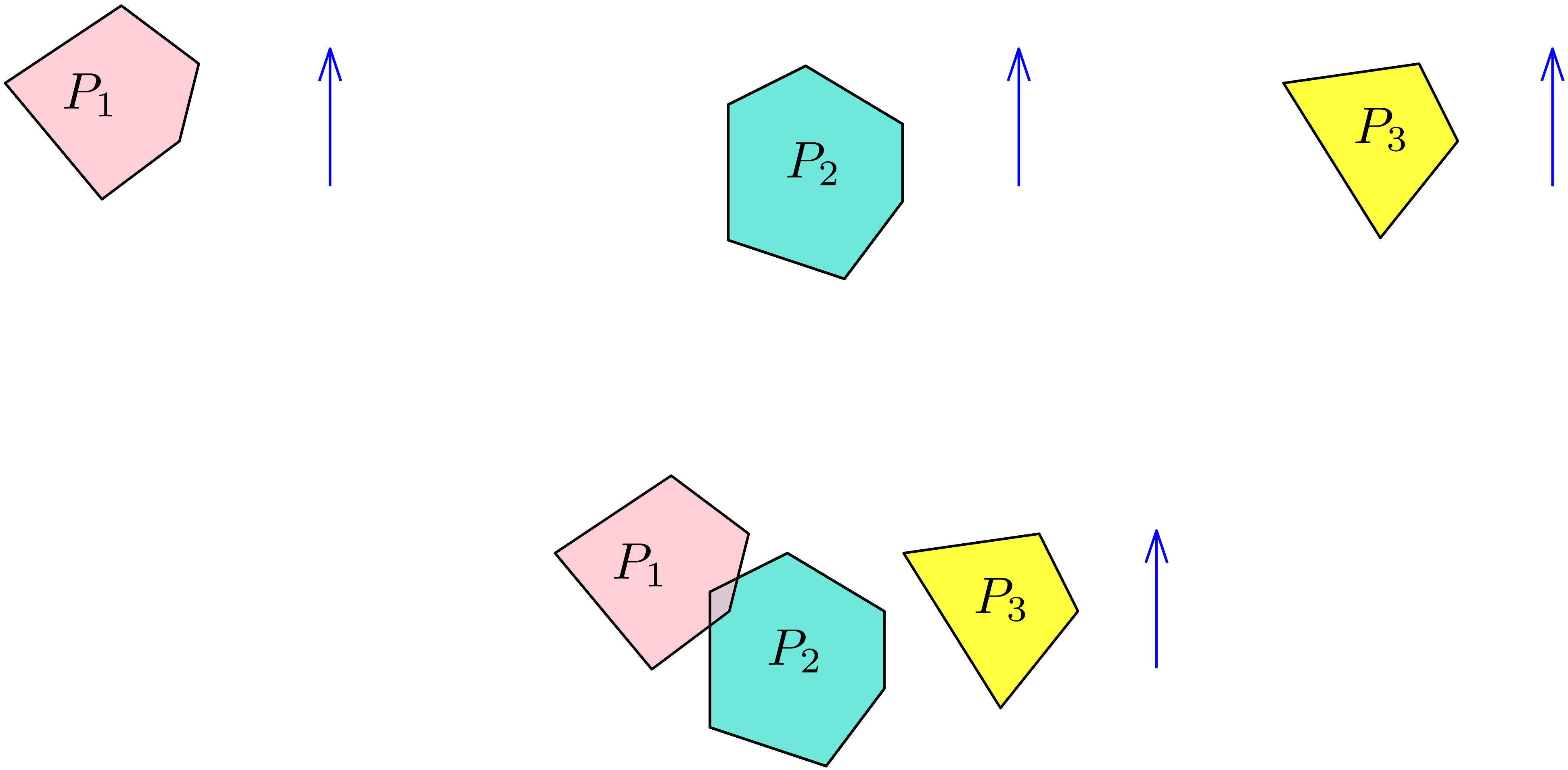


アルゴリズムによる解決法

min. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

s.t. $A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1$ または ... または $A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

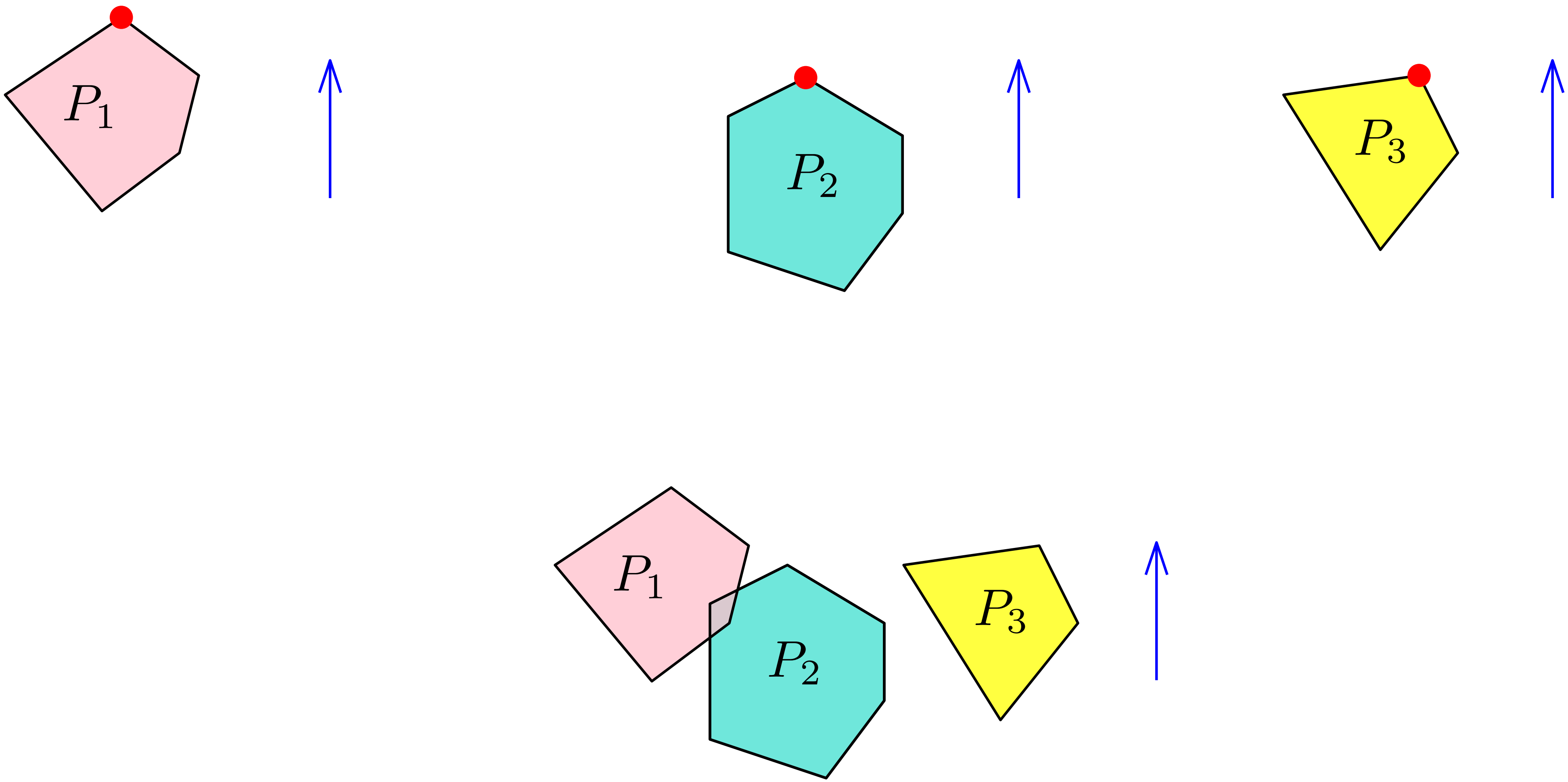


アルゴリズムによる解決法

min. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

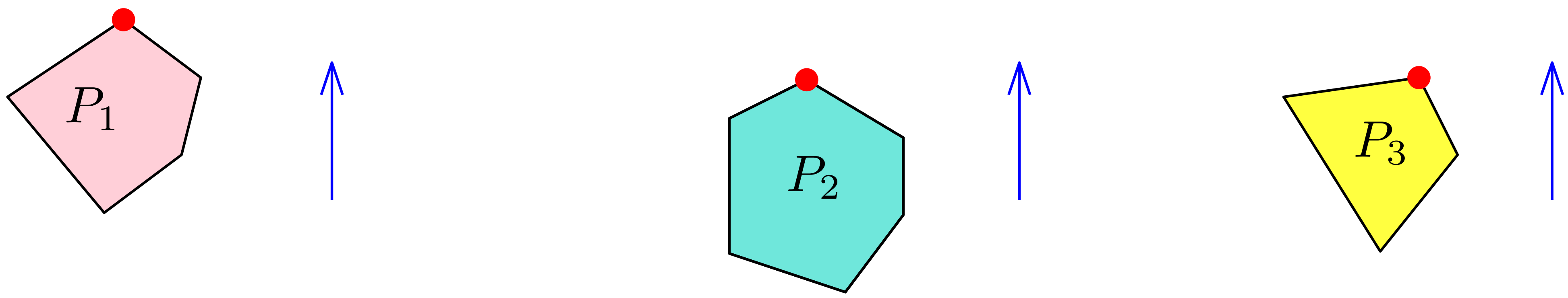
s.t. $A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1$ または . . . または $A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k$

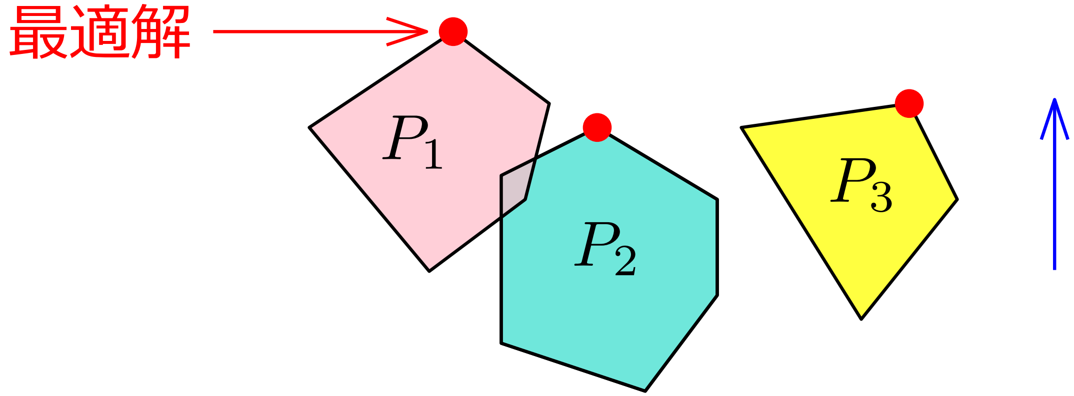
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$



アルゴリズムによる解決法

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

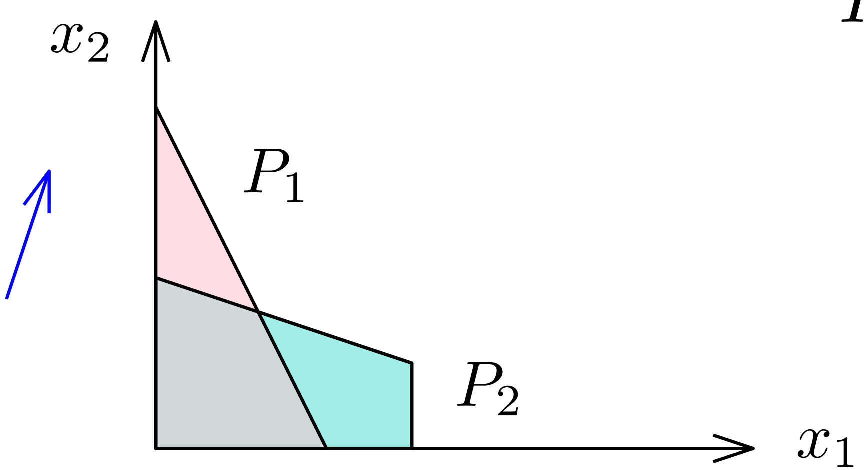




整数計画モデリングによる解決法：例 (1)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \left(\ 2x_1 + x_2 \le 4 \ \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}, \quad P_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$$



P_1, P_2 は有界で，特に次を満たす

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in P_1 \Rightarrow \mathbf{0} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in P_2 \Rightarrow \mathbf{0} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

整数計画モデリングのよる解決法：例 (2)

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \left(\; 2x_1 + x_2 \le 4 \; \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right) \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}, \quad P_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$$

各添字 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，変数 $y_i \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$y_i = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in P_i \text{ を強制する} \\ 0 & \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in P_i \text{ を強制しない} \end{cases}$$

各添字 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，変数 $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^n$ を使用

解釈：　$\boldsymbol{z}_i$ は i 番目の問題の許容解を表す

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & \left(\ 2x_1 + x_2 \le 4\ \right) \text{または} \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{pmatrix} \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\ & 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\ & 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(\ 2x_1 + x_2 \le 4\ \right)$ または $\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array}\right)$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

↓

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $2z_{11} + z_{12} \le 4y_1$

$0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1$

$z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2$

$0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2$

$y_1 + y_2 = 1$

$x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22}$

$y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}$

1 番目の問題

$x_1 \leadsto z_{11}$

$x_2 \leadsto z_{12}$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(\ 2x_1 + x_2 \le 4\ \right)$ または $\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{pmatrix}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

↓

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $2z_{11} + z_{12} \le 4y_1$

$0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1$

$z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2$

$0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2$

$y_1 + y_2 = 1$

$x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22}$

$y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}$

2 番目の問題

$x_1 \rightsquigarrow z_{21}$

$x_2 \rightsquigarrow z_{22}$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & \left(\ 2x_1 + x_2 \leq 4\ \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3 \end{array}\right) \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

↓

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2z_{11} + z_{12} \leq 4y_1 \\
& 0 \leq z_{11} \leq 6y_1, 0 \leq z_{12} \leq 6y_1 \\
& z_{21} + 3z_{22} \leq 6y_2, z_{21} \leq 3y_2 \\
& 0 \leq z_{21} \leq 3y_2, 0 \leq z_{22} \leq 3y_2 \\
& y_1 + y_2 = 1 \\
& x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\
& y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

許容領域の選択

$y_1 = 1, y_2 = 0 \Rightarrow$
1 番目の問題を選択

$y_1 = 0, y_2 = 1 \Rightarrow$
2 番目の問題を選択

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & \left(\; 2x_1 + x_2 \le 4 \; \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\ & 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\ & 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

$y_1 = 1, y_2 = 0$ のとき

$$\begin{array}{l} 2z_{11} + z_{12} \le 4 \\ 0 \le z_{11} \le 6, 0 \le z_{12} \le 6 \\ z_{21} + 3z_{22} \le 0, z_{21} \le 0 \\ 0 \le z_{21} \le 0, 0 \le z_{22} \le 0 \end{array}$$

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(2x_1 + x_2 \leq 4 \right)$ または $\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3 \end{array} \right)$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

↓

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $2z_{11} + z_{12} \leq 4y_1$

$0 \leq z_{11} \leq 6y_1, 0 \leq z_{12} \leq 6y_1$

$z_{21} + 3z_{22} \leq 6y_2, z_{21} \leq 3y_2$

$0 \leq z_{21} \leq 3y_2, 0 \leq z_{22} \leq 3y_2$

$y_1 + y_2 = 1$

$x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22}$

$y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}$

$y_1 = 1, y_2 = 0$ のとき

$\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} \in P_1$

$2z_{11} + z_{12} \leq 4$

$0 \leq z_{11} \leq 6, 0 \leq z_{12} \leq 6$

$z_{21} + 3z_{22} \leq 0, z_{21} \leq 0$

$0 \leq z_{21} \leq 0, 0 \leq z_{22} \leq 0$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & \left(2x_1 + x_2 \le 4 \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\ & 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\ & 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$y_1 = 1, y_2 = 0$ のとき

$$2z_{11} + z_{12} \le 4$$
$$0 \le z_{11} \le 6, 0 \le z_{12} \le 6$$

→ $\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} \in P_1$

$$z_{21} + 3z_{22} \le 0, z_{21} \le 0$$
$$0 \le z_{21} \le 0, 0 \le z_{22} \le 0$$

→ $z_{21} = 0, z_{22} = 0$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \left(\; 2x_1 + x_2 \le 4 \; \right) \text{または} \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{pmatrix} \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\ & 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\ & 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$y_1 = 1, y_2 = 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} \in P_1$$

$$2z_{11} + z_{12} \le 4$$
$$0 \le z_{11} \le 6, 0 \le z_{12} \le 6$$

$$z_{21} + 3z_{22} \le 0, z_{21} \le 0$$
$$0 \le z_{21} \le 0, 0 \le z_{22} \le 0$$

$$z_{21} = 0, z_{22} = 0$$

$$x_1 = z_{11}, x_2 = z_{12}$$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(\ 2x_1 + x_2 \le 4 \ \right)$ または $\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right)$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

↓

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t.
$$2z_{11} + z_{12} \le 4y_1$$
$$0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1$$
$$z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2$$
$$0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22}$$
$$y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}$$

$y_1 = 0, y_2 = 1$ のとき

$$2z_{11} + z_{12} \le 0$$
$$0 \le z_{11} \le 0, 0 \le z_{12} \le 0$$
$$z_{21} + 3z_{22} \le 6, z_{21} \le 3$$
$$0 \le z_{21} \le 3, 0 \le z_{22} \le 3$$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(\ 2x_1 + x_2 \le 4\ \right)$ または $\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array}\right)$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$y_1 = 0, y_2 = 1$ のとき

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t.
$$2z_{11} + z_{12} \le 4y_1$$
$$0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1$$
$$z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2$$
$$0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22}$$
$$y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\}$$

$$2z_{11} + z_{12} \le 0$$
$$0 \le z_{11} \le 0, 0 \le z_{12} \le 0$$
$$z_{21} + 3z_{22} \le 6, z_{21} \le 3$$
$$0 \le z_{21} \le 3, 0 \le z_{22} \le 3$$

$$\begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in P_2$$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t. $\left(\; 2x_1 + x_2 \le 4 \; \right)$ または $\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right)$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

↓

min. $-x_1 - 3x_2$

s.t.
$$
\begin{aligned}
& 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\
& 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\
& z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\
& 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\
& y_1 + y_2 = 1 \\
& x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\
& y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$y_1 = 0, y_2 = 1$ のとき

$2z_{11} + z_{12} \le 0$

$0 \le z_{11} \le 0, 0 \le z_{12} \le 0$

→ $z_{11} = 0, z_{12} = 0$

$z_{21} + 3z_{22} \le 6, z_{21} \le 3$

$0 \le z_{21} \le 3, 0 \le z_{22} \le 3$

→ $\begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in P_2$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & \left(\ 2x_1 + x_2 \le 4 \ \right) \text{または} \left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3 \end{array} \right) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & 2z_{11} + z_{12} \le 4y_1 \\ & 0 \le z_{11} \le 6y_1, 0 \le z_{12} \le 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \le 6y_2, z_{21} \le 3y_2 \\ & 0 \le z_{21} \le 3y_2, 0 \le z_{22} \le 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

$y_1 = 0, y_2 = 1$ のとき

$$2z_{11} + z_{12} \le 0$$
$$0 \le z_{11} \le 0, 0 \le z_{12} \le 0$$

→ $z_{11} = 0, z_{12} = 0$

$$z_{21} + 3z_{22} \le 6, z_{21} \le 3$$
$$0 \le z_{21} \le 3, 0 \le z_{22} \le 3$$

→ $\begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in P_2$

$x_1 = z_{21}, x_2 = z_{22}$

整数計画モデリングによる解決法：例 (3)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & \left(2x_1 + x_2 \leq 4 \right) \text{または} \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & 2z_{11} + z_{12} \leq 4y_1 \\ & 0 \leq z_{11} \leq 6y_1, 0 \leq z_{12} \leq 6y_1 \\ & z_{21} + 3z_{22} \leq 6y_2, z_{21} \leq 3y_2 \\ & 0 \leq z_{21} \leq 3y_2, 0 \leq z_{22} \leq 3y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & x_1 = z_{11} + z_{21}, x_2 = z_{12} + z_{22} \\ & y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

$y_1 = 0, y_2 = 1$ のとき

$$2z_{11} + z_{12} \leq 0$$
$$0 \leq z_{11} \leq 0, 0 \leq z_{12} \leq 0$$

→ $z_{11} = 0, z_{12} = 0$

$$z_{21} + 3z_{22} \leq 6, z_{21} \leq 3$$
$$0 \leq z_{21} \leq 3, 0 \leq z_{22} \leq 3$$

→ $\begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in P_2$

$x_1 = z_{21}, x_2 = z_{22}$

これは正しい (混合) 整数計画モデルである

整数計画モデリングによる解決法：変数

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1 \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

各添字 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，変数 $y_i \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$y_i = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in P_i \text{ を強制する} \\ 0 & \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in P_i \text{ を強制しない} \end{cases}$$

各添字 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，変数 $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^n$ を使用

解釈：　$\boldsymbol{z}_i$ は i 番目の問題の許容解を表す

整数計画モデリングによる解決法

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

↓

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & A_i\boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
& y_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & A_1\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \text{ または } \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_k\\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i && \forall\, i \in \{1,2,\ldots,k\}\\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i && \forall\, i \in \{1,2,\ldots,k\}\\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1\\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}\\ & y_i \in \{0,1\} && \forall\, i \in \{1,2,\ldots,k\}\end{aligned}$$

M は次を満たす定数

$\boldsymbol{x} \in P_i \Rightarrow \boldsymbol{x} \le M\boldsymbol{1}$
$\forall\, i \in \{1,2,\ldots,k\}$

整数計画モデリングによる解決法

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \text{ または} \ldots \text{ または } A_k\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_k \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

↓

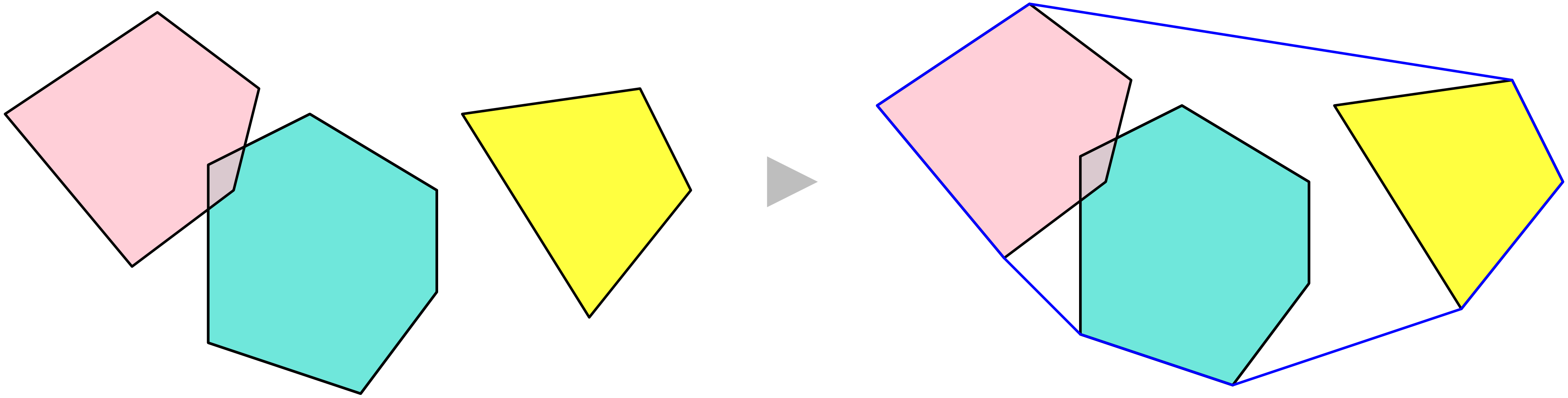
$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i && \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i && \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} \\ & y_i \in \{0, 1\} && \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \end{aligned}$$

変数の総数 $= n + k + kn$

制約の総数 $= \sum_{i=1}^{k} m_i + kn + 1 + n$

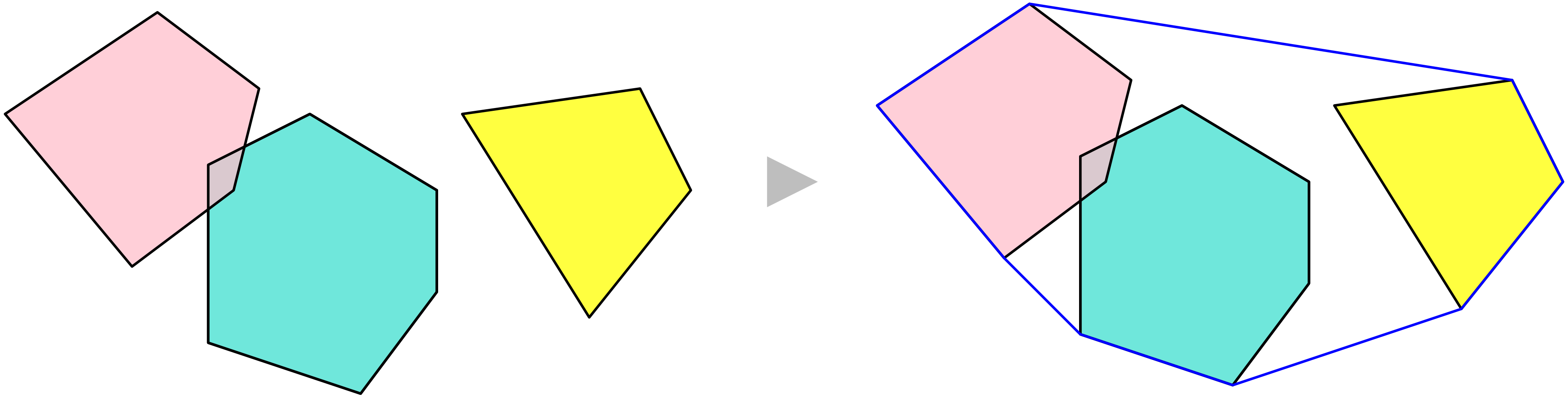
今日の内容

- 離接計画：モデル化
- 離接計画：線形計画緩和



今日の内容

- 離接計画：モデル化
- 離接計画：線形計画緩和



離接計画と線形計画緩和

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} \\ & y_i \in \{0,1\} & \forall\, i\end{aligned}$$

許容領域 $= S_{\mathrm{P}}$

緩和 →

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} \\ & 0 \le y_i \le 1 & \forall\, i\end{aligned}$$

許容領域 $= S_{\mathrm{R}}$

離接計画と線形計画緩和

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\ & y_i \in \{0,1\} & \forall\, i \end{array}$$

緩和 →

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A_i\boldsymbol{z}_i \le \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{z}_i \le M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\ & 0 \le y_i \le 1 & \forall\, i \end{array}$$

許容領域 $= S_{\mathrm{P}}$

許容領域 $= S_{\mathrm{R}}$

性質：離接計画の線形計画緩和は最強

$$\mathrm{conv}(S_{\mathrm{P}}) = S_{\mathrm{R}}$$

つまり，右の線形計画緩和を解けば十分

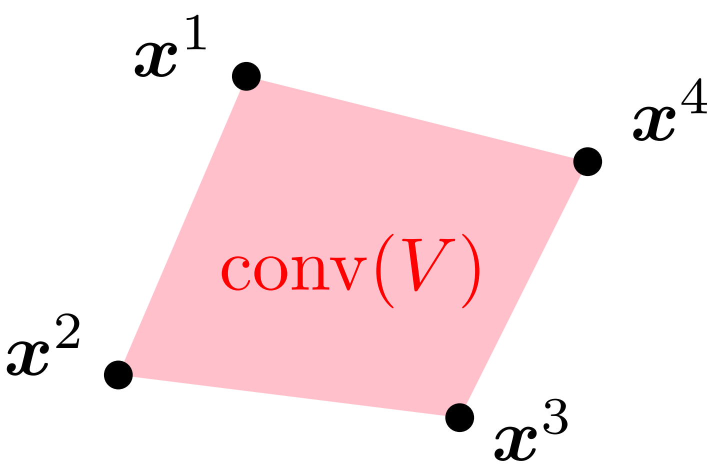
復習：凸包

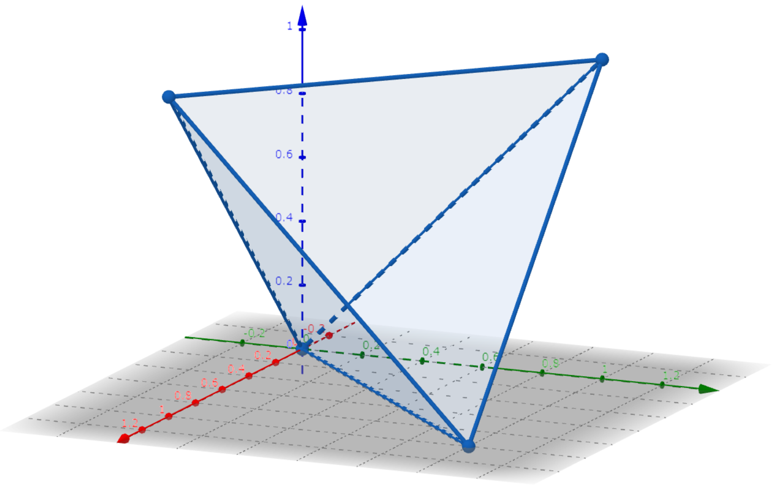
$V = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包 (convex hull)

V の **凸包** とは，V の点の凸結合全体から成る集合

$$\mathrm{conv}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}^i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 \end{array} \right\}$$





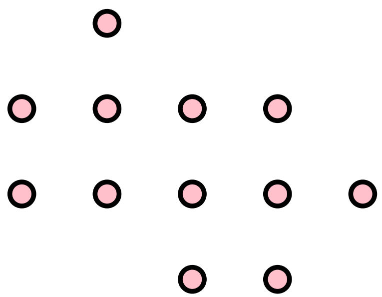
復習：線形計画緩和 (1)

整数計画問題 P

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

P の許容領域

$$
S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\}
$$



復習：線形計画緩和 (1)

整数計画問題 P

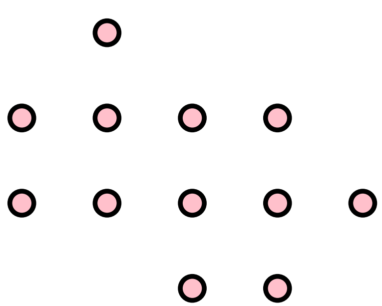
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

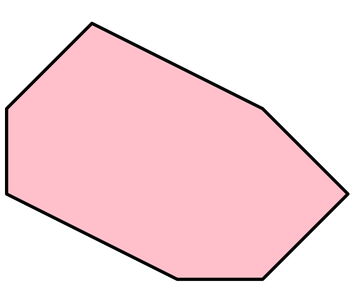
P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \operatorname{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)





復習：線形計画緩和 (1)

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P'

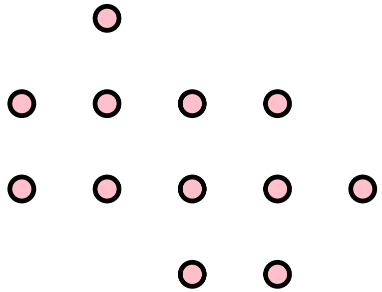
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(S) \end{array}$$

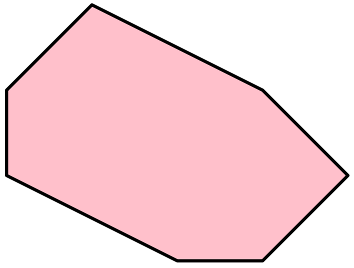
P の許容領域

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{conv}(S)$$

P の許容領域の凸包

(S が無限集合のとき，要注意)





復習：線形計画緩和 (1)

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P’

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \operatorname{conv}(S) \end{array}$$

P の許容領域

P の許容領域の凸包

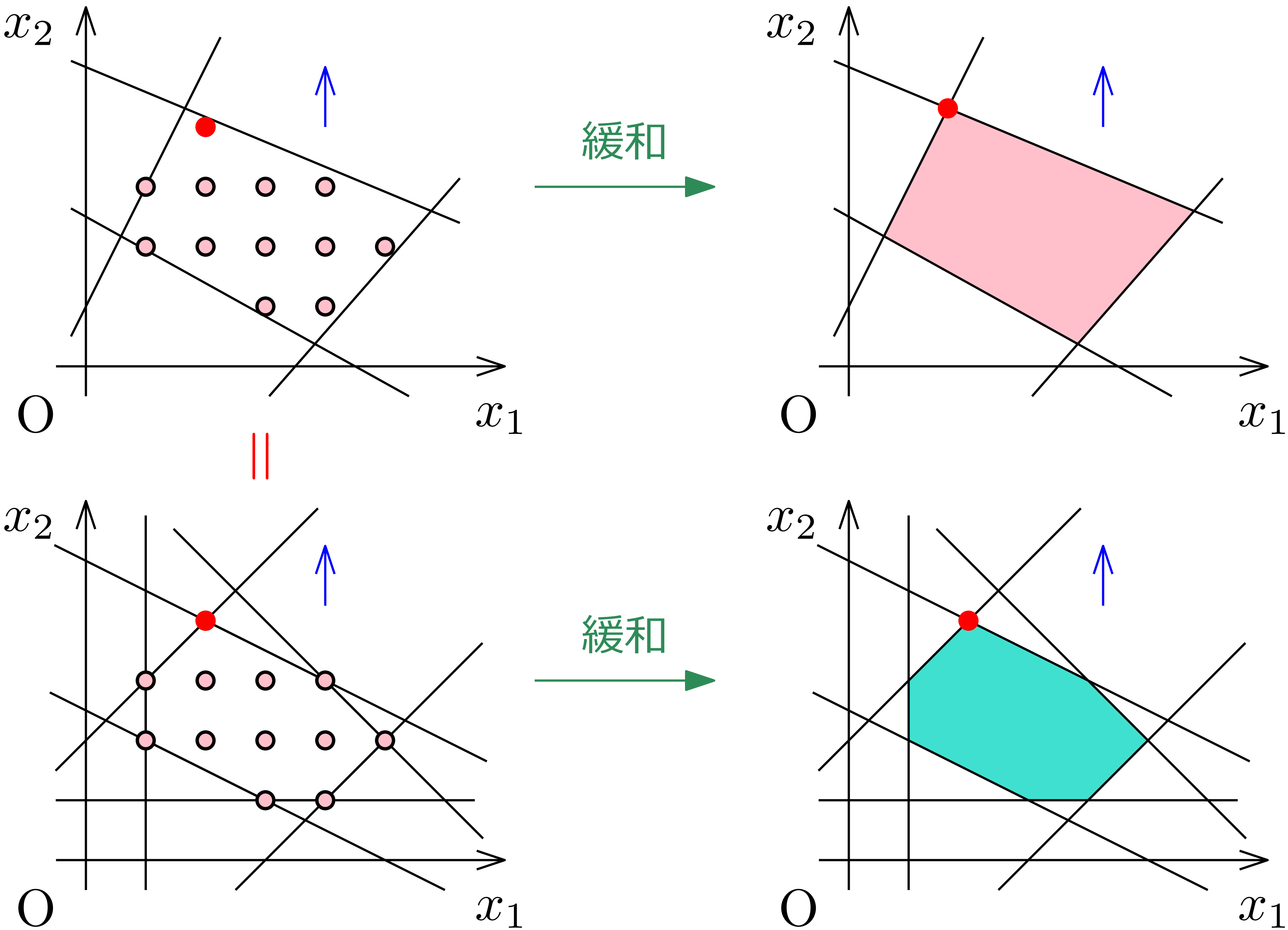
$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \operatorname{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)

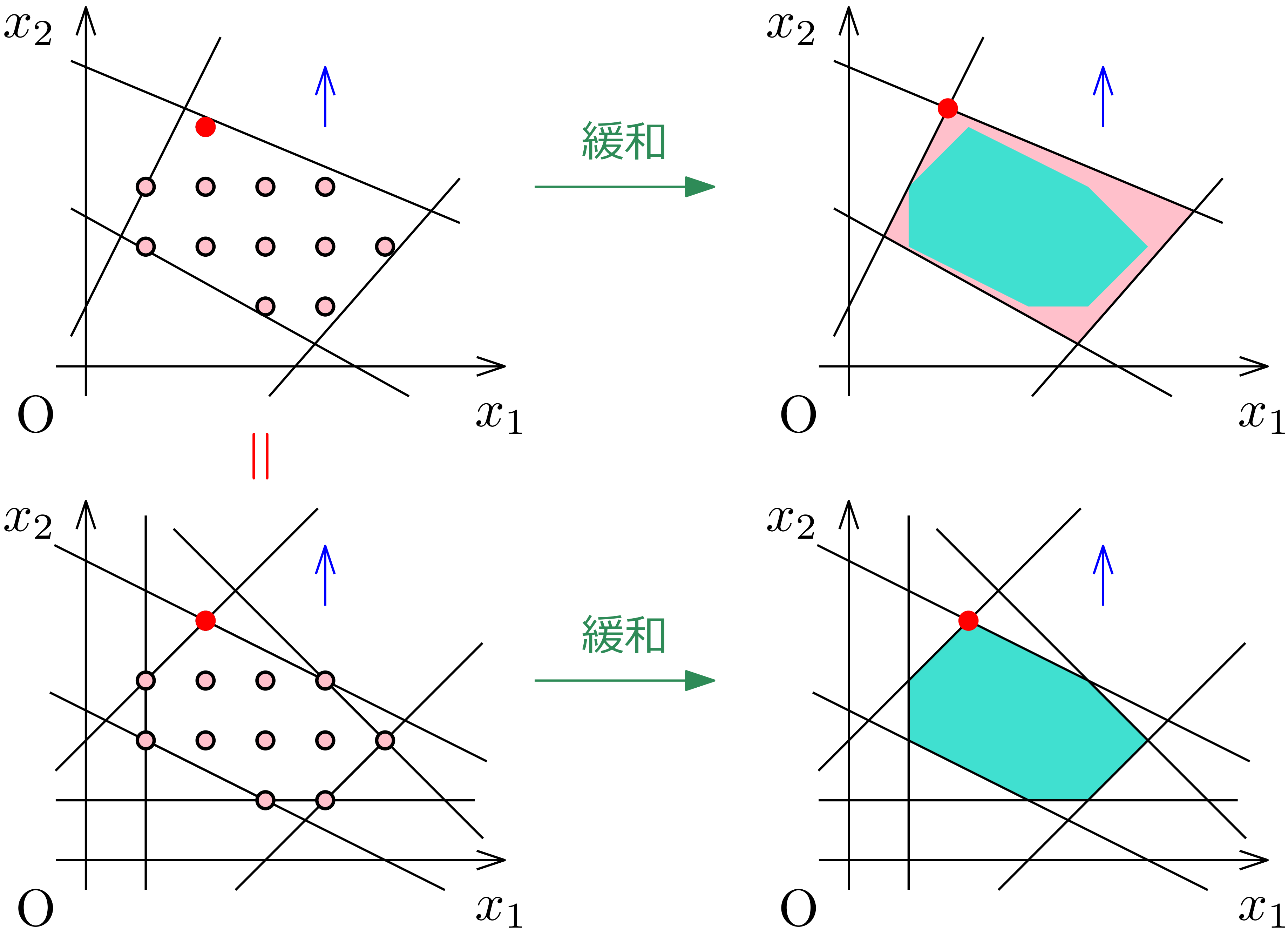
性質：整数計画問題は線形計画問題

P に最適解が存在する ⇒
P’ にも最適解が存在し，
$\boldsymbol{x}^*$ が P の最適解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}^*$ が P’ の**整数**最適解

復習：線形計画緩和 (2)



復習：線形計画緩和 (2)



証明 (1)

S_{R} の任意の点が S_{P} の点の凸結合であることを言えばよい

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ k \\ n \\ \\ n \end{matrix} \in S_{\mathrm{R}}$$ とする

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A_i\boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i \quad \forall\, i \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M\boldsymbol{1}y_i \quad \forall\, i \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} \\
& 0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall\, i
\end{aligned}$$

証明 (1)

S_{R} の任意の点が S_{P} の点の凸結合であることを言えばよい

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ k \\ n \\ \\ n \end{matrix} \in S_{\mathrm{R}} \text{ とする}$$

$y_i \neq 0$ を満たす
$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(i)} \\ \boldsymbol{y}^{(i)} \\ \boldsymbol{z}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_i^{(i)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_k^{(i)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{1}{y_i}\boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \frac{1}{y_i}\boldsymbol{z}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.t.} & A_i\boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M\boldsymbol{1}y_i & \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\ & 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i \end{array}$$

証明 (1)

S_{R} の任意の点が S_{P} の点の凸結合であることを言えばよい

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ k \\ n \\ \\ n \end{matrix} \in S_{\mathrm{R}} \text{ とする}$$

$y_i \neq 0$ を満たす
$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(i)} \\ \boldsymbol{y}^{(i)} \\ \boldsymbol{z}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_i^{(i)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_k^{(i)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \in S_{\mathrm{P}}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i && \forall\, i \\ & \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i && \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} \\ & 0 \leq y_i \leq 1 && \forall\, i \end{aligned}$$

証明 (2)

このとき，次が成り立つことを順に示す

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{x}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{y}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{z}_j = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{z}_j^{(i)} \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, k\}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i & \forall\, i \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
& 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i
\end{array}$$

これらは凸結合

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i = \sum_{i} y_i = 1$$

$$y_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$$

証明 (3)

$$\sum_{i:\,y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{i:\,y_i \neq 0} y_i \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i = \sum_{i:\,y_i \neq 0} \boldsymbol{z}_i = \sum_i \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i & \forall\, i \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
& 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i
\end{array}
$$

$y_i = 0$ のとき，$\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{0}$

$$\sum_{i\colon y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{i\colon y_i \neq 0} y_i \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i = \sum_{i\colon y_i \neq 0} \boldsymbol{z}_i = \sum_i \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}$$

$$\sum_{i\colon y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{y}^{(i)} = \sum_{i\colon y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i y_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{y}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\
 & \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i & \forall\, i \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
 & 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i
\end{array}$$

証明 (3)

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i = \sum_{i:\, y_i \neq 0} \boldsymbol{z}_i = \sum_i \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}$$

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{y}^{(i)} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i y_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{y}$$

$y_j \neq 0$ のとき，

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{z}_j^{(i)} = y_j \frac{1}{y_j} \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{z}_j$$

$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i & \forall\, i \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
& 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i
\end{array}$$

証明 (3)

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \frac{1}{y_i} \boldsymbol{z}_i = \sum_{i:\, y_i \neq 0} \boldsymbol{z}_i = \sum_i \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}$$

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{y}^{(i)} = \sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i y_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{y}$$

$y_j \neq 0$ のとき，

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{z}_j^{(i)} = y_j \frac{1}{y_j} \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{z}_j$$

$y_j = 0$ のとき， $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}$ なので，

$$\sum_{i:\, y_i \neq 0} y_i \boldsymbol{z}_j^{(i)} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{z}_j$$

□

$$\begin{array}{lll}
\text{min.} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \\
\text{s.t.} & A_i \boldsymbol{z}_i \leq \boldsymbol{b}_i y_i & \forall\, i \\
& \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z}_i \leq M \boldsymbol{1} y_i & \forall\, i \\
& \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 & \\
& \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} & \\
& 0 \leq y_i \leq 1 & \forall\, i
\end{array}$$

次回予告

次回の内容

分枝限定法

- すべての基礎となるアルゴリズム