離散最適化基礎論

第 6 回

整数計画モデリング (2)：より複雑な問題

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 11 月 15 日

最終更新：2022 年 11 月 29 日　09:06

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

＊ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

＜アルゴリズム＞

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)
* ∗ 休み (国内出張) (12/27)
* ∗ 休み (冬季休業) (1/3)

12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

＜まとめ・予備＞

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 → 整数計画問題

モデリング

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

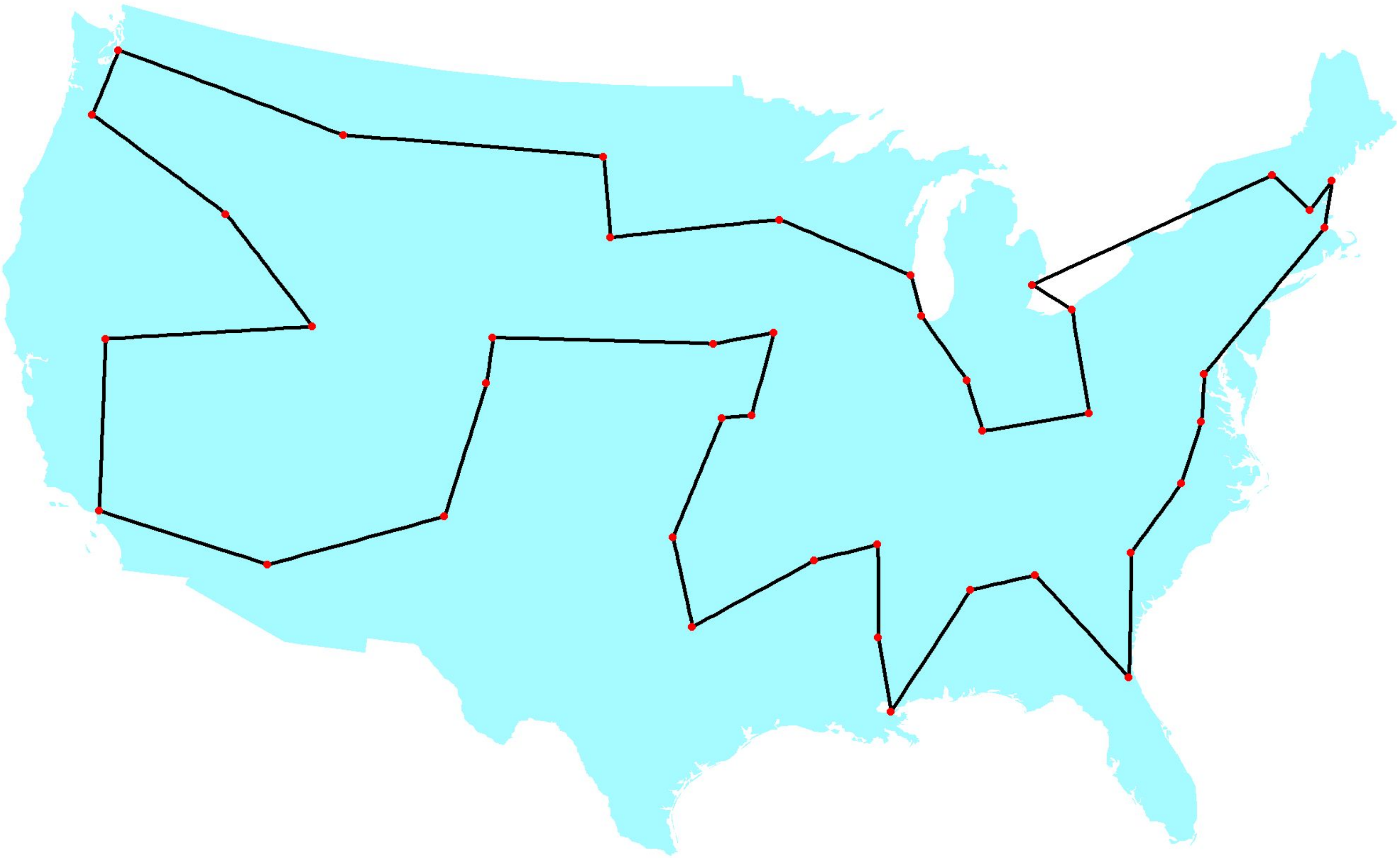
解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

巡回セールスマン問題：例

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)



アメリカ 49 都市インスタンス (Dantzig, Fulkerson, Johnson 1954)

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/pictorial/dfj.html

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)

入力

- 都市集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 2 都市 $i, j \in V$ 間の距離 $d(i, j) \geq 0$

対称： $d(i, j) = d(j, i)$ でなくてはならない

非対称： $d(i, j) \neq d(j, i)$ であってもよい

対称な巡回セールスマン問題

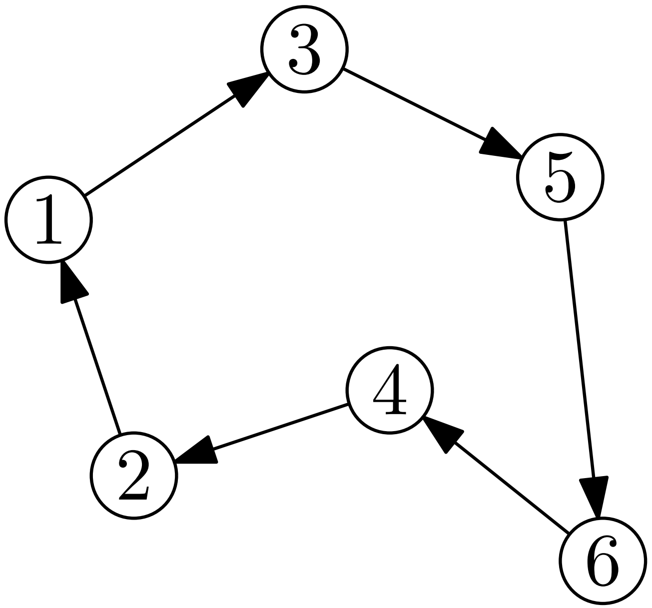
非対称な巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題：定義 – 許容解

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)

許容解　置換 $\pi\colon V \to V$

- 解釈：$\pi(i) = i$ 番目に訪れる都市

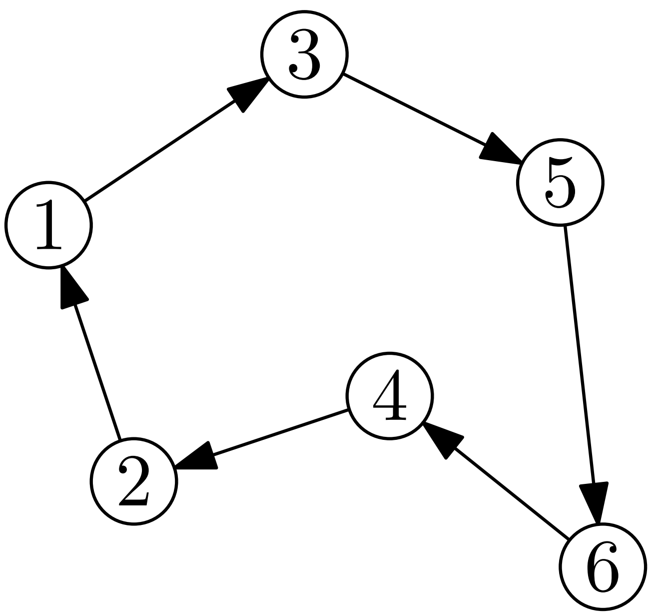


$$\pi(1) = 1$$
$$\pi(2) = 3$$
$$\pi(3) = 5$$
$$\pi(4) = 6$$
$$\pi(5) = 4$$
$$\pi(6) = 2$$

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)

目的　次の量の最小化

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1))$$



$$\begin{aligned}
\pi(1) &= 1 \\
\pi(2) &= 3 \\
\pi(3) &= 5 \\
\pi(4) &= 6 \\
\pi(5) &= 4 \\
\pi(6) &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d(1,3) \\
+\ & d(3,5) \\
+\ & d(5,6) \\
+\ & d(6,4) \\
+\ & d(4,2) \\
+\ & d(2,1)
\end{aligned}$$

巡回セールスマン問題：定義

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)

入力

- 都市集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 2 都市 $i, j \in V$ 間の距離 $d(i, j) \geq 0$

許容解

置換 $\pi\colon N \to N$

- 解釈：$\pi(i) = i$ 番目に訪れる都市

目的

次の量の最小化

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1))$$

重要な点

解くべき問題の定義を明確にすること

巡回セールスマン問題：目標

目標

巡回セールスマン問題を整数計画問題として書き表す

つまり，変数，制約，目的関数を定める

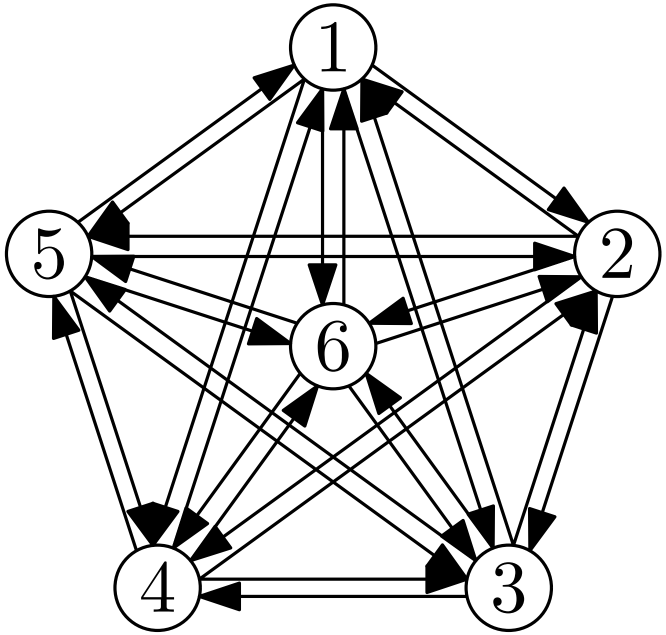
解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

巡回セールスマン問題：グラフとして

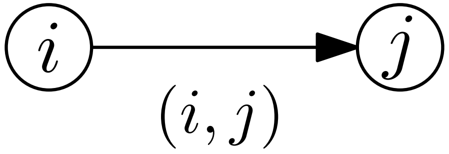
巡回セールスマン問題をグラフの問題とみなす



有向グラフ $G = (V, A)$

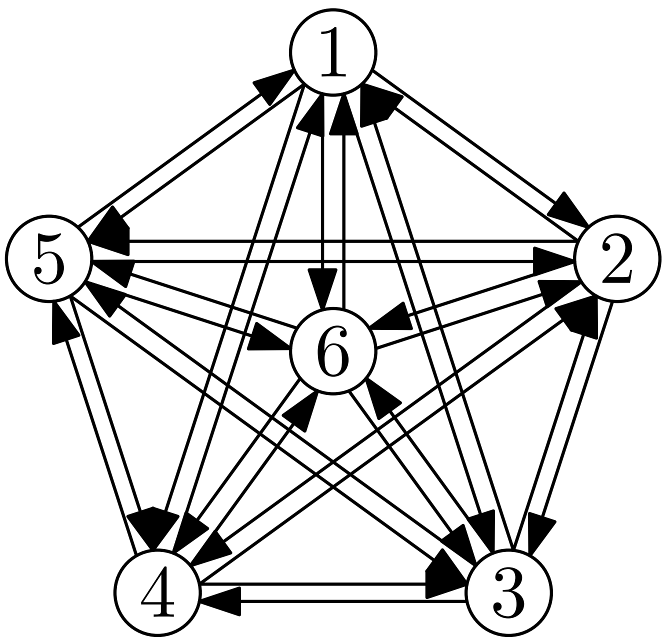
$V =$ 都市集合

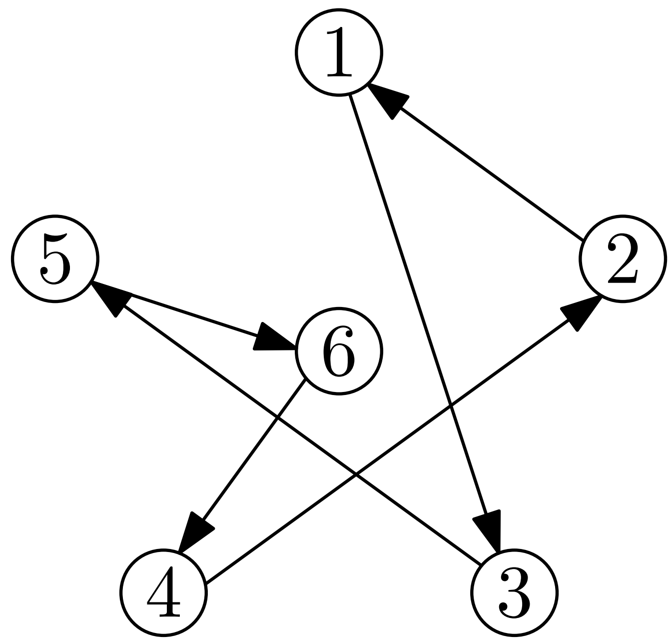
$A = \{(i, j) \in V^2 \mid i \neq j\}$



G の弧集合

巡回セールスマン問題をグラフの問題とみなす





有向グラフ $G = (V, A)$

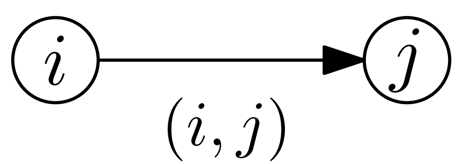
$V =$ 都市集合

$A = \{(i, j) \in V^2 \mid i \neq j\}$

G の弧集合

すべての頂点を通る単一の閉路

ハミルトン閉路とも呼ばれる

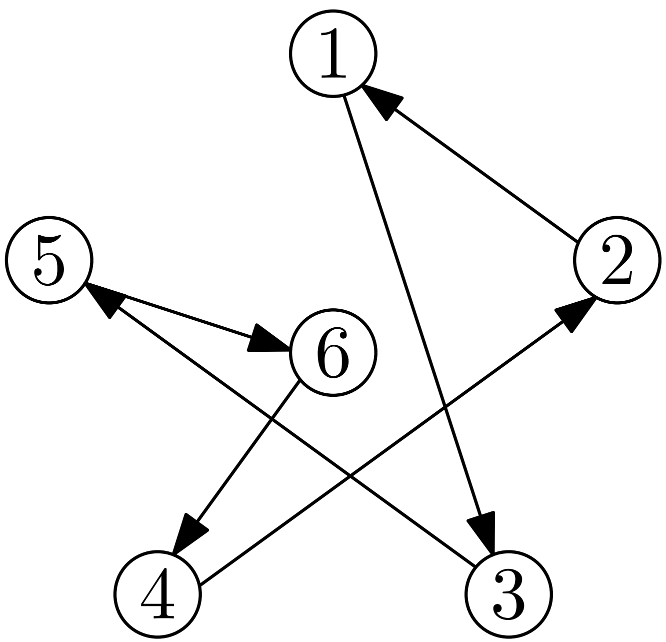


非対称 TSP：変数

各弧 $a \in A$ に対して，変数 $x_a \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$x_a = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{弧 } a \text{ を通る} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{弧 } a \text{ を通らない} \end{cases}$$



$$\begin{array}{lll} x_{(1,2)} = 0 & x_{(2,1)} = 1 & x_{(3,5)} = 1 \\ x_{(1,3)} = 1 & x_{(2,3)} = 0 & x_{(5,6)} = 1 \\ x_{(1,4)} = 0 & x_{(2,4)} = 0 & x_{(6,4)} = 1 \\ x_{(1,5)} = 0 & x_{(2,5)} = 0 & x_{(4,2)} = 1 \\ x_{(1,6)} = 0 & x_{(2,6)} = 0 & \end{array}$$

非対称 TSP：変数

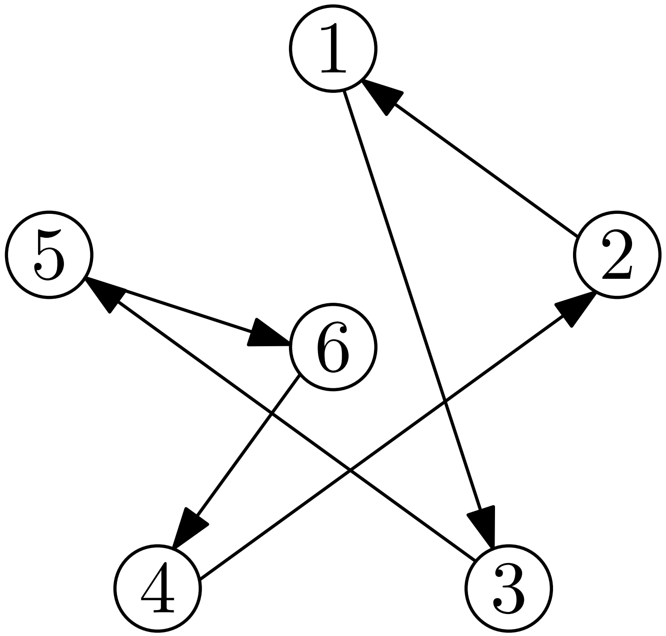
各弧 $a \in A$ に対して，変数 $x_a \in \{0,1\}$ を使用

解釈：

$$x_a = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{弧 } a \text{ を通る} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{弧 } a \text{ を通らない} \end{cases}$$

有用なテクニック

01 変数で選択を表す

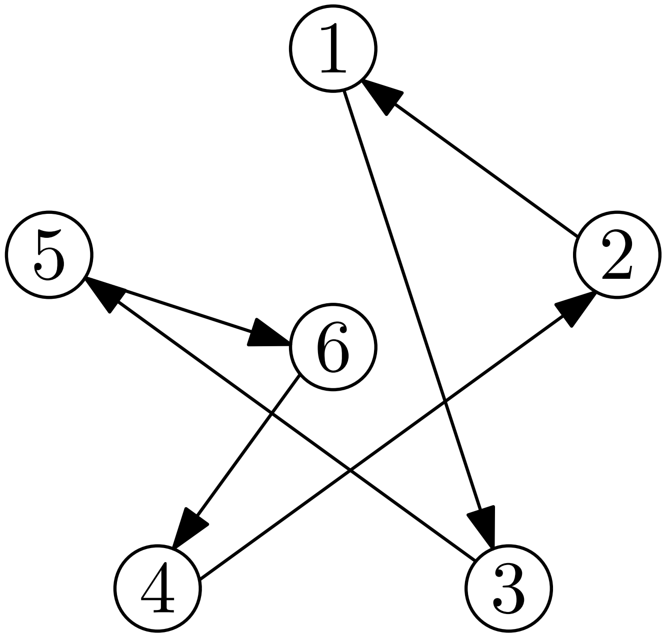


$$\begin{array}{lll} x_{(1,2)} = 0 & x_{(2,1)} = 1 & x_{(3,5)} = 1 \\ x_{(1,3)} = 1 & x_{(2,3)} = 0 & x_{(5,6)} = 1 \\ x_{(1,4)} = 0 & x_{(2,4)} = 0 & x_{(6,4)} = 1 \\ x_{(1,5)} = 0 & x_{(2,5)} = 0 & x_{(4,2)} = 1 \\ x_{(1,6)} = 0 & x_{(2,6)} = 0 & \end{array}$$

非対称 TSP：目的

選択された弧の距離の和の最小化

$$\text{minimize} \quad \sum_{a \in A} d(a) x_a$$



$$d(1,3) + d(3,5) + d(5,6)$$
$$+ d(6,4) + d(4,2) + d(2,1)$$

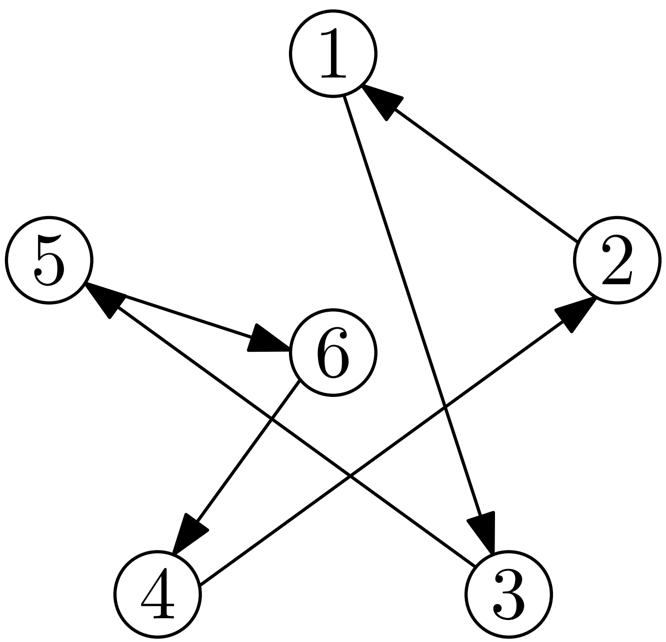
非対称 TSP：制約 (1)

でじすう

出次数制約

$$\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 \qquad \forall\, i \in V$$

i から出る弧の総数



別の書き方

$$\sum_{a \in \delta^+(i)} x_a = 1 \qquad \forall\, i \in V$$

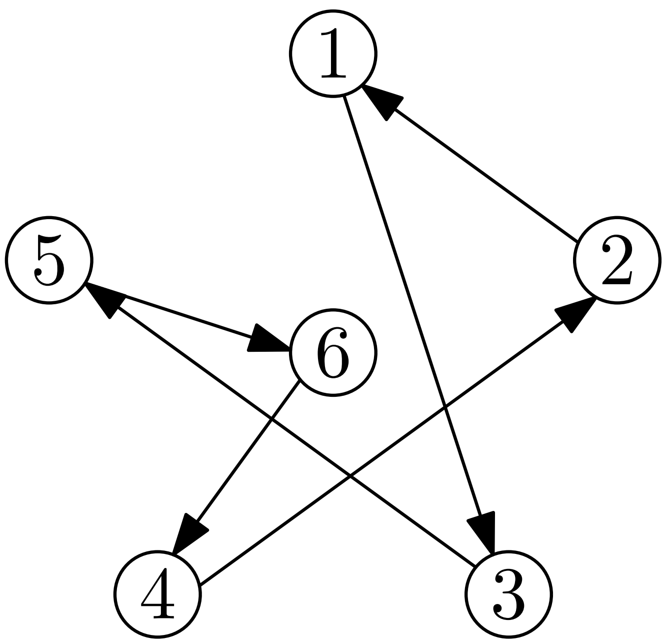
i を始点とする弧の集合

非対称 TSP：制約 (2)

いりじすう
入次数制約

$$\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 \qquad \forall\, i \in V$$

i に入る弧の総数



別の書き方

$$\sum_{a \in \delta^-(i)} x_a = 1 \qquad \forall\, i \in V$$

i を終点とする弧の集合

非対称 TSP：01 整数計画モデル？

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V & \text{出次数制約} \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V & \text{入次数制約} \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A & \text{01 制約}
\end{array}
$$

非対称 TSP：01 整数計画モデル？

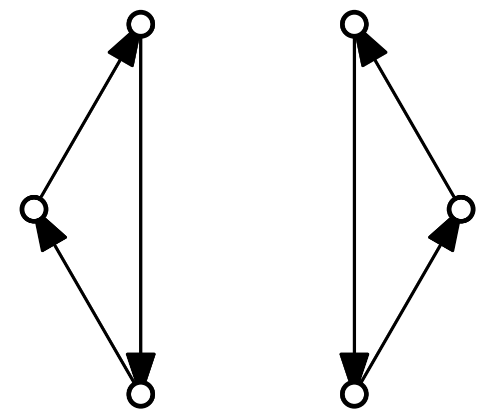
minimize $\displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a$

subject to $\displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 \quad \forall\, i \in V$ 出次数制約

$\displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 \quad \forall\, i \in V$ 入次数制約

$x_a \in \{0, 1\} \quad \forall\, a \in A$ 01 制約

これは，巡回セールスマン問題に対する
正しい 01 整数計画モデル **ではない**



非対称 TSP：制約 (3)

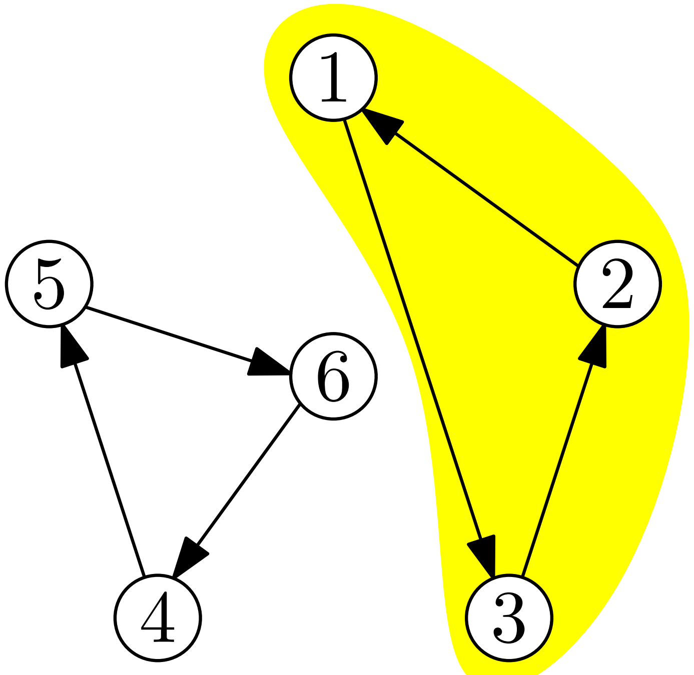
部分巡回路除去制約 (subtour elimination constraint)

$$\underbrace{\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}}}_{} x_{(i,j)} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \underline{2^V} - \{\emptyset, V\}$$

V のべき集合

$2^V = \{S \mid S \subseteq V\}$

S の中で使われている弧の数



$S = \{1, 2, 3\}$ とすると，

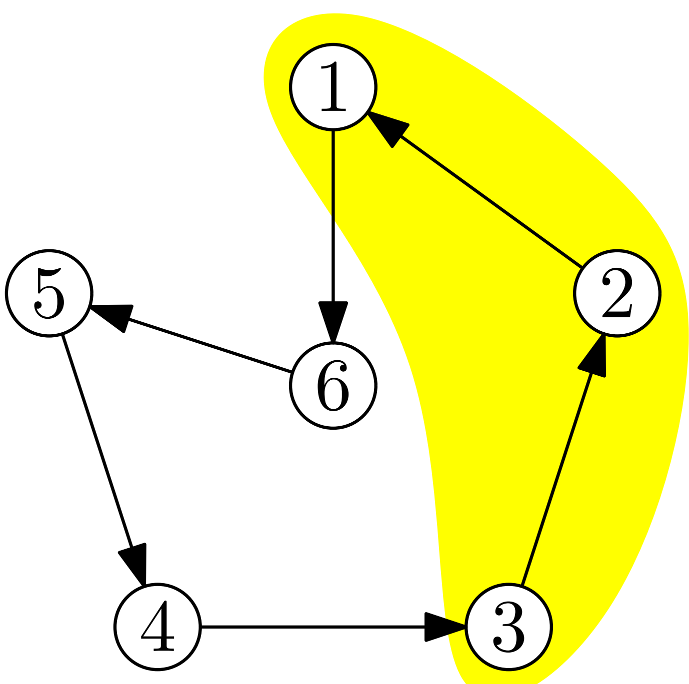
$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} = x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + x_{(2,1)} + x_{(2,3)} + x_{(3,1)} + x_{(3,2)}$$

部分巡回路除去制約 (subtour elimination constraint)

$$\underbrace{\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}}}\ x_{(i,j)} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \underline{2^V} - \{\emptyset, V\}$$

S の中で使われている弧の数

V のべき集合
$2^V = \{S \mid S \subseteq V\}$



$S = \{1, 2, 3\}$ とすると,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} = x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + x_{(2,1)} + x_{(2,3)} + x_{(3,1)} + x_{(3,2)}$$

非対称 TSP：01 整数計画モデル

Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \leq |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

これは，巡回セールスマン問題に対する
正しい 01 整数計画モデル **である**

非対称 TSP：01 整数計画モデル

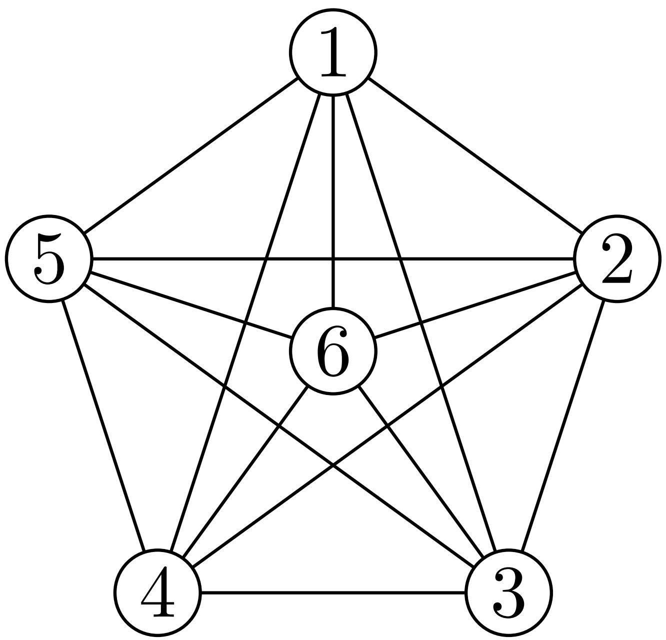
Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

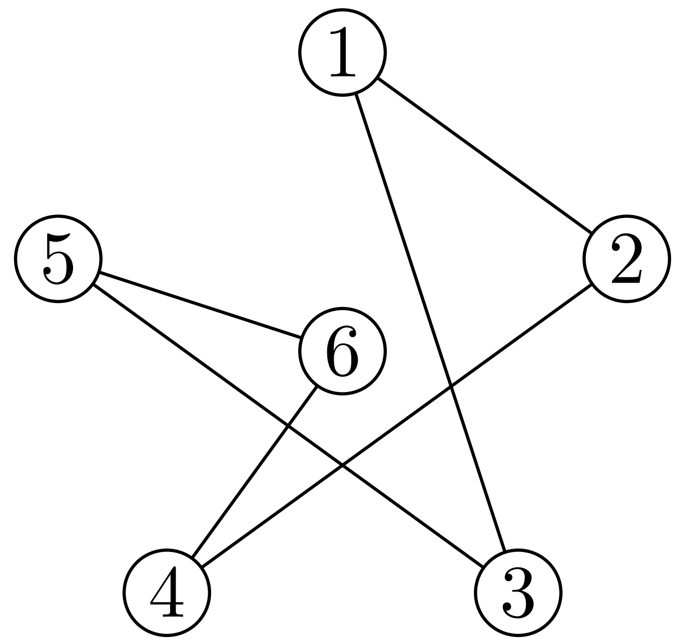
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \leq |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

変数の総数 $= |A| = |V|(|V| - 1)$

制約の総数 $= 2|V| + 2^{|V|} - 2$

対称巡回セールスマン問題もグラフの問題とみなす





無向グラフ $G = (V, E)$

$V =$ 都市集合

$E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$

すべての頂点を通る単一の閉路

ハミルトン閉路とも呼ばれる

対称 TSP：01 整数計画モデル

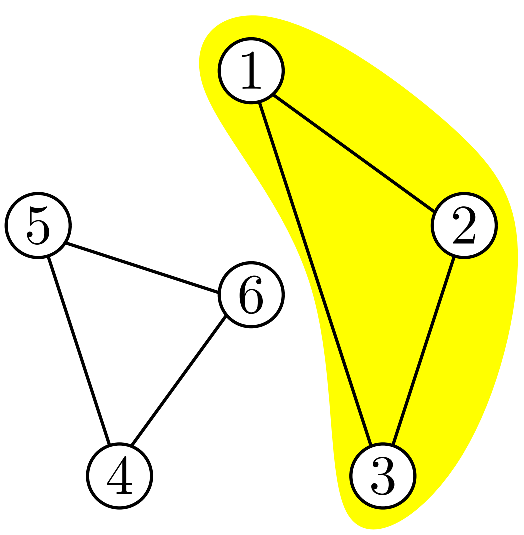
Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} d(e) x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{\{i,j\}} = 2 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{\{i,j\} \subseteq S} x_{\{i,j\}} \leq |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_e \in \{0, 1\} & \forall\, e \in E
\end{array}
$$

部分巡回路除去制約

$$変数の総数 = |E| = \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$$

$$制約の総数 = |V| + 2^{|V|} - 2$$



Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

minimize $\displaystyle\sum_{e \in E} d(e) x_e$

subject to $\displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{\{i,j\}} = 2 \qquad \forall\, i \in V$

$\displaystyle\sum_{\{i,j\} \subseteq S} x_{\{i,j\}} \le |S| - 1 \qquad \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\}$

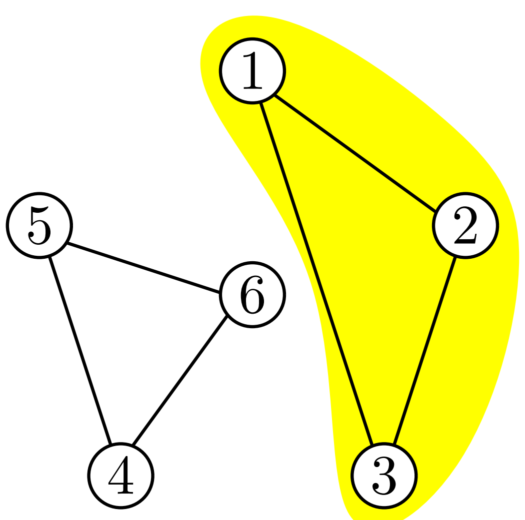
$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall\, e \in E$

別の書き方

部分巡回路除去制約

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2$$

i を端点とする辺の集合



巡回セールスマン問題：課題

課題

巡回セールスマン問題の整数計画モデルには
制約が膨大に存在

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e\in E} d(e)x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j\in V-\{i\}} x_{\{i,j\}} = 2 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{\{i,j\}\subseteq S} x_{\{i,j\}} \le |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_e \in \{0,1\} & \forall\, e \in E
\end{array}
$$

解決法

制約を **アルゴリズムの実行の中で** 追加していく

$\rightsquigarrow$ 第 9 回，第 10 回講義の内容
(切除平面法)

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

ビンパッキング問題：例

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

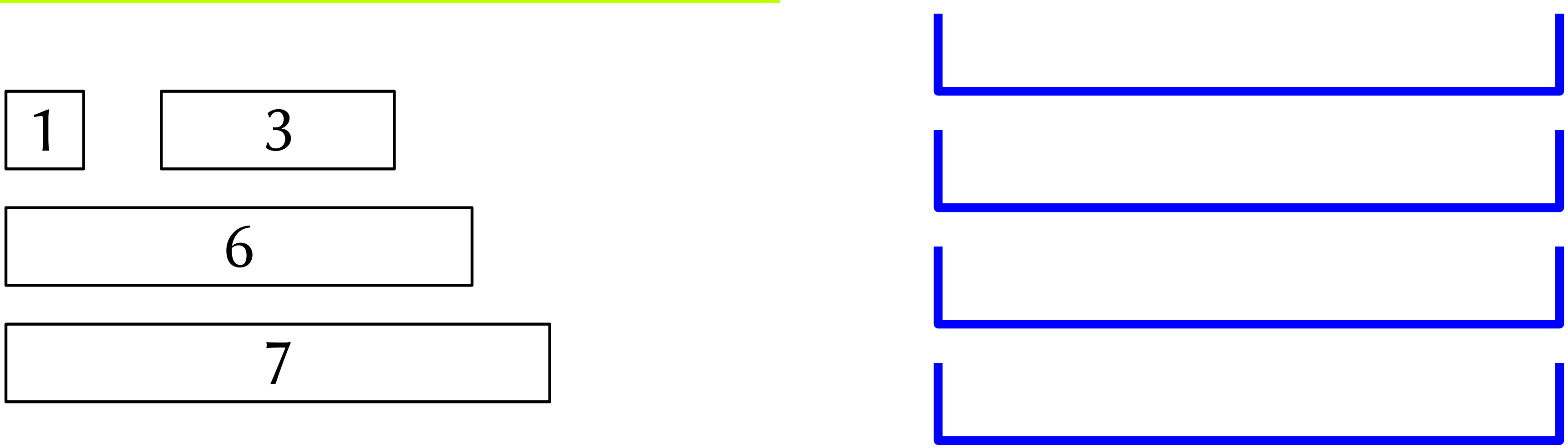
bin $\neq$ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

ビンパッキング問題：例

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

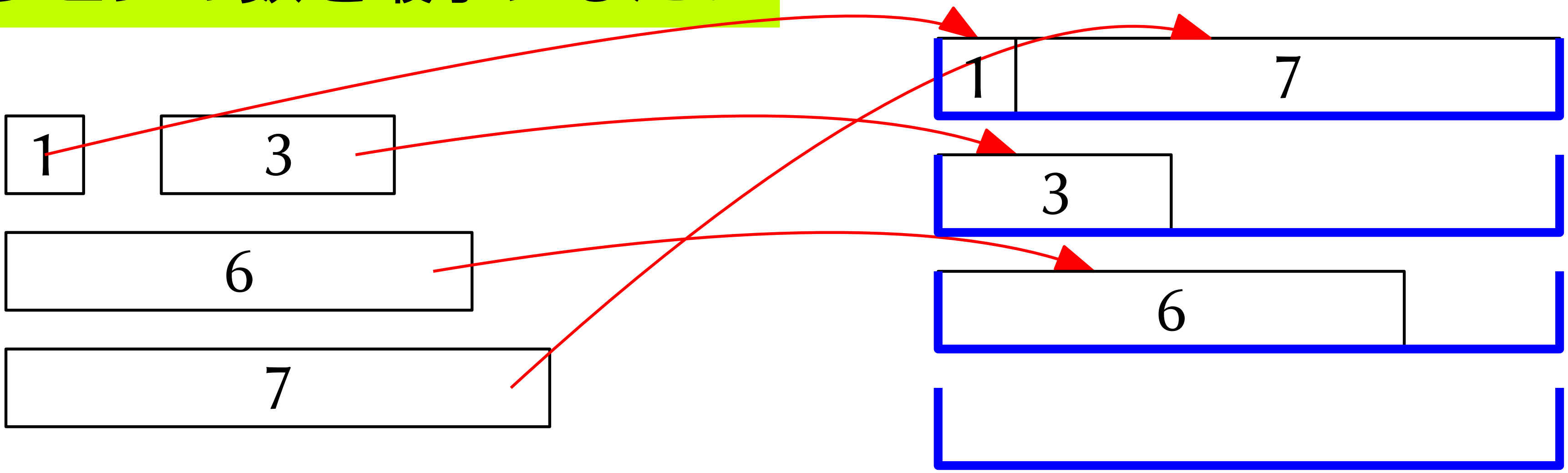
bin ≠ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

ビンパッキング問題：定義 – 入力

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

入力

- アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各アイテム i の大きさ $w_i \geq 0$
- ビンの容量 $B \geq 0$

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

$\boxed{\text{許容解}}$ アイテム集合 N の分割 $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$

- ただし，各 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，

$$\sum_{i \in N_j} w_i \leq B$$

n 個のアイテム

アイテム	1	2	$\cdots$	n
大きさ	w_1	w_2	$\ldots$	w_n

ビンの容量：B

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

$\boxed{\text{許容解}}$ アイテム集合 N の分割 $\underline{\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}}$

- ただし，各 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，
$$\underline{\sum_{i \in N_j} w_i \leq B}$$

ビン j に入るアイテムの大きさの和が
ビンの容量 B を越えない

ビン 1 に N_1 を
ビン 2 に N_2 を
$\cdots$

n 個のアイテム

アイテム	1	2	$\cdots$	n
大きさ	w_1	w_2	$\ldots$	w_n

ビンの容量：B

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

目的　ビンの数 k の最小化

n 個のアイテム

アイテム	1	2	$\cdots$	n
大きさ	w_1	w_2	$\ldots$	w_n

ビンの容量：B

ビンパッキング問題：定義

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

入力

- アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各アイテム i の大きさ $w_i \geq 0$
- ビンの容量 $B \geq 0$

許容解

アイテム集合 N の分割 $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$

- ただし，各 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，

$$\sum_{i \in N_j} w_i \leq B$$

目的

ビンの数 k の最小化

重要な点

解くべき問題の定義を明確にすること

ビンパッキング問題：目標

目標

ビンパッキング問題を整数計画問題として書き表す

つまり，変数，制約，目的関数を定める

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

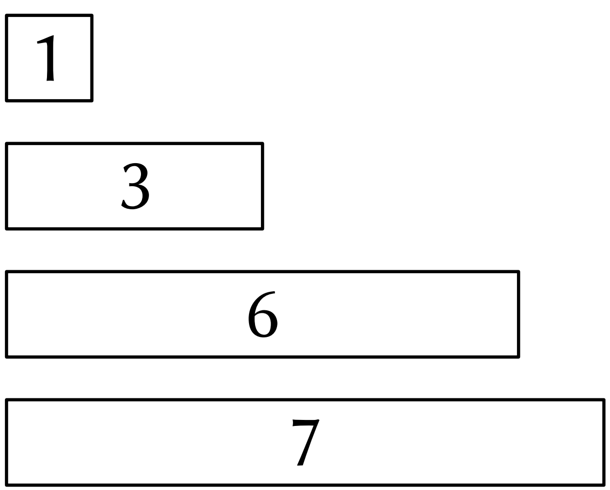
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

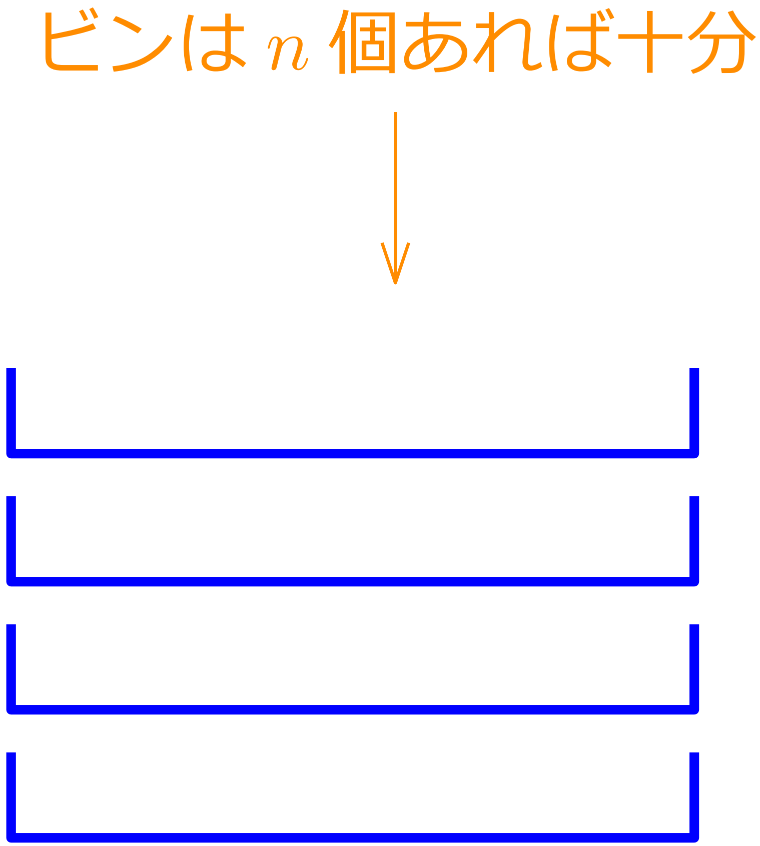
ビンパッキング問題：考え方

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

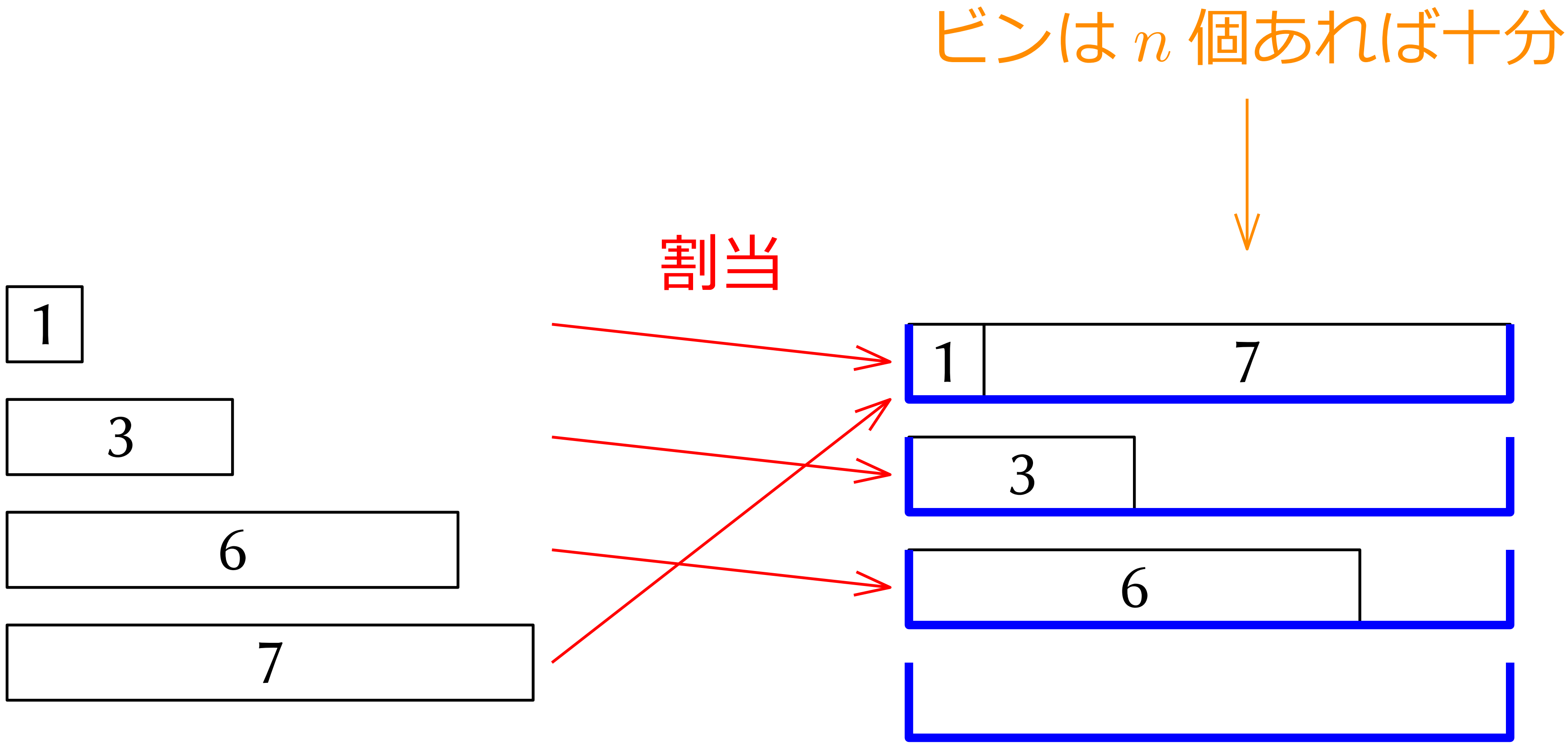




4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

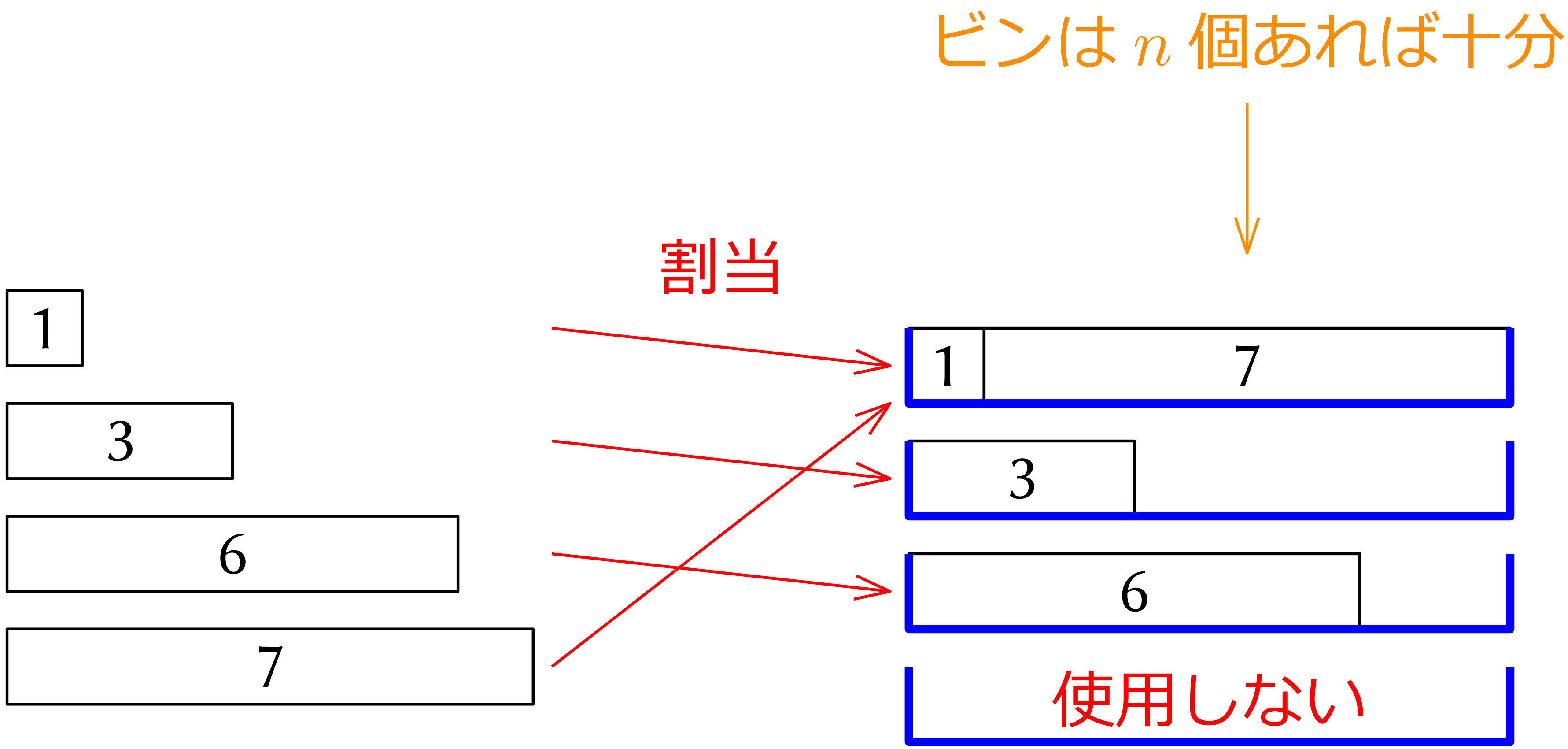


ビンパッキング問題：考え方

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8



ビンパッキング問題：考え方

4 つのアイテム

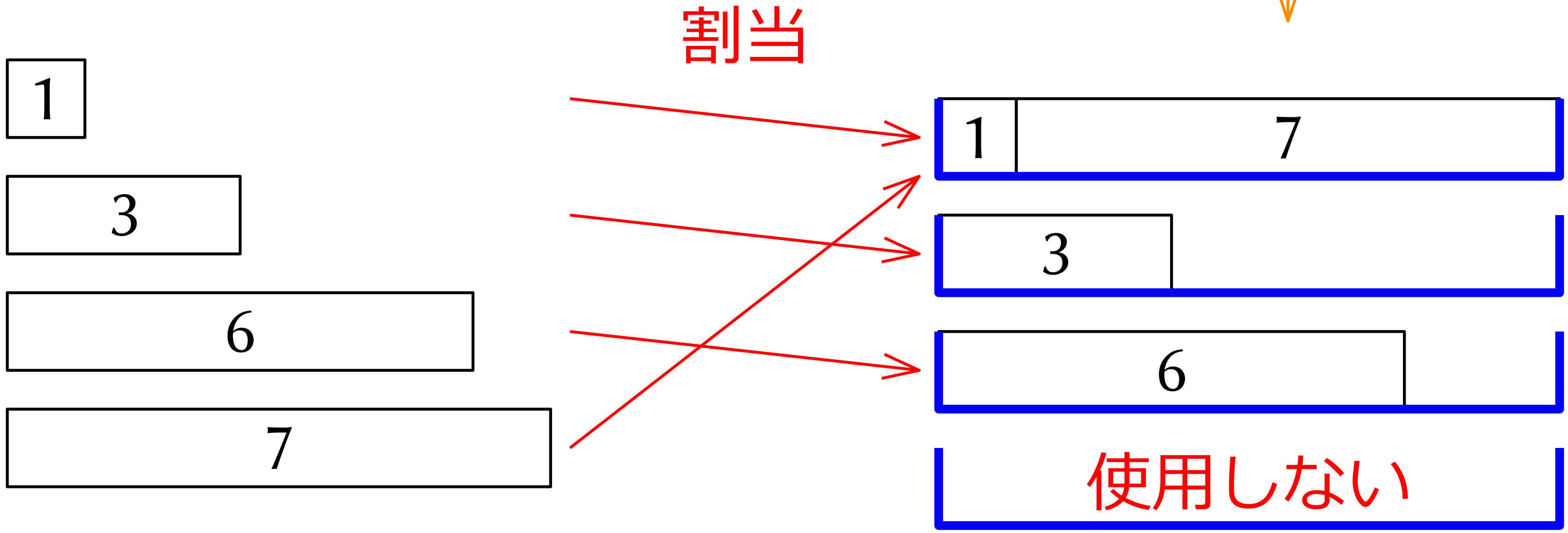
アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

ビン集合 $M = \{1, 2, \ldots, n\}$

ビンは n 個あれば十分

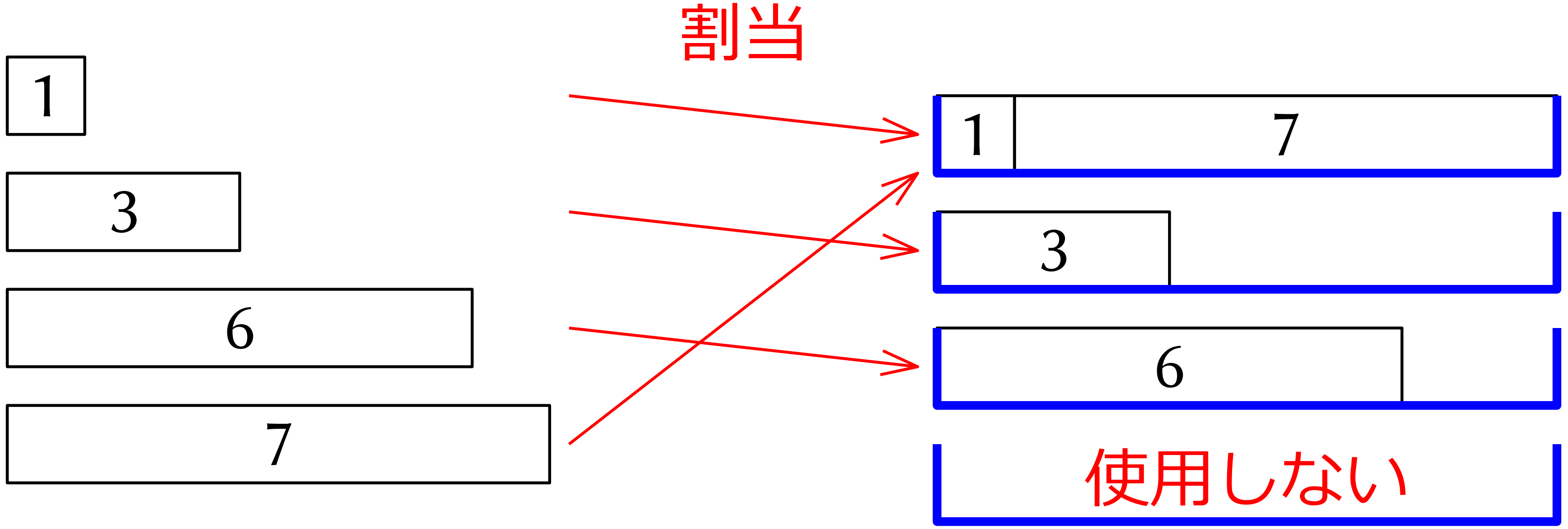


ビンパッキング問題：変数 (1)

各ビン $j \in M$ に対して，変数 $y_j \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$y_j = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{ビン } j \text{ を使用する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{ビン } j \text{ を使用しない} \end{cases}$$



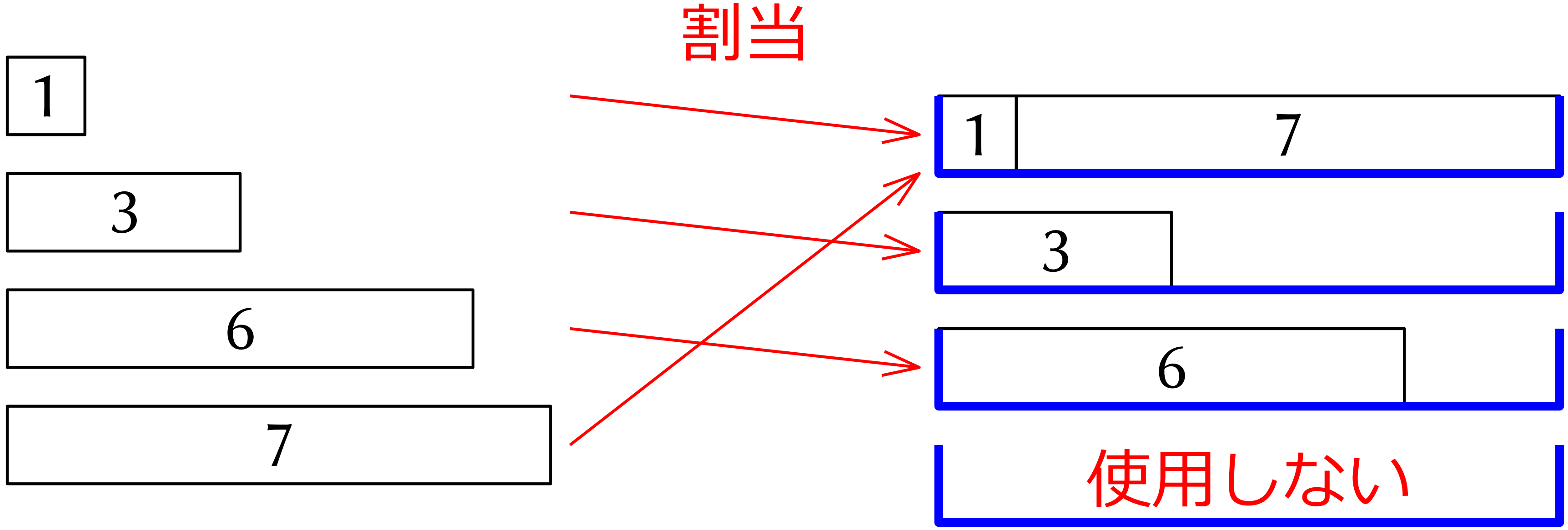
ビンパッキング問題：変数 (2)

各アイテム $i \in N$，各ビン $j \in M$ に対して，

変数 $x_{i,j} \in \{0,1\}$ を使用

解釈：

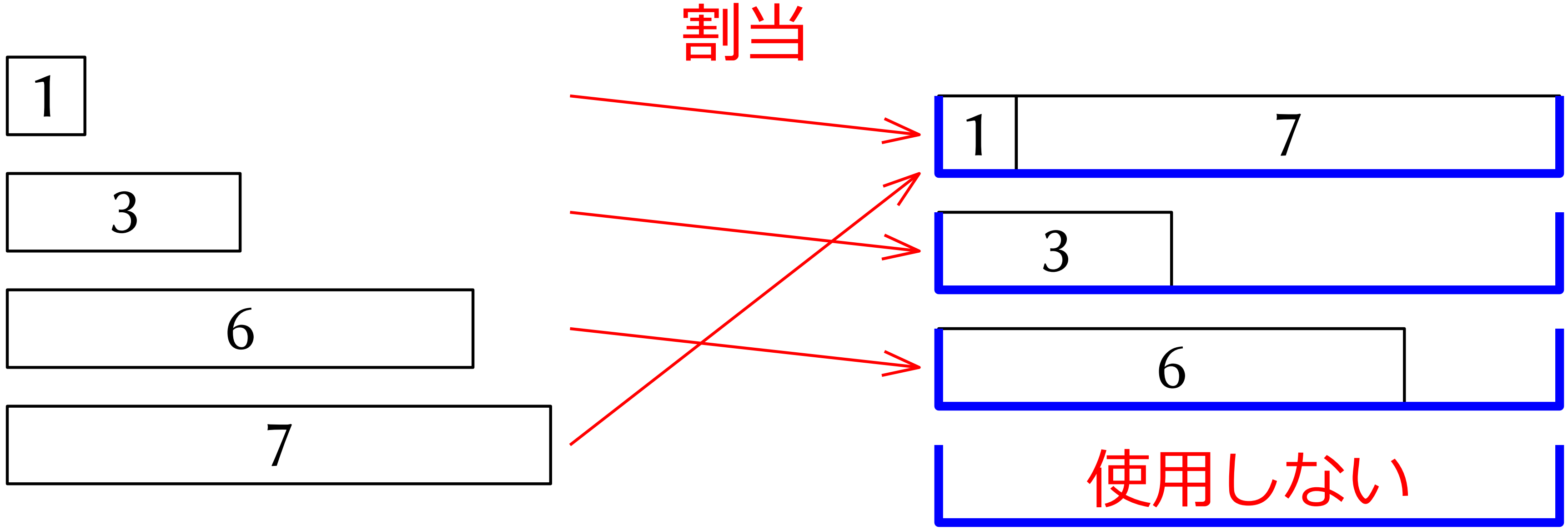
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ をビン } j \text{ に割り当てる} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ をビン } j \text{ に割り当てない} \end{cases}$$



ビンパッキング問題：目的

使用するビンの数の最小化

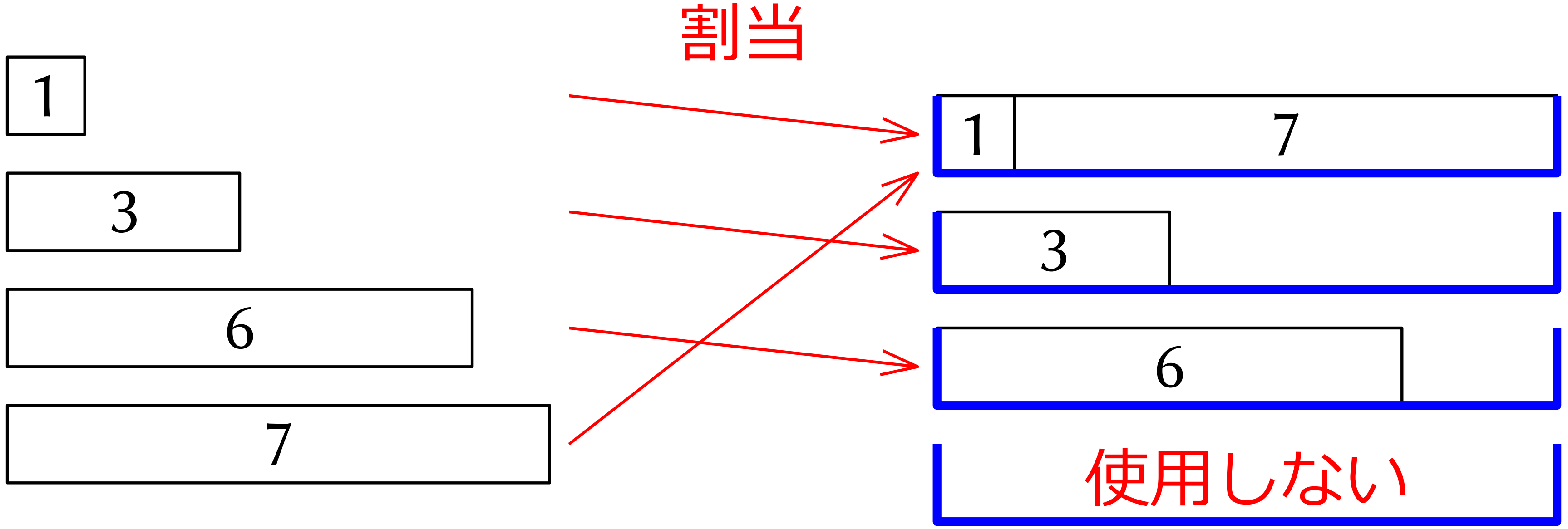
$$\text{minimize} \quad \sum_{j \in M} y_j$$



ビンパッキング問題：制約 (1)

各アイテムはちょうど 1 つのビンに割り当てられる

$$\sum_{j \in M} x_{i,j} = 1 \qquad\qquad \forall\, i \in N$$

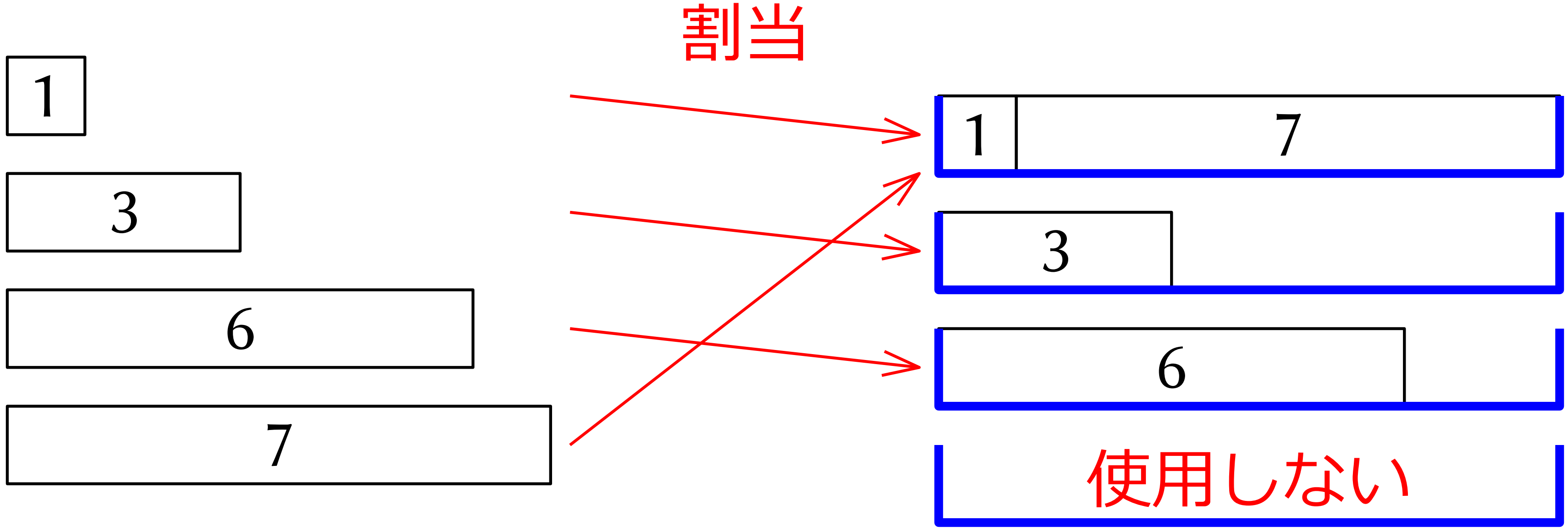


ビンパッキング問題：制約 (2)

各ビンに割り当てられたアイテムの大きさの和は

ビンの容量以下

$$\sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \leq 0 \qquad \forall\, j \in M$$



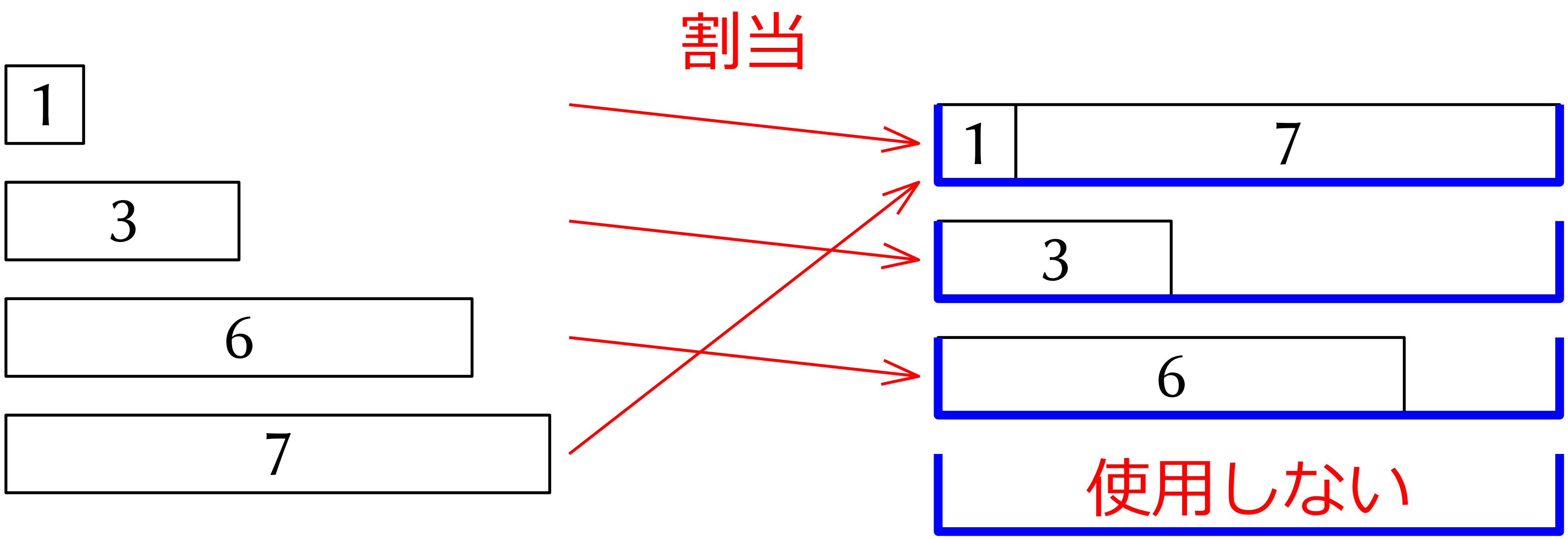
ビンパッキング問題：制約 (2)

各ビンに割り当てられたアイテムの大きさの和は

ビンの容量以下

$$\sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \leq 0 \qquad \forall\, j \in M$$

$$\sum_{i \in N} w_i x_{i,j} \leq B y_j$$

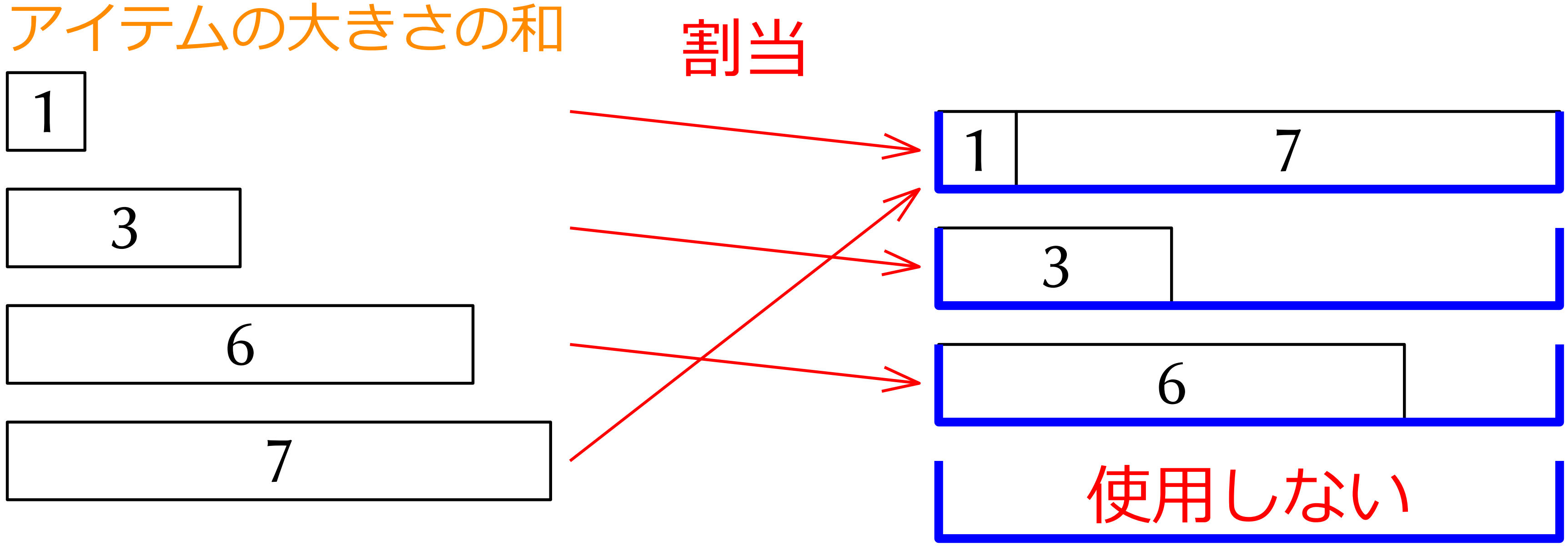


ビンパッキング問題：制約 (2)

各ビンに割り当てられたアイテムの大きさの和は
ビンの容量以下

$$\sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \leq 0 \qquad \forall\, j \in M$$

$$\underbrace{\sum_{i \in N} w_i x_{i,j}}_{\text{ビン } j \text{ に割り当てられたアイテムの大きさの和}} \leq B y_j = \begin{cases} B & (\text{ビン } j \text{ が使われる}) \\ 0 & (\text{ビン } j \text{ が使われない}) \end{cases}$$



$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{j \in M} y_j & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in M} x_{i,j} = 1 & \forall\, i \in N \\
& \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \leq 0 & \forall\, j \in M \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} & \forall\, i \in N, \forall\, j \in M \\
& y_j \in \{0,1\} & \forall\, j \in M
\end{array}
$$

変数の総数 $= |N||M| + |M|$

制約の総数 $= |N| + |M|$

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 → 整数計画問題

モデリング

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

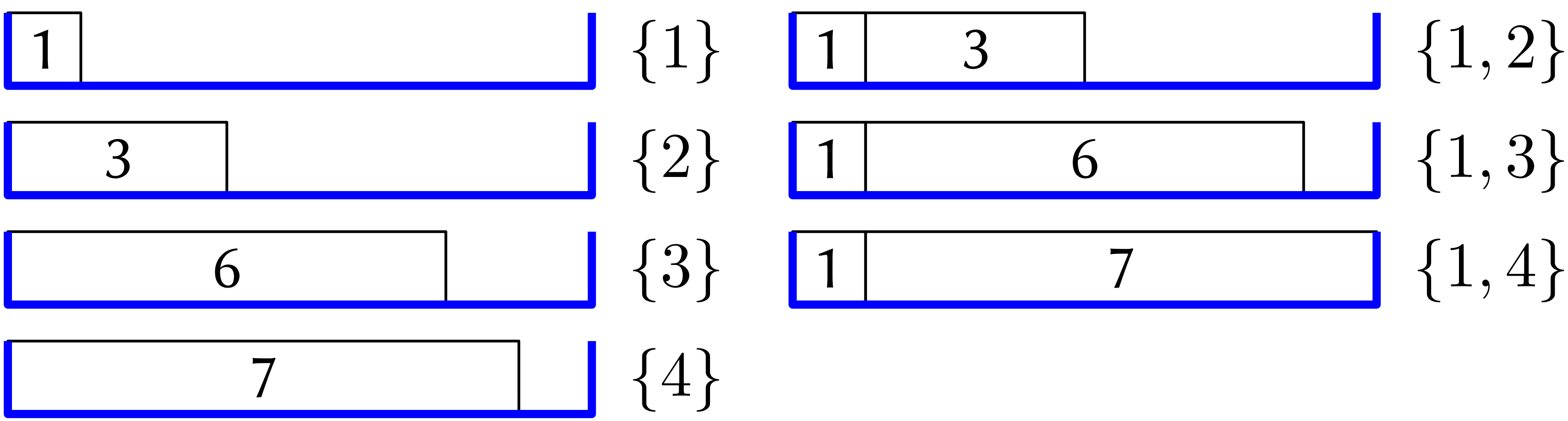
ビンパッキング問題 (2)：準備

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$



ビンパッキング問題 (2)：準備

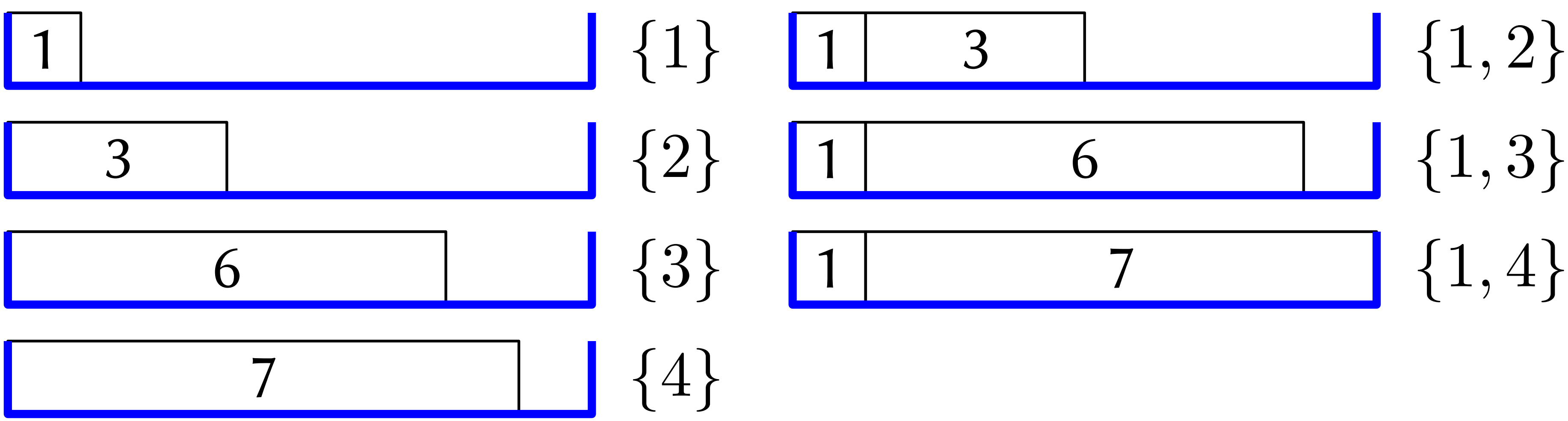
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$

定義：$P \subseteq N$ がパターン $\Leftrightarrow \sum_{i \in P} w_i \leq B$



ビンパッキング問題 (2)：直感

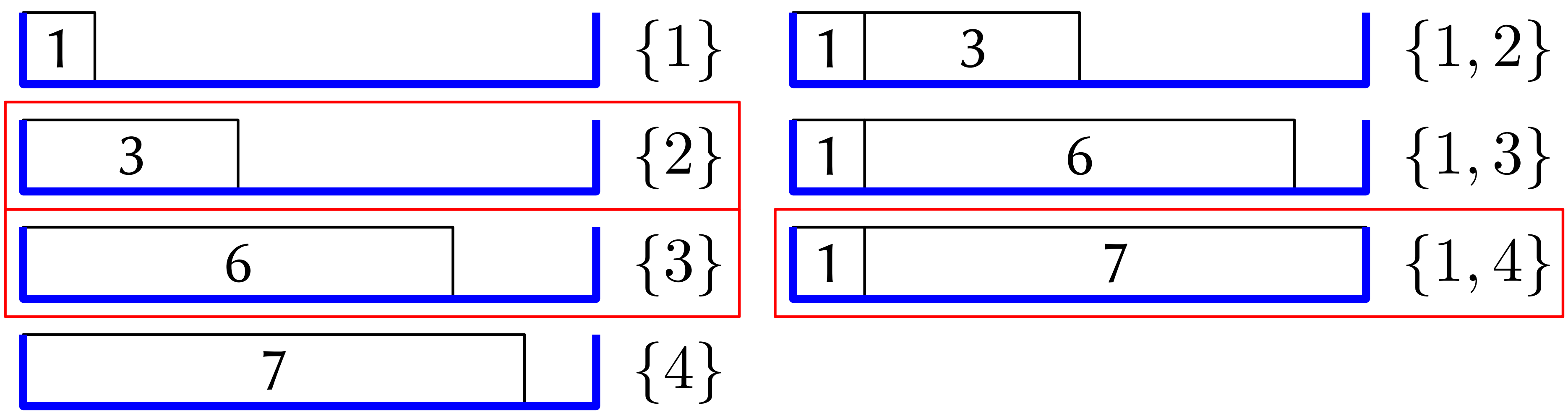
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$

パターンを選択して，許容解を構成する



ビンパッキング問題 (2)：直感

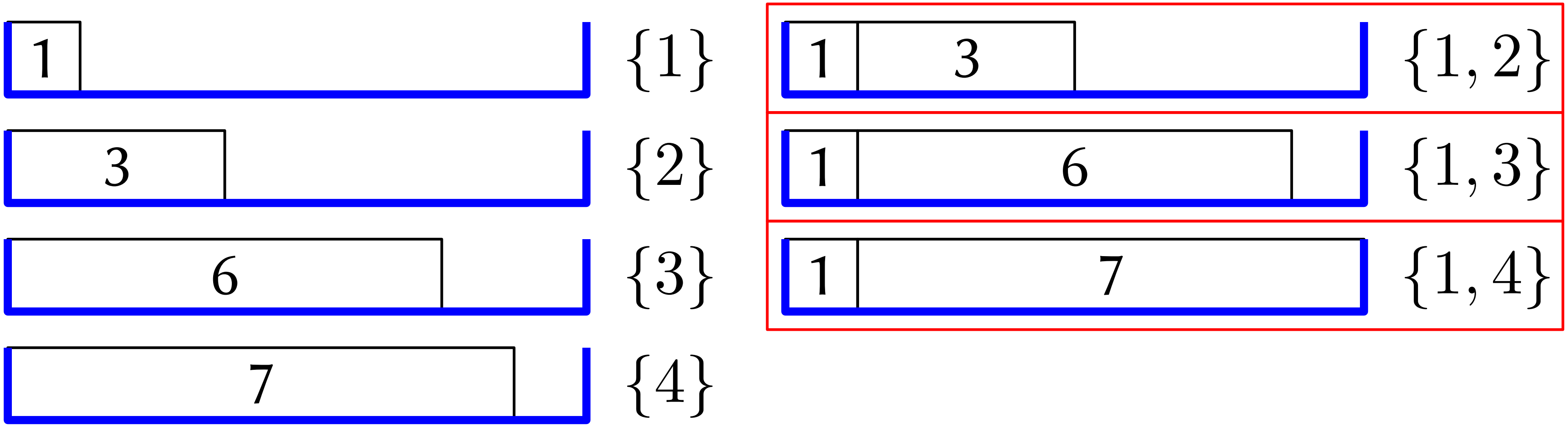
4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

パターンの集合 $\mathcal{P} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$

パターンを選択して，許容解を構成する



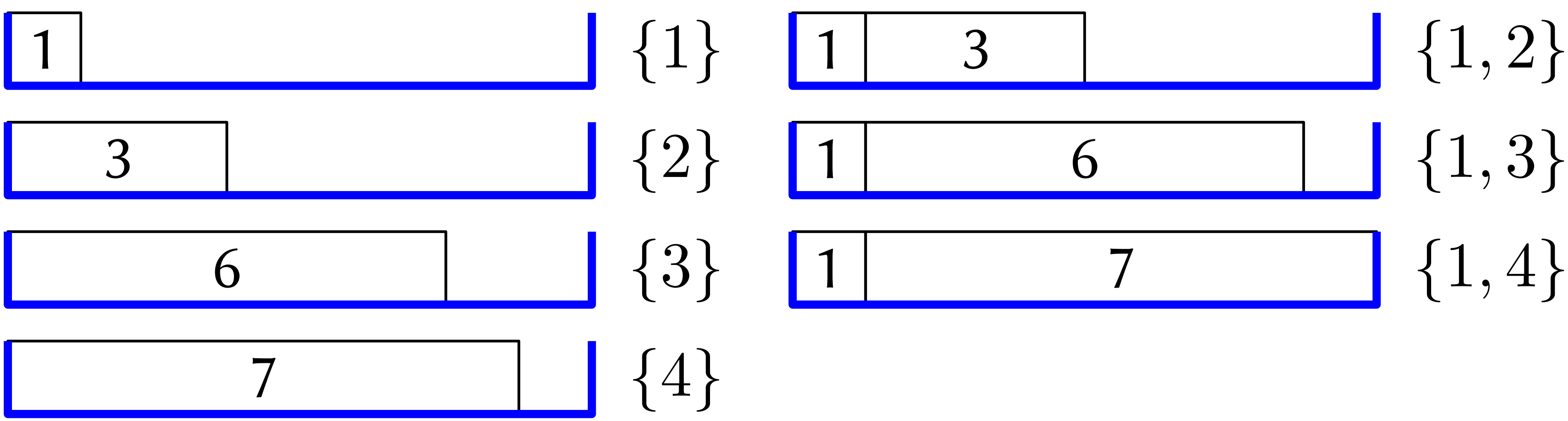
$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,4\}$

ビンパッキング問題 (2)：変数

各パターン $P \in \mathcal{P}$ に対して，変数 $x_P \in \{0,1\}$ を使用

解釈：

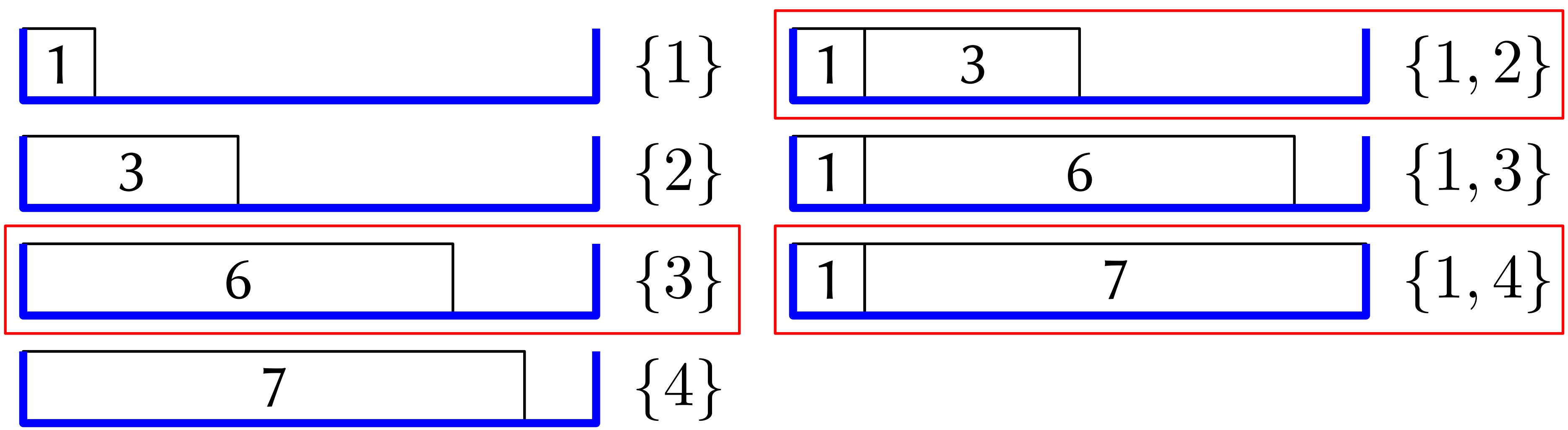
$$x_P = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{パターン } P \text{ を使用する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{パターン } P \text{ を使用しない} \end{cases}$$



ビンパッキング問題 (2)：目的

使用するパターン数の最小化 $=$ 使用するビンの総数の最小化

$$\text{minimize} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P$$

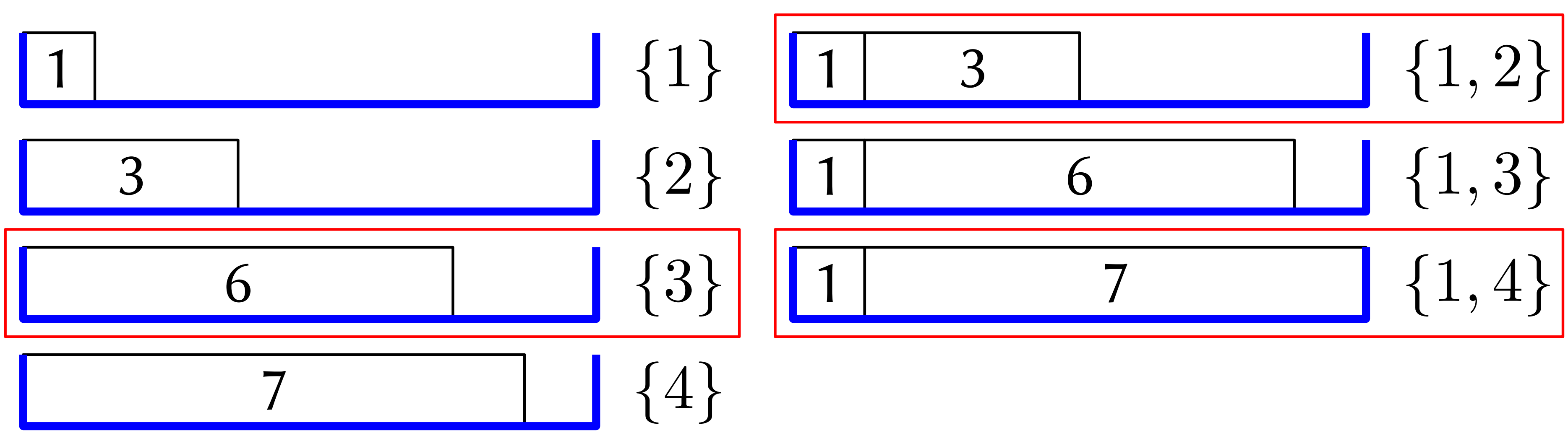


ビンパッキング問題 (2)：制約

各アイテムは使用されるパターンのどれかに含まれる

$$\underbrace{\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P}_{} \geq 1 \qquad \forall\, i \in N$$

アイテム i を含み，使用されるパターンの総数



ビンパッキング問題 (2)：01 整数計画モデル

Gilmore, Gomory ('61)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{subject to} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\,:\, i \in P} x_P \geq 1 && \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0, 1\} && \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

変数の総数 $= |\mathcal{P}| \longleftarrow$ $|N|$ に関して指数関数的に大きくなりうる

制約の総数 $= |N|$

ビンパッキング問題：モデルの比較 (1)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \ & \sum_{j \in M} y_j \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j \in M} x_{i,j} = 1 \quad \forall\, i \in N \\
& \sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \le 0 \quad \forall\, j \in M \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in N, \forall\, j \in M \\
& y_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P} :\, i \in P} x_P \ge 1 \quad \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0,1\} \quad \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

変数の数

$$|N||M| + |M|$$

制約の数

$$|N| + |M|$$

変数の数

$$|\mathcal{P}| \longleftarrow$$

$|N|$ に関して
指数関数的に
大きくなりうる

制約の数

$$|N|$$

ビンパッキング問題：モデルの比較 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \ & \sum_{j \in M} y_j \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j \in M} x_{i,j} = 1 \quad \forall\, i \in N \\
& \sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \le 0 \quad \forall\, j \in M \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in N, \forall\, j \in M \\
& y_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \ & \sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \ge 1 \quad \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0,1\} \quad \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

線形計画緩和の最適値

$$\frac{1}{B} \sum_{i \in N} w_i$$

線形計画緩和の最適値

ビンパッキング問題：モデルの比較 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{j \in M} y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in M} x_{i,j} = 1 \quad \forall\, i \in N \\
& \sum_{i \in N} w_i x_{i,j} - B y_j \leq 0 \quad \forall\, j \in M \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in N, \forall\, j \in M \\
& y_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 \quad \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0,1\} \quad \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

線形計画緩和の最適値

$$\frac{1}{B} \sum_{i \in N} w_i$$

悪い

線形計画緩和の最適値

よい

未解決問題 (Scheithauer, Terno ’95)

整数計画問題の最適値 $\leq$ $\lceil$右の線形計画緩和の最適値$\rceil + 1$

Integer Round-Up Property

(整数切り上げ性)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}:\, i \in P} x_P \geq 1 & \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0, 1\} & \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{array}
$$

多くの入力で次が成立 (integer round-up property)

整数計画問題の最適値 $=$ $\lceil$右の線形計画緩和の最適値$\rceil$

これが成り立たない入力を見つけるのは大変

未解決問題 (Scheithauer, Terno ’95)

整数計画問題の最適値 $\leq$ $\lceil$右の線形計画緩和の最適値$\rceil + 1$

課題

ビンパッキング問題の整数計画モデルには
変数が膨大に存在

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}\colon i \in P} x_P \geq 1 \quad && \forall\, i \in N \\
& x_P \in \{0, 1\} && \forall\, P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

解決法

変数を **アルゴリズムの実行の中で** 追加していく

$\leadsto$ 第 11 回講義の内容
(列生成法)

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル
- ビンパッキング問題の整数計画モデル (2)
- 巡回セールスマン問題の整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\longrightarrow$ 整数計画問題

モデリング

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

非対称 TSP：01 整数計画モデル？ (再掲)

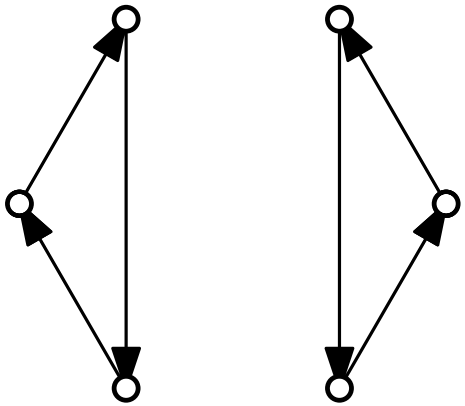
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

出次数制約

入次数制約

01 制約

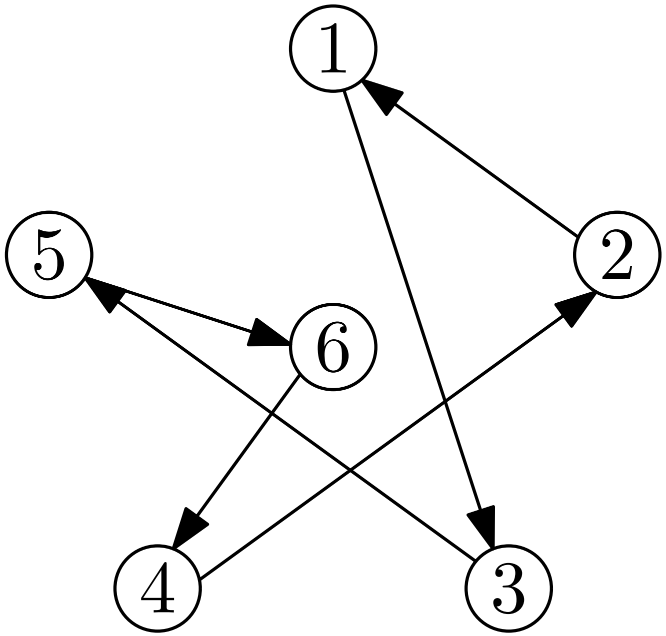
これは，巡回セールスマン問題に対する
正しい 01 整数計画モデル**ではない**



非対称 TSP (2)：変数 (2)

各都市 $i \in V$ に対して，変数 $\pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を使用

解釈：　$\pi_i = k \quad \Leftrightarrow \quad$ 都市 i を k 番目に訪れる



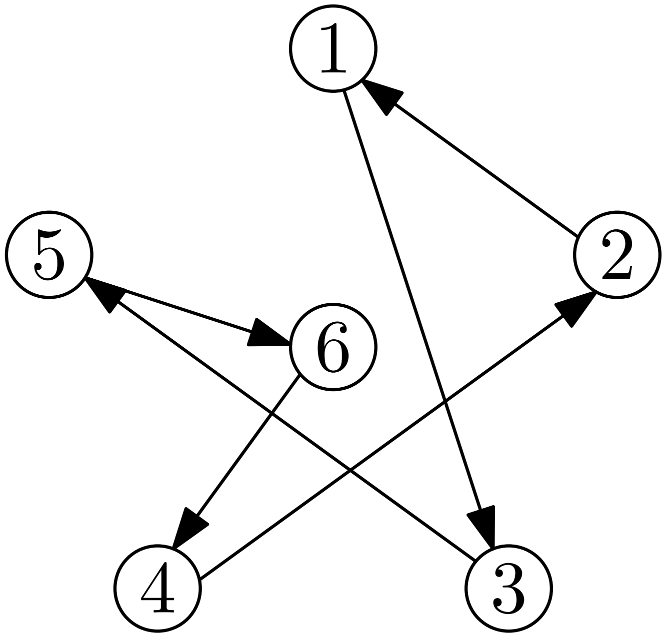
$$\pi_1 = 1$$
$$\pi_2 = 6$$
$$\pi_3 = 2$$
$$\pi_4 = 5$$
$$\pi_5 = 3$$
$$\pi_6 = 4$$

以後，$\pi_1 = 1$ と固定

非対称 TSP (2)：制約 (3)

弧 (i, j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 \qquad \forall\, (i, j) \in A, j \neq 1$$



$$\pi_1 = 1 \qquad x_{1,3} = 1$$
$$\pi_2 = \qquad x_{2,1} = 1$$
$$\pi_3 = \qquad x_{3,5} = 1$$
$$\pi_4 = \qquad x_{4,2} = 1$$
$$\pi_5 = \qquad x_{5,6} = 1$$
$$\pi_6 = \qquad x_{6,4} = 1$$

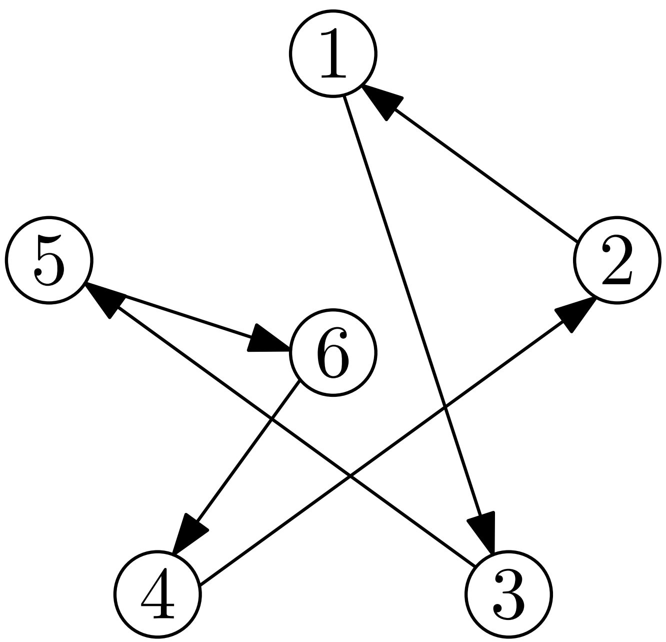
非対称 TSP (2)：制約 (3)

弧 (i, j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \le n - 1 \qquad \forall\, (i, j) \in A, j \neq 1$$

$$x_{i,j} = 1 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \le \pi_j$$

$$x_{i,j} = 0 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \le \pi_j + n$$



$$\pi_1 = 1$$
$$\pi_2 =$$
$$\pi_3 =$$
$$\pi_4 =$$
$$\pi_5 =$$
$$\pi_6 =$$

$$x_{1,3} = 1$$
$$x_{2,1} = 1$$
$$x_{3,5} = 1$$
$$x_{4,2} = 1$$
$$x_{5,6} = 1$$
$$x_{6,4} = 1$$

非対称 TSP (2)：制約 (3)

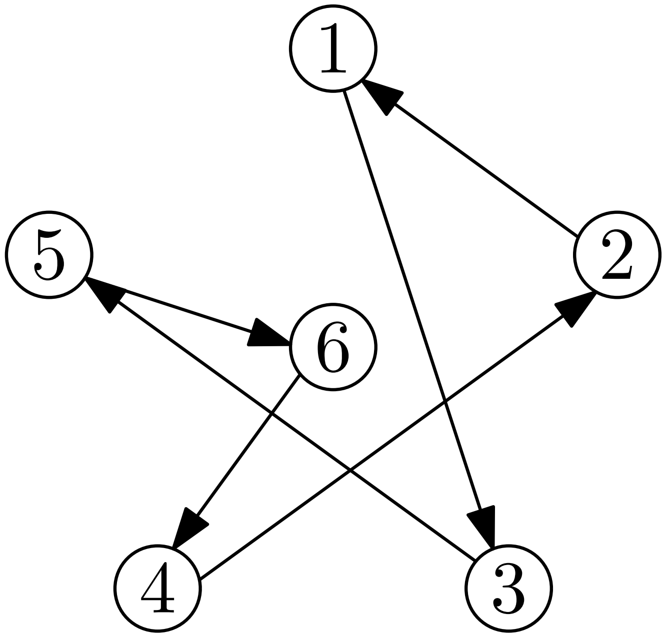
弧 (i, j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 \qquad \forall\, (i, j) \in A, j \neq 1$$

$$x_{i,j} = 1 \Rightarrow \qquad \pi_i + 1 \leq \pi_j$$

$$x_{i,j} = 0 \Rightarrow \qquad \pi_i + 1 \leq \pi_j + n$$

$$\pi_1 < \pi_3 < \pi_5 < \pi_6 < \pi_4 < \pi_2$$



$\pi_1 = 1$
$\pi_2 =$
$\pi_3 =$
$\pi_4 =$
$\pi_5 =$
$\pi_6 =$

$x_{1,3} = 1$
$x_{2,1} = 1$
$x_{3,5} = 1$
$x_{4,2} = 1$
$x_{5,6} = 1$
$x_{6,4} = 1$

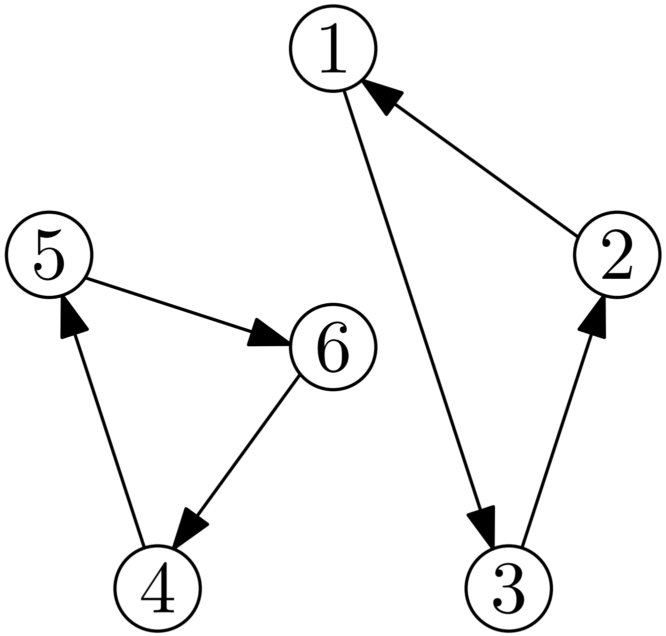
非対称 TSP (2)：制約 (3) 続

弧 (i,j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\,x_{i,j} \le n - 1 \qquad \forall\,(i,j) \in A, j \ne 1$$

$$x_{i,j} = 1 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \le \pi_j$$

$$x_{i,j} = 0 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \le \pi_j + n$$



$$x_{1,3} = 1$$
$$x_{2,1} = 1$$
$$x_{3,2} = 1$$
$$x_{4,5} = 1$$
$$x_{5,6} = 1$$
$$x_{6,4} = 1$$

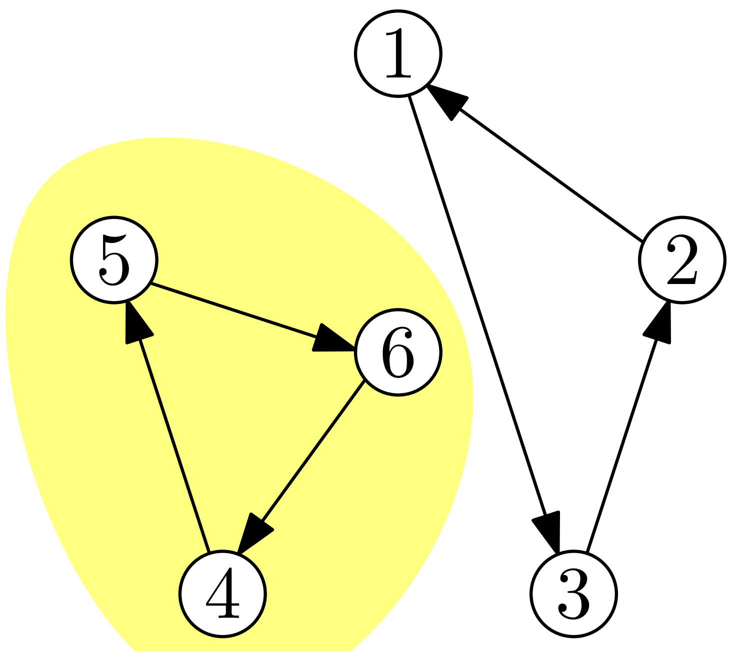
非対称 TSP (2)：制約 (3) 続

弧 (i, j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 \qquad \forall\, (i,j) \in A, j \neq 1$$

$$x_{i,j} = 1 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \leq \pi_j$$

$$x_{i,j} = 0 \Rightarrow \quad \pi_i + 1 \leq \pi_j + n$$



$$\pi_4 + 1 \leq \pi_5$$
$$\pi_5 + 1 \leq \pi_6$$
$$\pi_6 + 1 \leq \pi_4$$

$$x_{1,3} = 1$$
$$x_{2,1} = 1$$
$$x_{3,2} = 1$$
$$x_{4,5} = 1$$
$$x_{5,6} = 1$$
$$x_{6,4} = 1$$

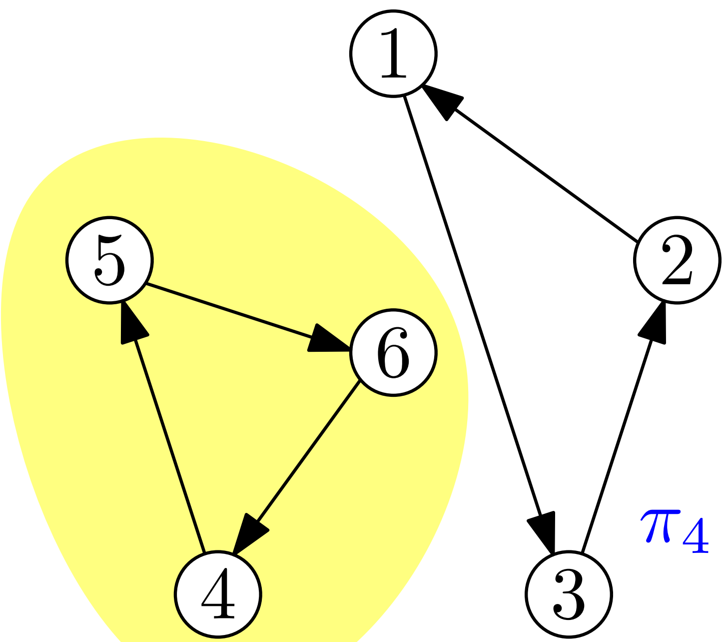
非対称 TSP (2)：制約 (3) 続

弧 (i,j) を使うとき，i の次に訪れる都市は j である

$$\pi_i - \pi_j + n\,x_{i,j} \le n-1 \qquad \forall\,(i,j)\in A, j\neq 1$$

$$x_{i,j}=1 \Rightarrow \qquad \pi_i + 1 \le \pi_j$$

$$x_{i,j}=0 \Rightarrow \qquad \pi_i + 1 \le \pi_j + n$$



$$\pi_4 + 1 \le \pi_5$$
$$\pi_5 + 1 \le \pi_6$$
$$\pi_6 + 1 \le \pi_4 \quad +$$

$$\pi_4+\pi_5+\pi_6+3 \le \pi_4+\pi_5+\pi_6$$

$x_{1,3}=1$
$x_{2,1}=1$
$x_{3,2}=1$
$x_{4,5}=1$
$x_{5,6}=1$
$x_{6,4}=1$

非対称 TSP (2)：整数計画モデル

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \neq 1 \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A \\
& \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
& \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

これは，巡回セールスマン問題に対する
正しい整数計画モデル **である**

非対称 TSP (2)：整数計画モデル (続)

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \neq 1 \\
& x_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A \\
& \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
& \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

変数の総数 $= |A| + |V| - 1 = |V|(|V| - 1) + |V| - 1$

制約の総数 $= 2|V| + (|V| - 1)(|V| - 2)$

非対称 TSP：モデルの比較 (1)

Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \le |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \le n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \neq 1 \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A \\
& \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
& \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

変数の総数

$$(|V| - 1)|V|$$

$$(|V| - 1)|V| + |V| - 1$$

制約の総数

$$2|V| + 2^{|V|} - 2$$

$$2|V| + (|V| - 1)(|V| - 2)$$

非対称 TSP：モデルの比較 (1)

Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \leq |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \leq n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \neq 1 \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A \\
& \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
& \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

変数の総数

$(|V| - 1)|V|$

同程度の良さ

$(|V| - 1)|V| + |V| - 1$

同程度の良さ

制約の総数

$2|V| + 2^{|V|} - 2$

悪い

$2|V| + (|V| - 1)(|V| - 2)$

良い

非対称 TSP：モデルの比較 (2)

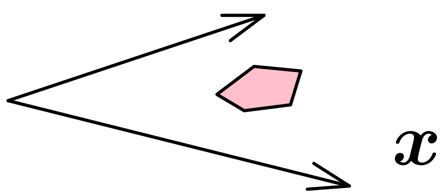
Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

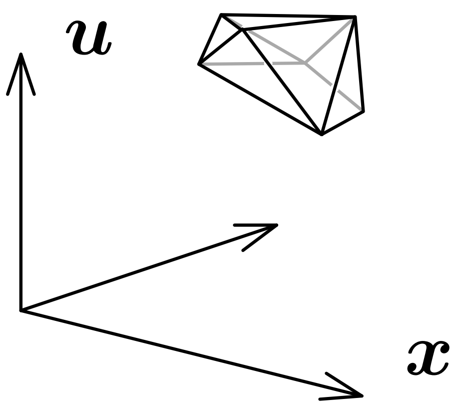
$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \le |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
& \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \le n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \ne 1 \\
& x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A \\
& \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
& \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

線形計画緩和の許容領域





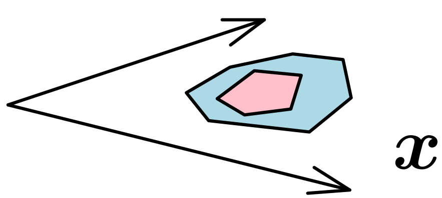
Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in S - \{i\}} x_{(i,j)} \le |S| - 1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
 & x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

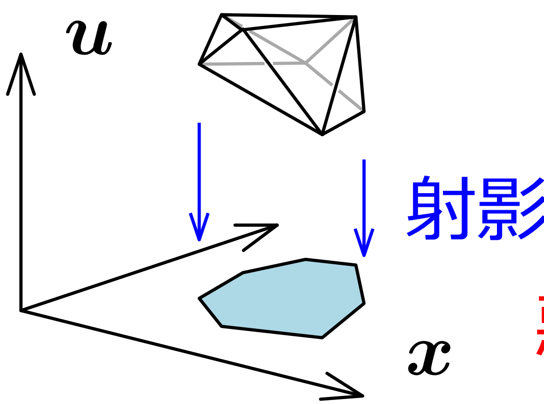
Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a \in A} d(a) x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{j \in V - \{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \le n - 1 & \forall\, (i,j) \in A, j \ne 1 \\
 & x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A \\
 & \pi_i \in \{1, 2, \ldots, n\} & \forall\, i \in V \\
 & \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

線形計画緩和の許容領域



良い



悪い

非対称 TSP：モデルの比較 (2)

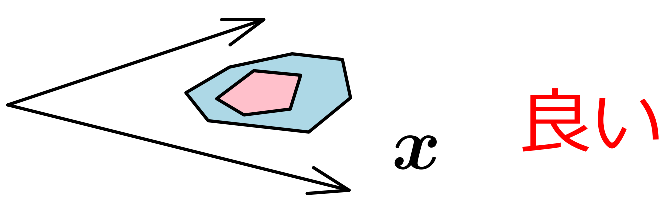
Dantzig, Fulkerson, Johnson ('54)

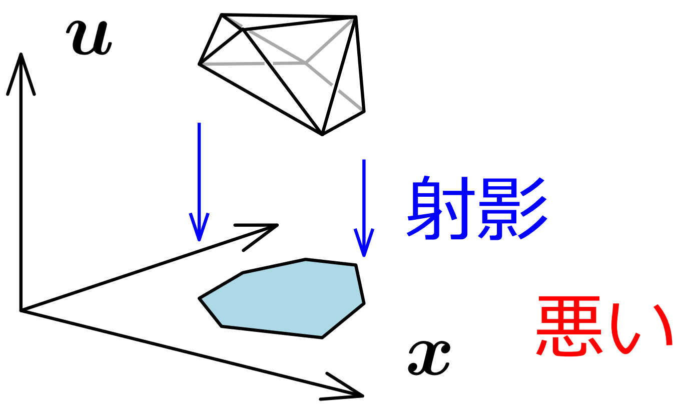
$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a\in A} d(a)x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j\in V-\{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{j\in V-\{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in S-\{i\}} x_{(i,j)} \le |S|-1 & \forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\} \\
 & x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A
\end{array}
$$

Miller, Tucker, Zemlin ('60)

$$
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \displaystyle\sum_{a\in A} d(a)x_a & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j\in V-\{i\}} x_{(i,j)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \displaystyle\sum_{j\in V-\{i\}} x_{(j,i)} = 1 & \forall\, i \in V \\
 & \pi_i - \pi_j + n\, x_{i,j} \le n-1 & \forall\, (i,j) \in A, j \ne 1 \\
 & x_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A \\
 & \pi_i \in \{1,2,\ldots,n\} & \forall\, i \in V \\
 & \pi_1 = 1 &
\end{array}
$$

線形計画緩和の許容領域





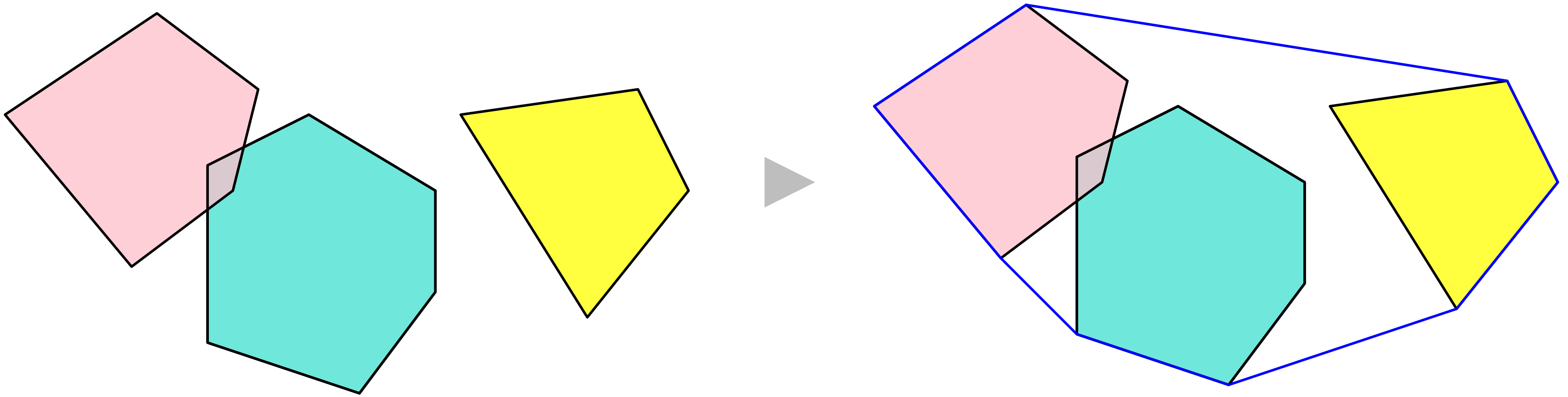
性質 (Padberg, Sung '91; Langevin, Soumis, Desrosiers '90)

左の LP 緩和の許容領域 $\subseteq$ 右の LP 緩和の許容領域の射影

次回予告

次回の内容

離接計画 —「または」の表現法



巡回セールスマン問題：文献

次の文献に様々なモデルと比較 (理論的，実験的) がある

- T. Öncan, İ. Kuban Altınel, G. Laporte, A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. Computers & Operations Research 36 (2009) 637–654.
- R. Roberti, P. Toth, Models and algorithms for the Asymmetric Traveling Salesman Problem: an experimental comparison. EURO Journal on Transportation and Logistics 1 (2012) 113–133.

ビンパッキング問題：文献

次の文献に様々なモデル，アルゴリズム，比較実験がある

- M. Delorme, M. Iori, S. Martello, Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. European Journal of Operational Research 255 (2016) 1–20.