離散最適化基礎論

第 5 回

整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 11 月 8 日

最終更新：2022 年 11 月 29 日　09:04

講義計画 (前半)

＜準備＞

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

＊ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

＜モデリング＞

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

∗ 休み (国内出張) (12/27)

∗ 休み (冬季休業) (1/3)

12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 $\longrightarrow$ 整数計画問題

モデリング

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい

(森，松井 2004 より)

ナップサック問題：例

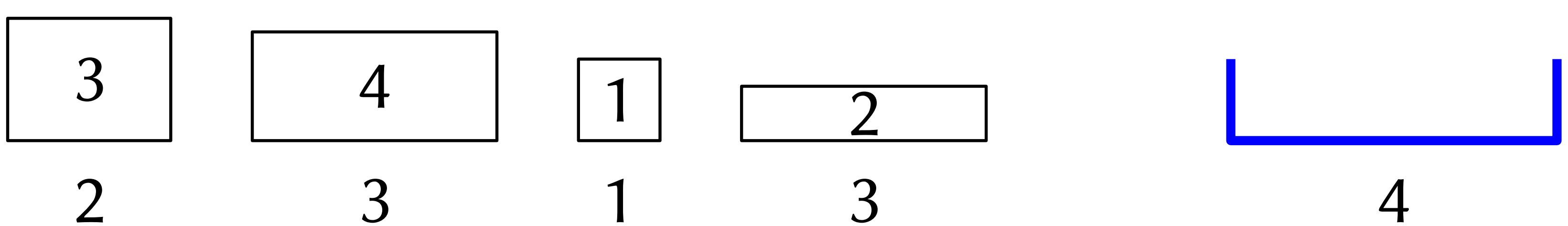
ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい



幅：　重さ
面積：収入

(森，松井 2004 より)

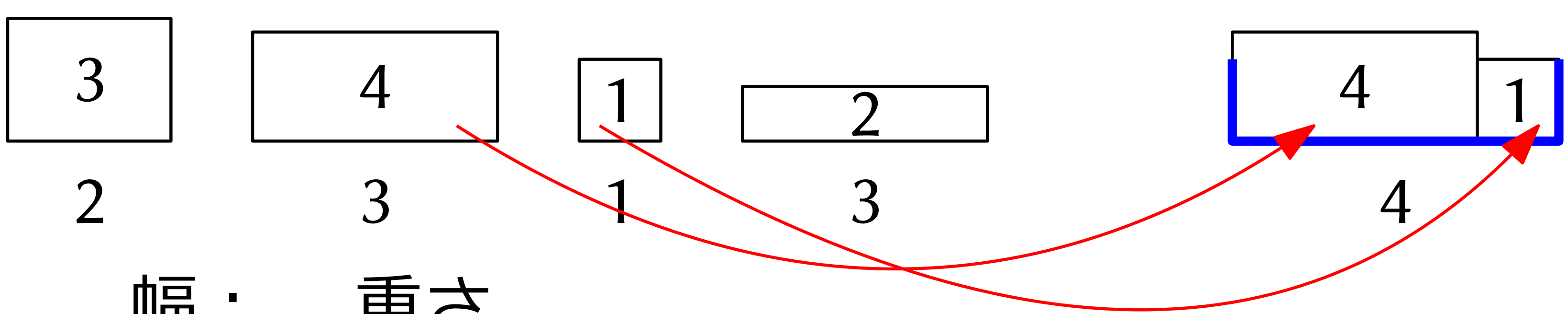
ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい



幅： 重さ
面積： 収入

(森，松井 2004 より)

ナップサック問題：定義 – 入力

ナップサック問題 (knapsack problem)

入力

- アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各アイテム $i \in N$ の収入 $p_i \geq 0$
- 各アイテム $i \in N$ の重さ $w_i \geq 0$
- ナップサックの重量制限 $B \geq 0$

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサック問題：定義 — 制約 (許容解)

ナップサック問題 (knapsack problem)

許容解　アイテムの選択

- ただし，選ばれたアイテムの重さの和はナップサックの重量制限以下

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサック問題 (knapsack problem)

$\boxed{\text{目的}}$ 選ばれたアイテムの収入の和 の 最大化

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサック問題：定義

ナップサック問題 (knapsack problem)

入力
- アイテム集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各アイテム $i \in N$ の収入 $p_i \geq 0$
- 各アイテム $i \in N$ の重さ $w_i \geq 0$
- ナップサックの重量制限 $B \geq 0$

許容解
アイテムの選択
- ただし，選ばれたアイテムの重さの和はナップサックの重量制限以下

目的
選ばれたアイテムの収入の和 の 最大化

重要な点

解くべき問題の定義を明確にすること

ナップサック問題：目標

目標

ナップサック問題を整数計画問題として書き表す

つまり，変数，制約，目的関数を定める

解きたい問題 $\xrightarrow[\text{モデリング}]{}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

ナップサック問題：変数

各アイテム $i \in N$ に対して，変数 $x_i \in \{0,1\}$ を使用

解釈：

$$x_i = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ を選択する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ を選択しない} \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

ナップサック問題：変数

各アイテム $i \in N$ に対して，変数 $x_i \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$x_i = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ を選択する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{アイテム } i \text{ を選択しない} \end{cases}$$

有用なテクニック

01 変数で選択を表す

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

重量制限に関する制約

$$\sum_{i \in N} w_i x_i \le B$$

選択したアイテムの重さの和

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

ナップサック問題：目的

選択されたアイテムの収入和の最大化

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in N} p_i x_i$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$$

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

ナップサック問題：01 整数計画モデル

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\
 & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{array}
$$

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 → 整数計画問題

モデリング

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 $\longrightarrow$ 整数計画問題

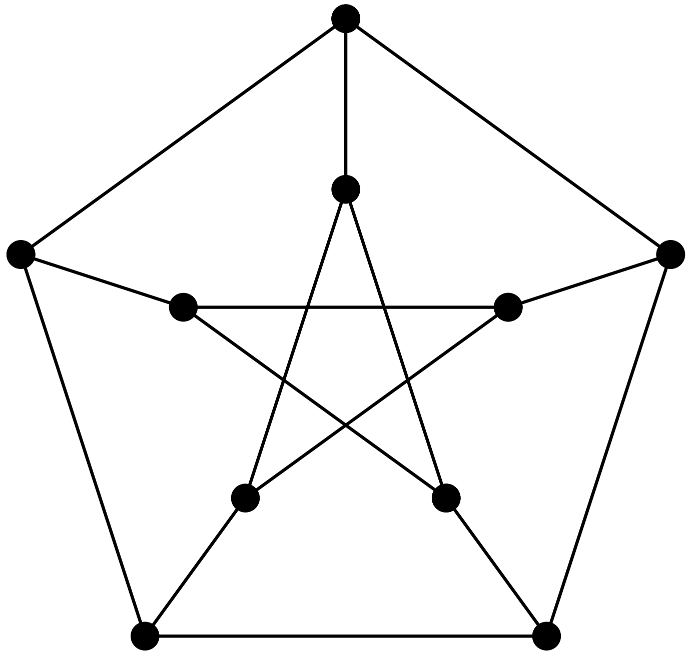
モデリング

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

最大独立集合問題：例

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)



無向グラフ

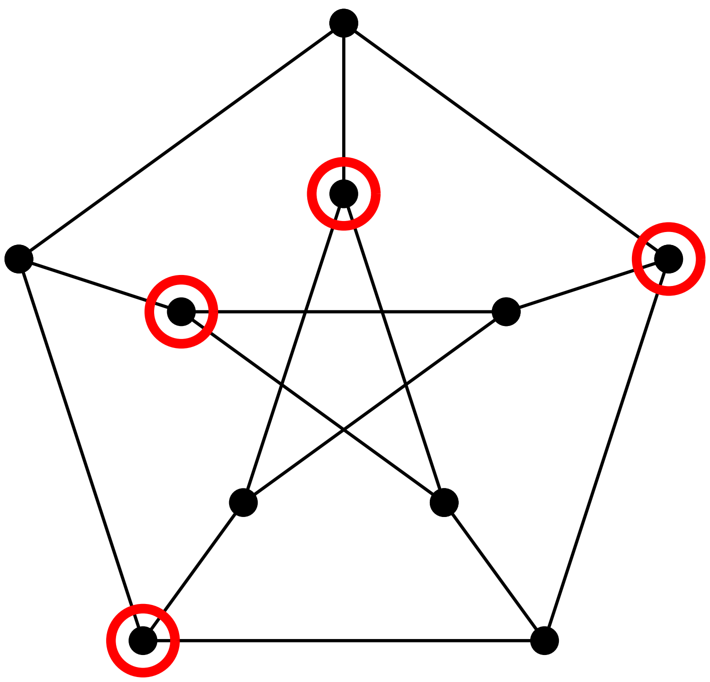
互いに隣接しない頂点を

できるだけ多く選びたい

独立集合 = 互いに隣接しない頂点からなる集合

最大独立集合問題：例

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)



無向グラフ

互いに隣接しない頂点を

できるだけ多く選びたい

独立集合 = 互いに隣接しない頂点からなる集合

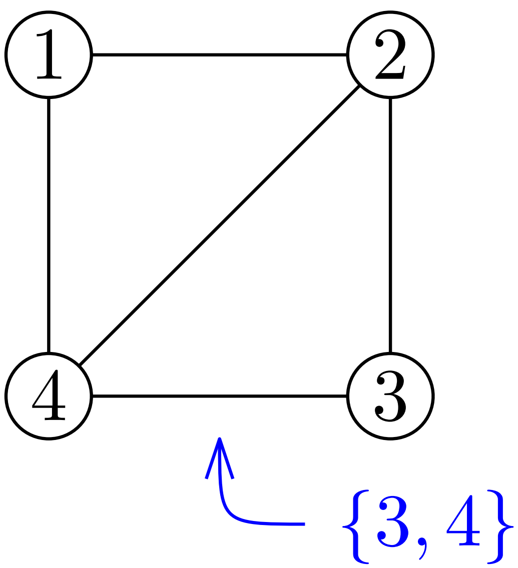
無向グラフの定義と用語

無向グラフ $G = (V, E)$ (undirected graph)

頂点集合 (vertex set) 辺集合 (edge set)

V の要素 $=$ 頂点

E の要素 $=$ 辺



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

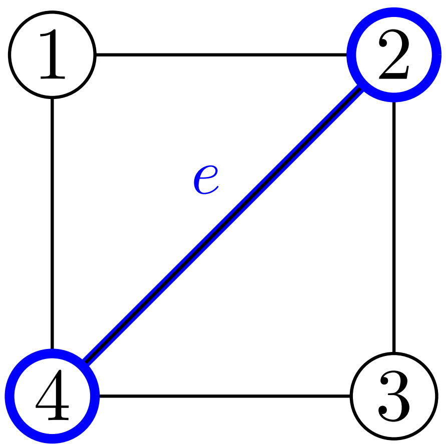
辺は $\{u, v\}$ を省略して uv と書くことも

無向グラフ $G = (V, E)$　　(undirected graph)

頂点集合 (vertex set)　　辺集合 (edge set)

V の要素 = 頂点

E の要素 = 辺



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

辺は $\{u, v\}$ を省略して uv と書くことも

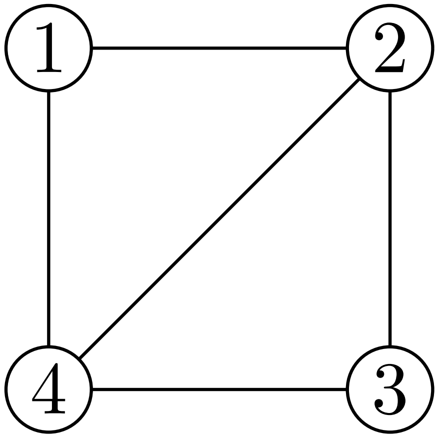
辺 $e = \{u, v\}$ を考えると

- 2 頂点 u, v は **隣接** する
- 辺 e は 2 頂点 u, v に **接続** する
- 2 頂点 u, v は辺 e の **端点** である

最大独立集合問題：定義 – 入力

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)

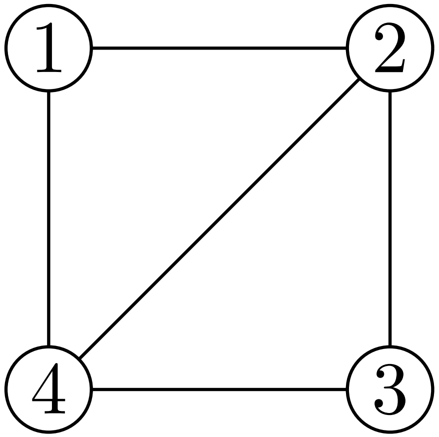
$\boxed{\text{入力}}$ 無向グラフ $G = (V, E)$



最大独立集合問題 (maximum independent set problem)

許容解　頂点の選択

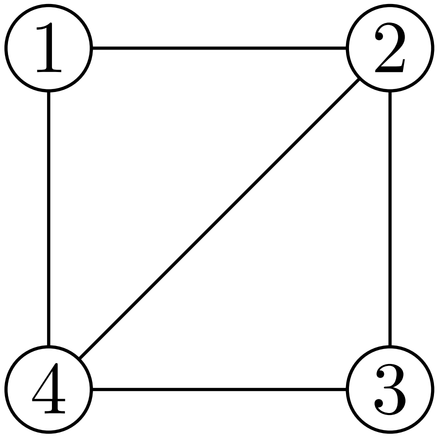
- ただし，選ばれた頂点同士は隣接しない



最大独立集合問題：定義 ― 目的

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)

目的　　選ばれた頂点の総数 の 最大化



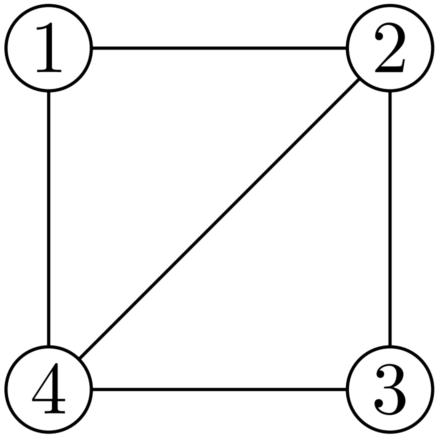
最大独立集合問題：定義

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)

入力　無向グラフ $G = (V, E)$

許容解　頂点の選択
- ただし，選ばれた頂点同士は隣接しない

目的　選ばれた頂点の総数 の 最大化



最大独立集合問題：目標

目標

最大独立集合問題を整数計画問題として書き表す

つまり，変数，制約，目的関数を定める

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

最大独立集合問題：変数

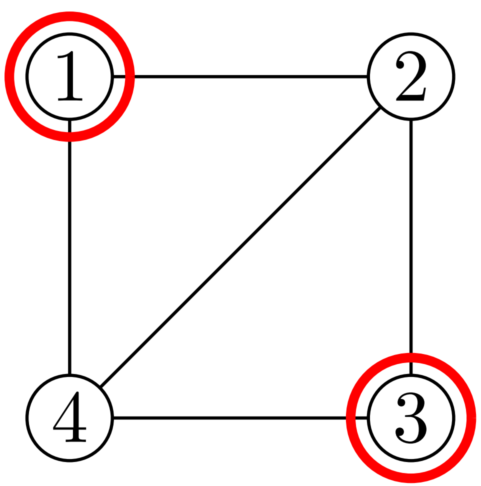
各頂点 $v \in V$ に対して，変数 $x_v \in \{0, 1\}$ を使用

解釈：

$$x_v = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \text{頂点 } v \text{ を選択する} \\ 0 & \Leftrightarrow \text{頂点 } v \text{ を選択しない} \end{cases}$$

有用なテクニック

01 変数で選択を表す

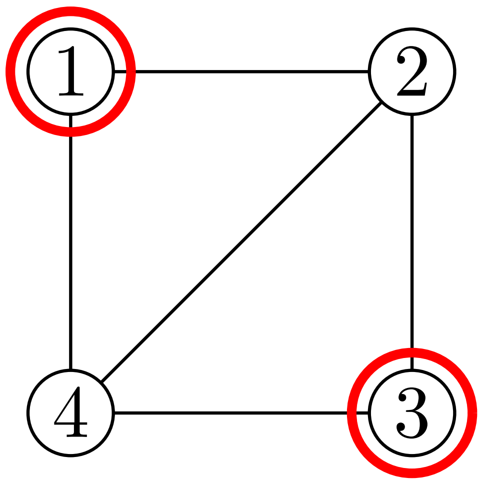


$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

最大独立集合問題：制約

各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，次の制約を課す

$$x_u + x_v \leq 1$$



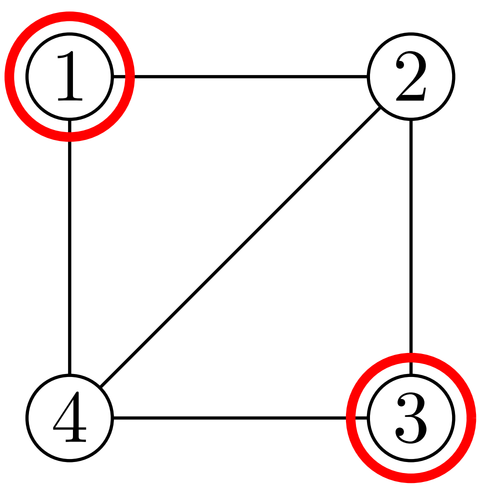
$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

x_u	x_v	$x_u + x_v$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

最大独立集合問題：制約

各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，次の制約を課す

$$x_u + x_v \leq 1$$



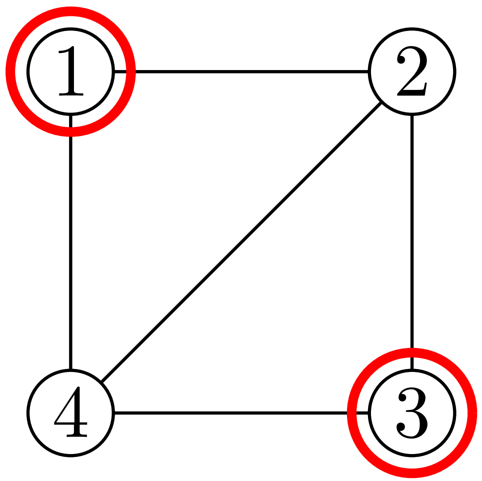
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & \quad x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_2 &= 0 & x_1 + x_4 &\leq 1, \\ x_3 &= 1 & x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_4 &= 0 & x_2 + x_4 &\leq 1, \\ & & x_3 + x_4 &\leq 1 \end{aligned}$$

最大独立集合問題：目的

選択された頂点の総数の最大化

$$\text{maximize} \quad \sum_{v \in V} x_v$$

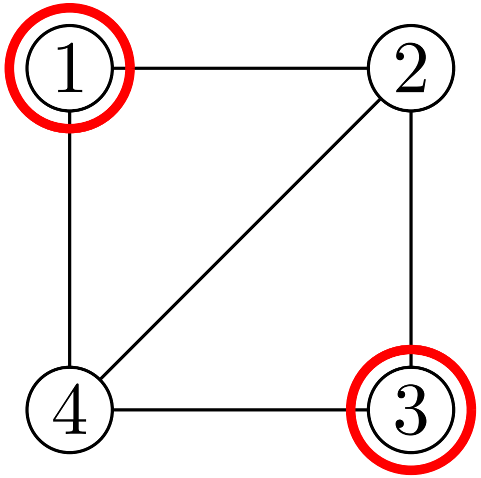
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$



$$x_1 = 1 \qquad x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_2 = 0 \qquad x_1 + x_4 \le 1,$$
$$x_3 = 1 \qquad x_2 + x_3 \le 1,$$
$$x_4 = 0 \qquad x_2 + x_4 \le 1,$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$

最大独立集合問題：01 整数計画モデル

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} x_v & \\
\text{subject to} & x_u + x_v \leq 1 & \forall \{u, v\} \in E \\
& x_v \in \{0, 1\} & \forall v \in V
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_4 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, \\
& x_2 + x_4 \leq 1, x_3 + x_4 \leq 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 $\longrightarrow$ 整数計画問題

モデリング

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

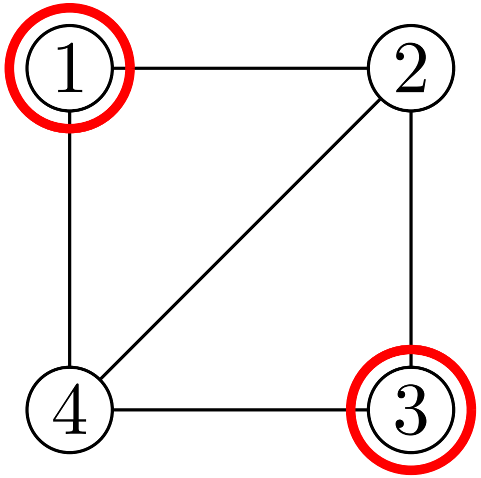
解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

最大独立集合問題：01 整数計画モデル

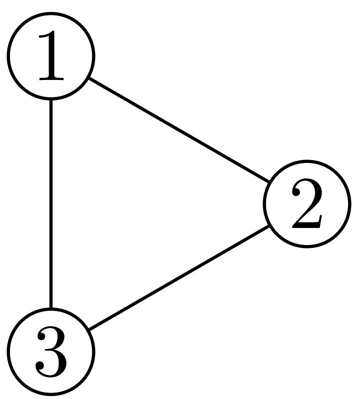
$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{subject to} \quad & x_u + x_v \le 1 \qquad \forall \{u, v\} \in E \\
& x_v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 1, x_1 + x_4 \le 1, x_2 + x_3 \le 1, \\
& x_2 + x_4 \le 1, x_3 + x_4 \le 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

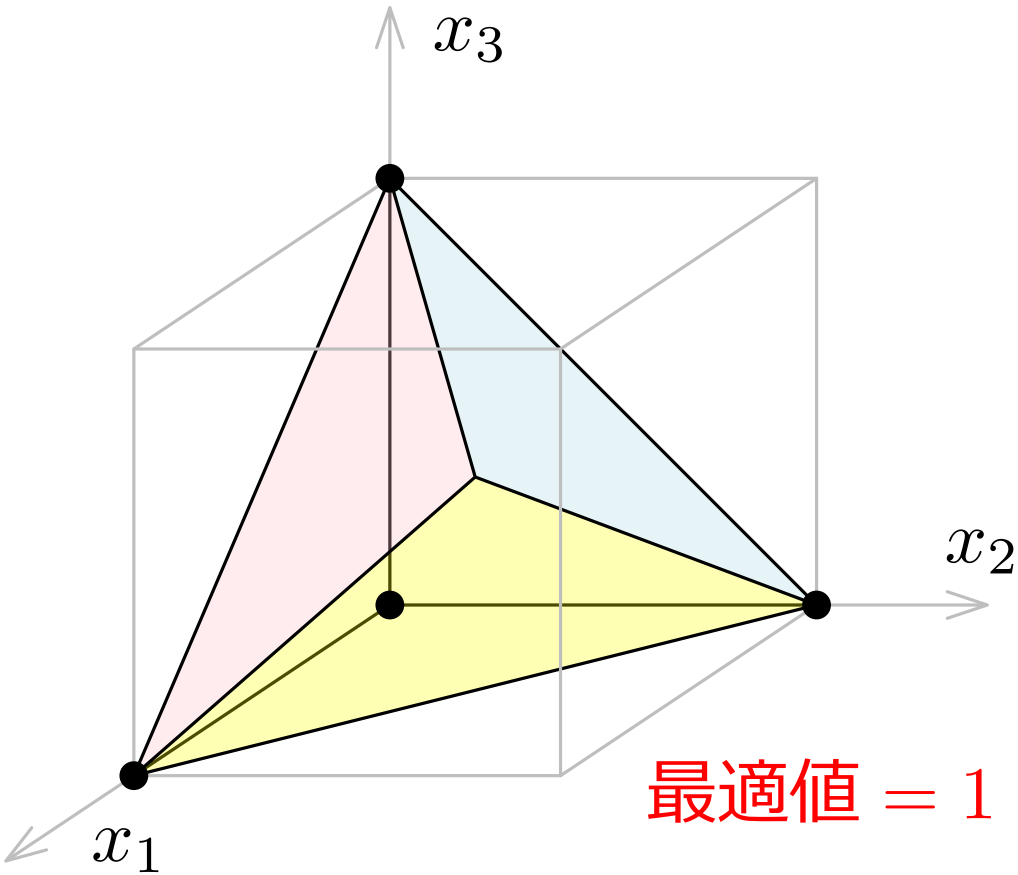
小さい例 (1)

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} x_v & \\ \text{subject to} & x_u + x_v \leq 1 & \forall \{u, v\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} & \forall v \in V \end{array}$$

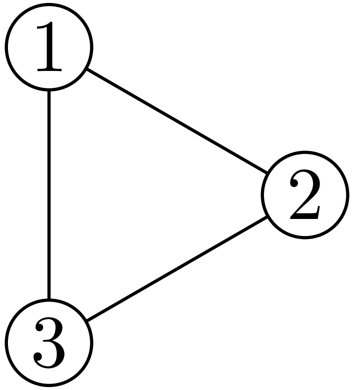


$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

小さい例 (2)



最適値 $= 1$

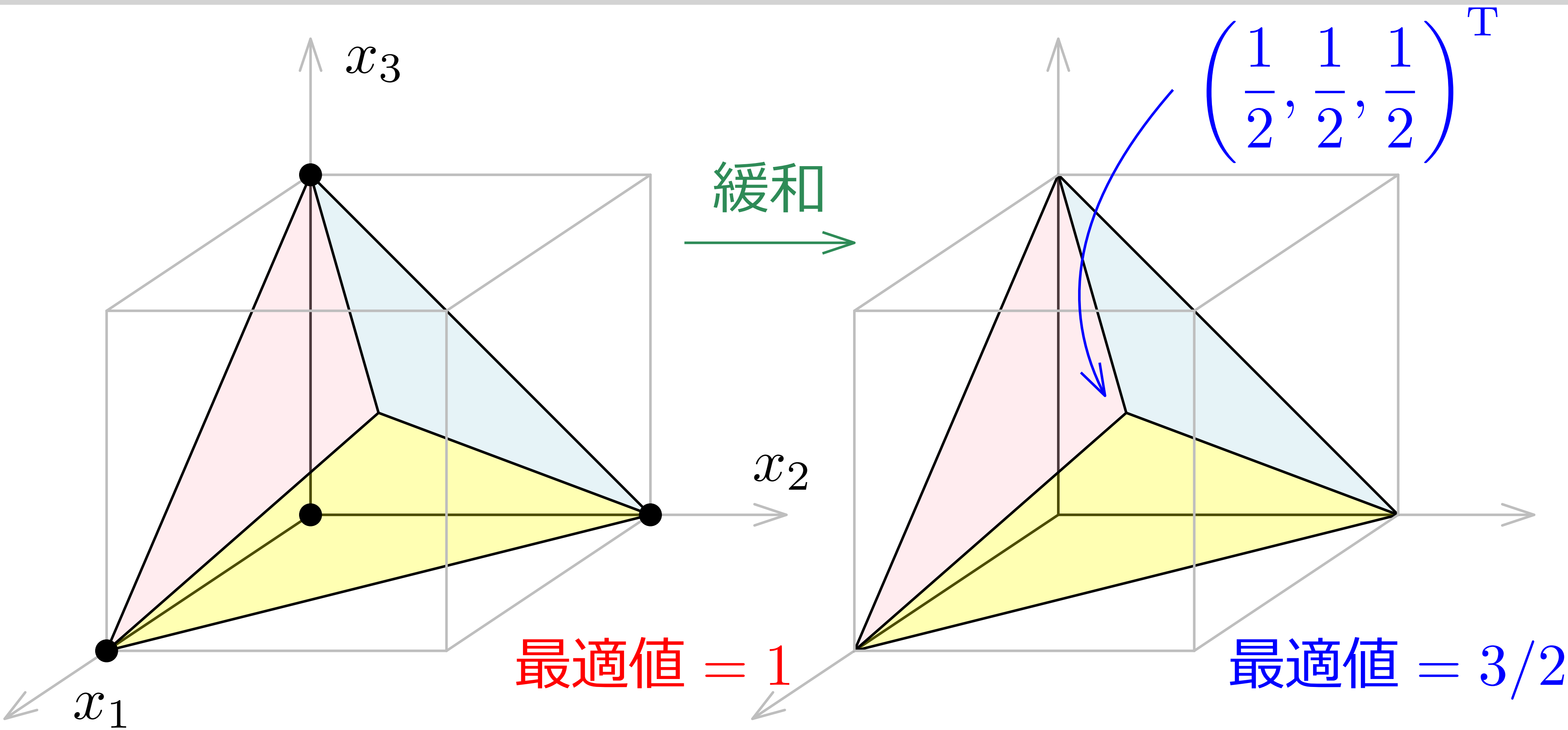


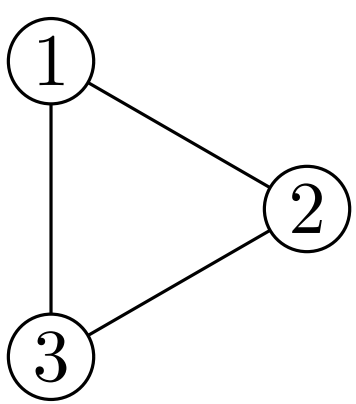
maximize $\quad x_1 + x_2 + x_3$

subject to $\quad x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1,$

$\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

小さい例 (3)



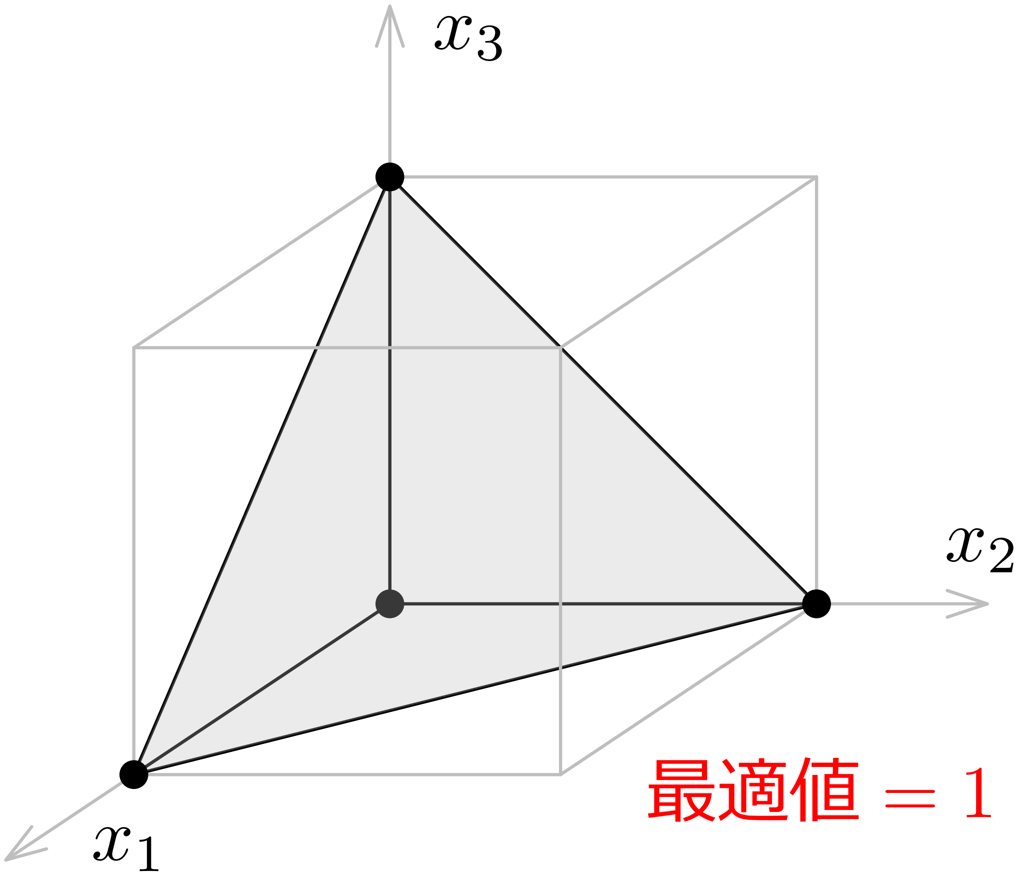


maximize $\quad x_1 + x_2 + x_3$

subject to $\quad x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1,$

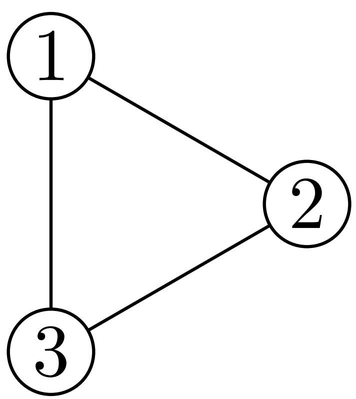
$\cancel{x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}}$ $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1$

小さい例 (4)



最適値 $= 1$

グラフから分かる



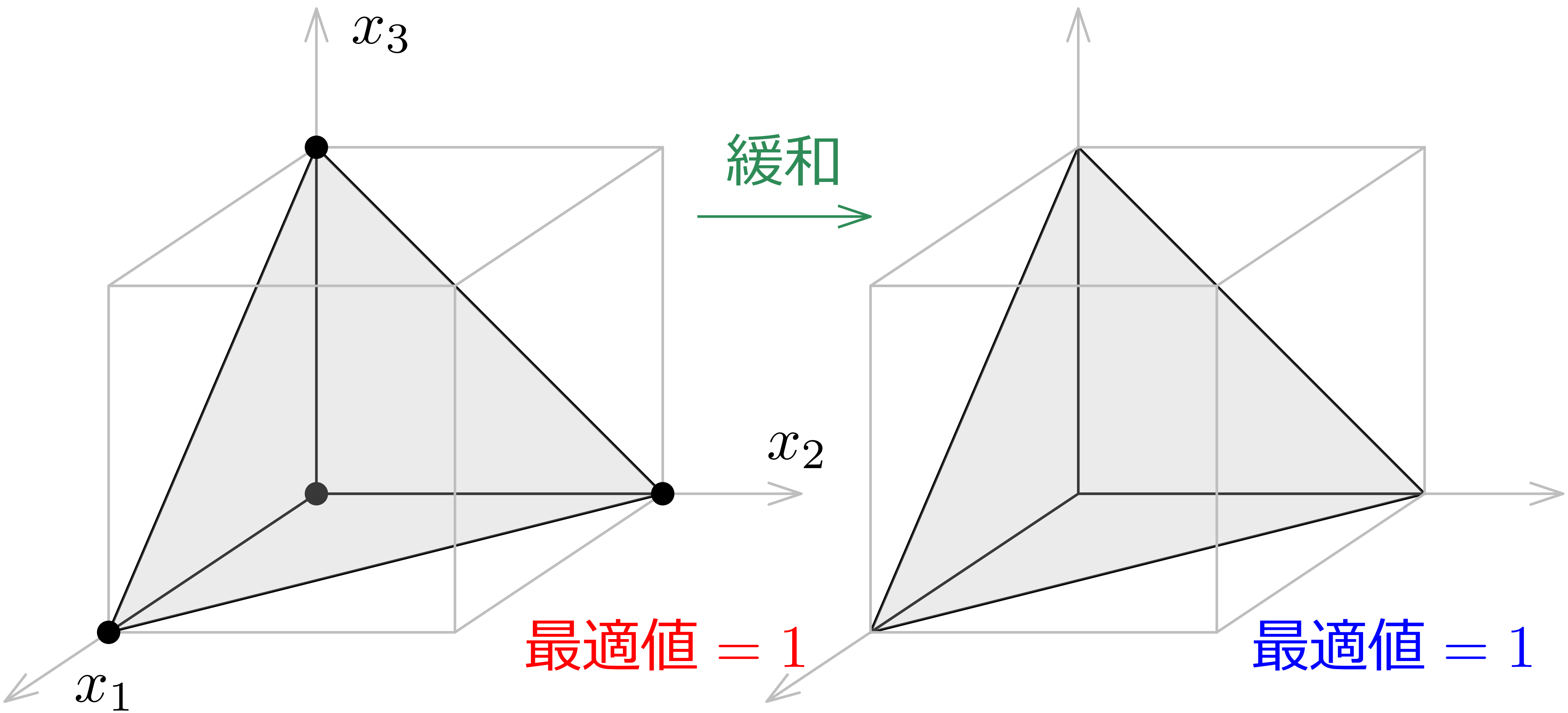
maximize $\quad x_1 + x_2 + x_3$

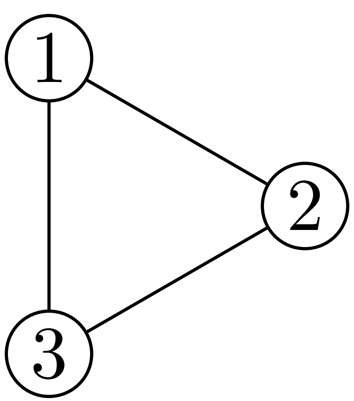
subject to $\quad x_1 + x_2 \le 1, x_1 + x_3 \le 1, x_2 + x_3 \le 1,$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 \le 1}$

小さい例 (5)





maximize $\quad x_1 + x_2 + x_3$

subject to $\quad x_1 + x_2 \le 1, x_1 + x_3 \le 1, x_2 + x_3 \le 1,$

$$\cancel{x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}} \quad 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$$

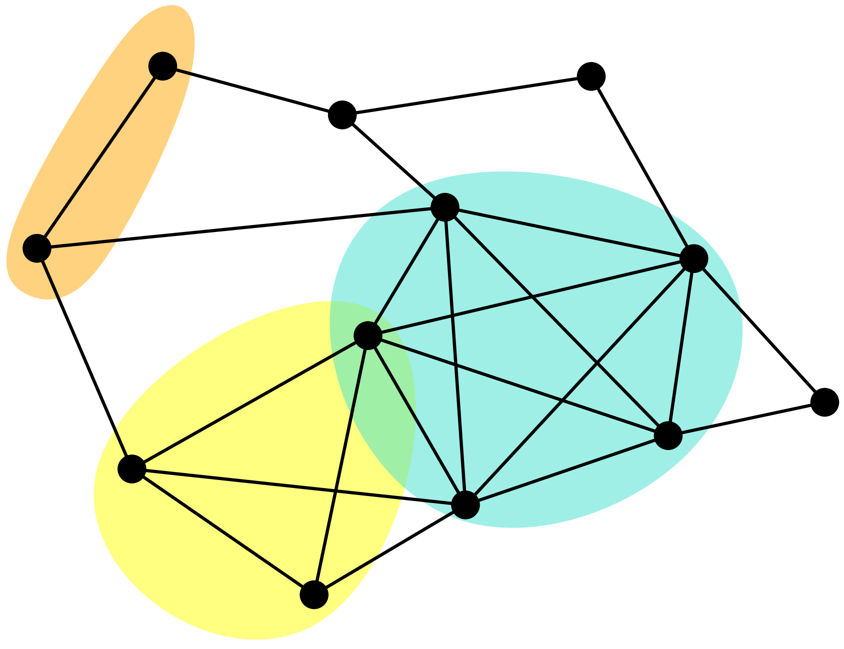
$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 \le 1}$$

クリーク

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：クリーク (clique)

頂点部分集合 $S \subseteq V$ が G の **クリーク** であるとは
S の任意の 2 頂点が隣接していること



最大独立集合問題では，
どのクリークからも
1 つしか頂点を選べない

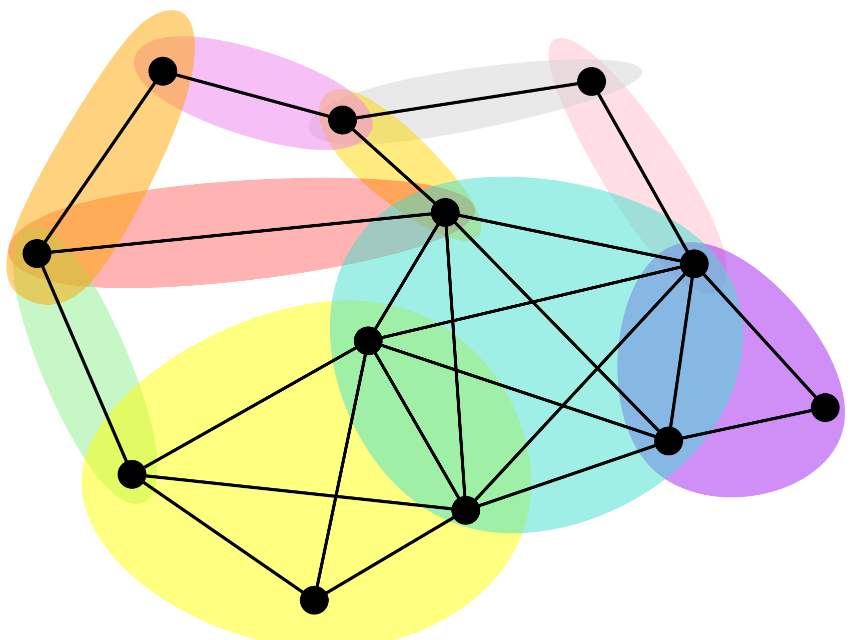
注：G の辺は G のクリークである

極大クリーク

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：極大クリーク (maximal clique)

頂点部分集合 $S \subseteq V$ が G の **極大クリーク** であるとは
それがクリークであり，他のクリークに含まれないこと



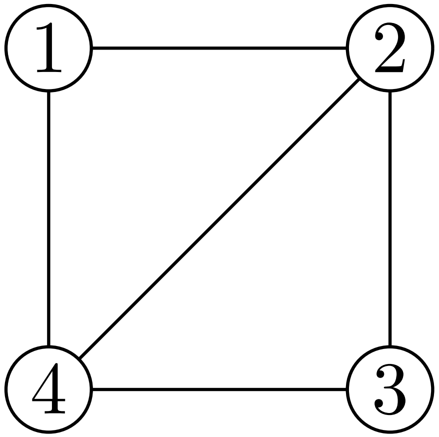
最大独立集合問題では，
極大クリークのみを考えれば
十分

注：G の辺は G のクリークである

最大独立集合問題：別のモデル

$\mathcal{C} = G$ の極大クリーク全体から成る集合

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} x_v & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in S} x_v \leq 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& x_v \in \{0, 1\} & \forall\, v \in V
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + x_4 \leq 1, x_2 + x_3 + x_4 \leq 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

最大独立集合問題：モデルの比較 (1)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \leq 1 \quad \forall\, uv \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in S} x_v \leq 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

許容領域 $=$ 許容領域

変数の総数

$|V|$ $\qquad$ $|V|$

不等式制約の総数

$|E|$ $\qquad$ $|\mathcal{C}|$

$|E|$ と $|\mathcal{C}|$ の比較

不等式制約の総数

$|E|$

$|\mathcal{C}|$

任意のグラフ $G = (V, E)$ に対して

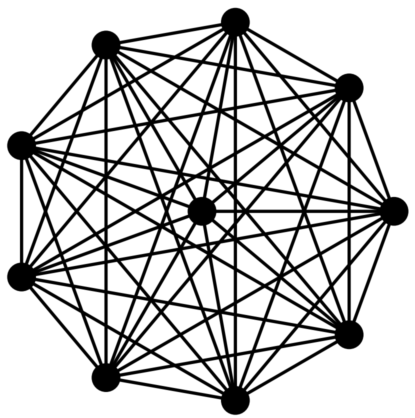
$$|E| \leq \binom{|V|}{2} \leq |V|^2$$

$$|\mathcal{C}| \leq 3^{|V|/3} \leq 1.443^{|V|}$$

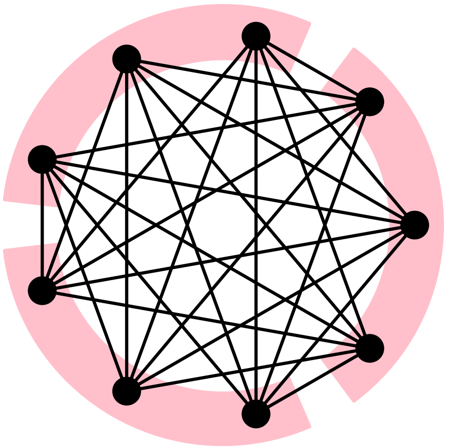
Miller, Muller (1960)

Moon, Moser (1965)

等号を満たすグラフが存在



等号を満たすグラフが存在



$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \leq 1 \ \ \forall\, uv \in E \\ & x_v \in \{0,1\} \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in S} x_v \leq 1 \ \ \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_v \in \{0,1\} \ \forall\, v \in V \end{aligned}$$

許容領域 $=$ 許容領域

変数の総数

$|V|$ $\qquad$ $|V|$

不等式制約の総数

$|E| \leq \binom{|V|}{2}$ $\qquad$ $|\mathcal{C}| \leq 3^{|V|/3}$

最大独立集合問題：モデルの比較 (2)

線形計画緩和

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \leq 1 \quad \forall\, uv \in E \\
& 0 \leq x_v \leq 1 \qquad \forall\, v \in V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{v \in S} x_v \leq 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& 0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall\, v \in V
\end{aligned}
$$

許容領域 $\supseteq$ 許容領域

良い整数計画モデルの判断材料 (2) (前回の講義)

整数計画問題が同じ許容領域を持つならば

- 線形計画緩和の許容領域が小さい方が良い

線形計画緩和

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \le 1 \quad \forall\, uv \in E \\ & 0 \le x_v \le 1 \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v\in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v\in S} x_v \le 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & 0 \le x_v \le 1 \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

許容領域 $\supseteq$ 許容領域

証明： 右の許容解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^V$ を考える

任意の辺 $\{u, v\} \in E$ を考える

ある極大クリーク $S \in \mathcal{C}$ が存在して，$\{u, v\} \subseteq S$

このとき，$x_u + x_v \le \sum_{w\in S} x_w \le 1$

$\{u, v\} \subseteq S$ と $x_w \ge 0\ (\forall\, w \in V)$

したがって，$\boldsymbol{x}$ は左の許容解 □

最大独立集合問題：モデルの比較

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \leq 1 \quad \forall\, uv \in E \\ & x_v \in \{0,1\} \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in S} x_v \leq 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_v \in \{0,1\} \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

不等式制約の総数

少ない　　　多い

線形計画緩和の許容領域

広い　　　狭い

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 —モデリング→ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

今日の内容

- ナップサック問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題の整数計画モデル
- 最大独立集合問題に対する別の整数計画モデル
- ナップサック問題に対する別の整数計画モデル

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

アイテム集合：N

n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

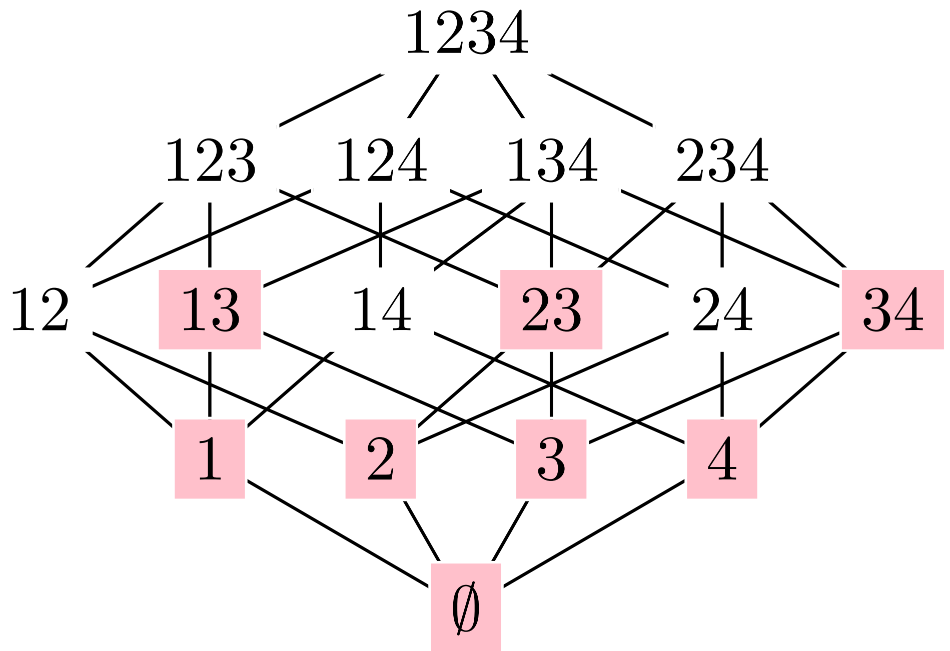
ナップサック問題：許容解の集合

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

許容解全体の集合 $= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$



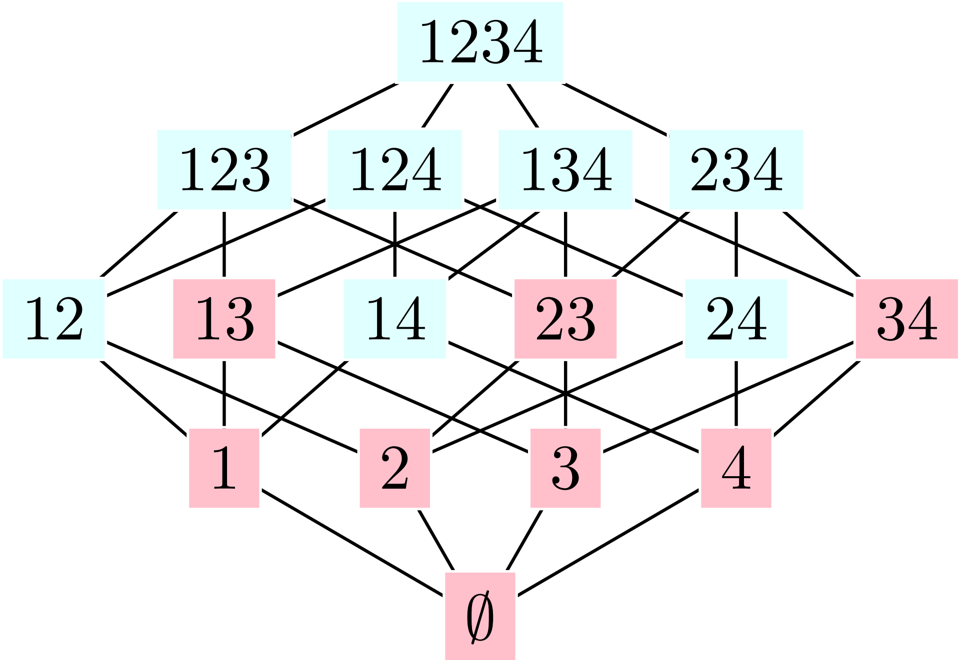
ナップサック問題：被覆

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

被覆全体の集合 $= \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}$
$\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$



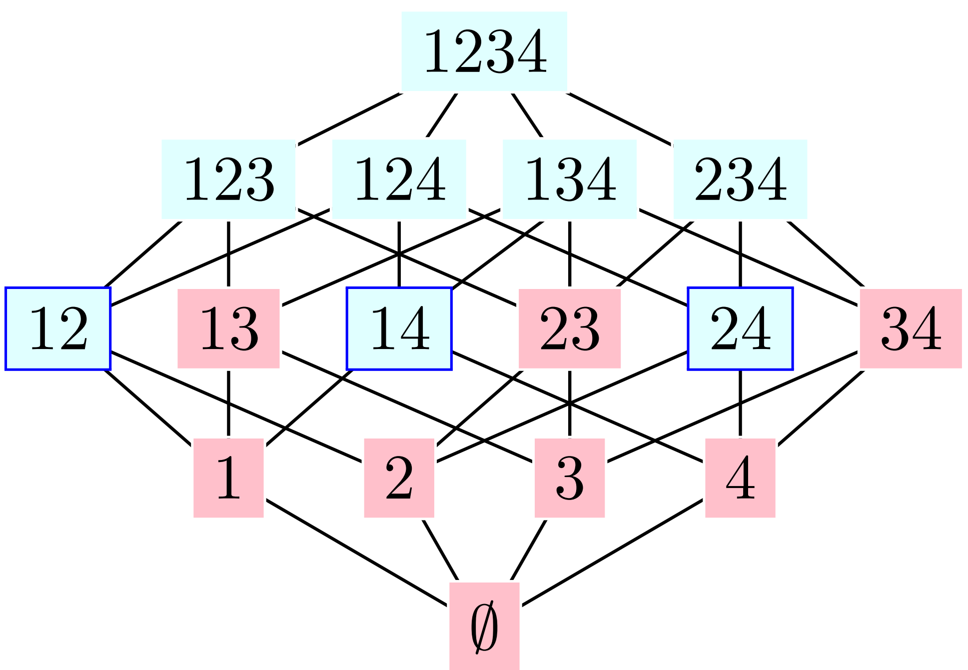
ナップサック問題：極小被覆

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

極小被覆全体の集合 $= \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\}\}$



定義：被覆 (cover)

アイテムの集合 $S \subseteq N$ が **被覆** であるとは，
$\displaystyle\sum_{i \in S} w_i > B$ を満たすこと

定義：極小被覆 (minimal cover)

被覆 $S \subseteq N$ が **極小被覆** であるとは，
任意の $j \in S$ に対して，$\displaystyle\sum_{i \in S - \{j\}} w_i \leq B$ を満たすこと

アイテム集合：N

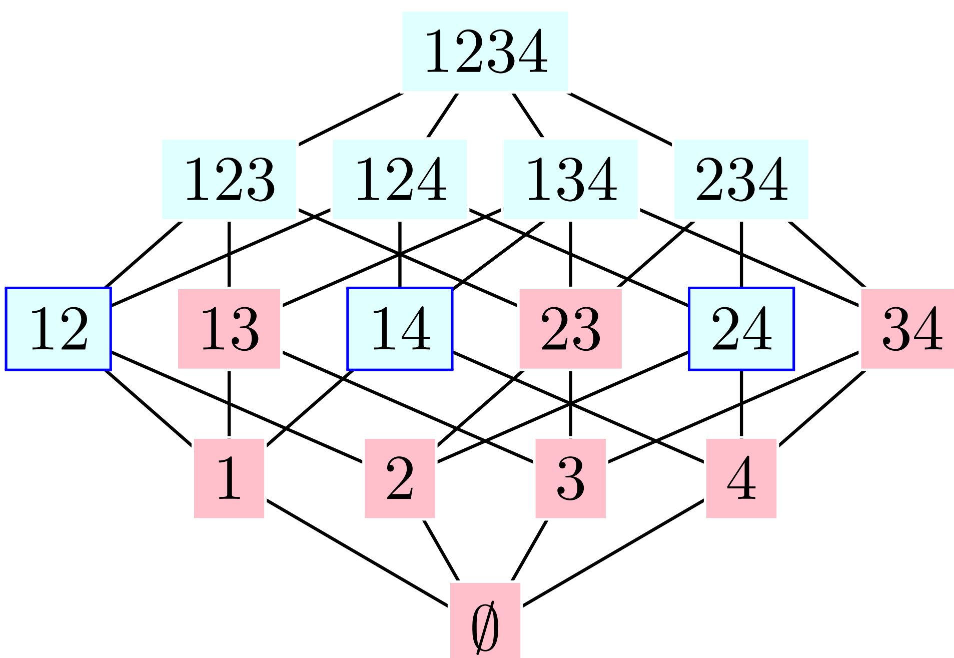
n 個の商品

商品	1	2	3	4
収入	p_1	p_2	p_3	p_4
重さ	w_1	w_2	w_3	w_4

ナップサックの重量制限：B

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 & \forall\, S \in \underline{\mathcal{C}} \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N
\end{array}
$$

極小被覆全体の集合



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_1 + x_4 &\le 1 \\
x_2 + x_4 &\le 1
\end{aligned}
$$

ナップサック問題：モデルの比較 (1)

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \le B \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

許容領域

=

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 \qquad \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

許容領域

ナップサック問題：モデルの比較 (1)

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i\in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in N} w_i x_i \le B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i\in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in S} x_i \le |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\subseteq$ の証明： $\boldsymbol{x}$ を左の許容解とする

S を極小被覆とすると $\displaystyle\sum_{i\in S} w_i > B$

ナップサック問題：モデルの比較 (1)

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \le B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\subseteq$ の証明： $\boldsymbol{x}$ を左の許容解とする

S を極小被覆とすると $\displaystyle\sum_{i \in S} w_i > B$

$$\therefore \sum_{i \in S} w_i x_i \le \sum_{i \in N} w_i x_i \le B < \sum_{i \in S} w_i$$

ナップサック問題：モデルの比較 (1)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\subseteq$ の証明： $\boldsymbol{x}$ を左の許容解とする

S を極小被覆とすると $\displaystyle\sum_{i \in S} w_i > B$

$$\therefore \sum_{i \in S} w_i x_i \leq \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B < \sum_{i \in S} w_i$$

$\therefore$ ある $j \in S$ に対して，$x_j = 0$

ナップサック問題：モデルの比較 (1)

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域　＝　許容領域

$\subseteq$ の証明： $\boldsymbol{x}$ を左の許容解とする

S を極小被覆とすると $\sum_{i \in S} w_i > B$

$$\therefore \sum_{i \in S} w_i x_i \leq \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B < \sum_{i \in S} w_i$$

$\therefore$ ある $j \in S$ に対して， $x_j = 0$ $\quad \therefore \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1$ $\quad \square$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \leq B & \\ & x_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$	$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \leq \lvert S \rvert - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\supseteq$ の証明：$\boldsymbol{x}$ を右の許容解とし，$I = \{i \in N \mid x_i = 1\}$ とする

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in N} w_i x_i \le B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\supseteq$ の証明：$\boldsymbol{x}$ を右の許容解とし，$I = \{i \in N \mid x_i = 1\}$ とする

$\sum_{i \in N} w_i x_i > B$ と仮定 (つまり，$\sum_{i \in I} w_i > B$)

ナップサック問題：モデルの比較 (1) 続

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

許容領域 $=$ 許容領域

<u>$\supseteq$ の証明</u>：$\boldsymbol{x}$ を右の許容解とし，$I = \{i \in N \mid x_i = 1\}$ とする

$\sum_{i \in N} w_i x_i > B$ と仮定 (つまり，$\sum_{i \in I} w_i > B$)

$\therefore I$ は被覆．よって，ある極小被覆 S が存在して，$S \subseteq I$

ナップサック問題：モデルの比較 (1) 続

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \leq B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

$\underline{\supseteq \text{の証明}}$：$\boldsymbol{x}$ を右の許容解とし，$I = \{i \in N \mid x_i = 1\}$ とする

$\displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i > B$ と仮定 (つまり，$\displaystyle\sum_{i \in I} w_i > B$)

$\therefore I$ は被覆．よって，ある極小被覆 S が存在して，$S \subseteq I$

$$\therefore |S| \underset{\substack{\uparrow \\ S \subseteq I}}{=} \sum_{i \in S} x_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{右の許容性}}}{\leq} |S| - 1 \;\lightning \qquad \square$$

ナップサック問題：モデルの比較 (2)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \le B \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

許容領域 $=$ 許容領域

変数の総数

$|N|$ $|N|$

不等式制約の総数

1 $|\mathcal{C}|$

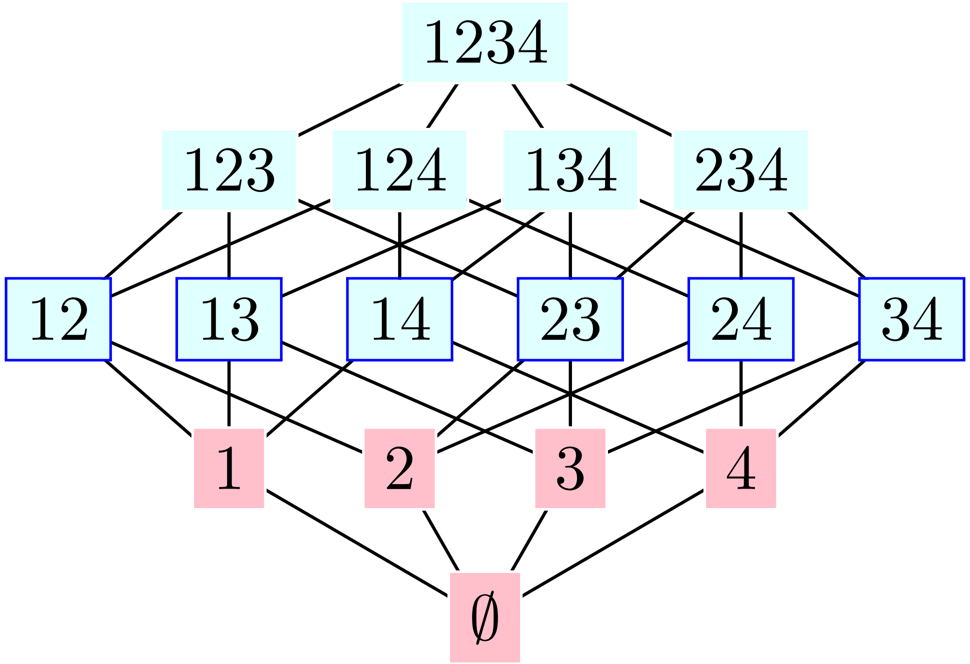
極小被覆の総数

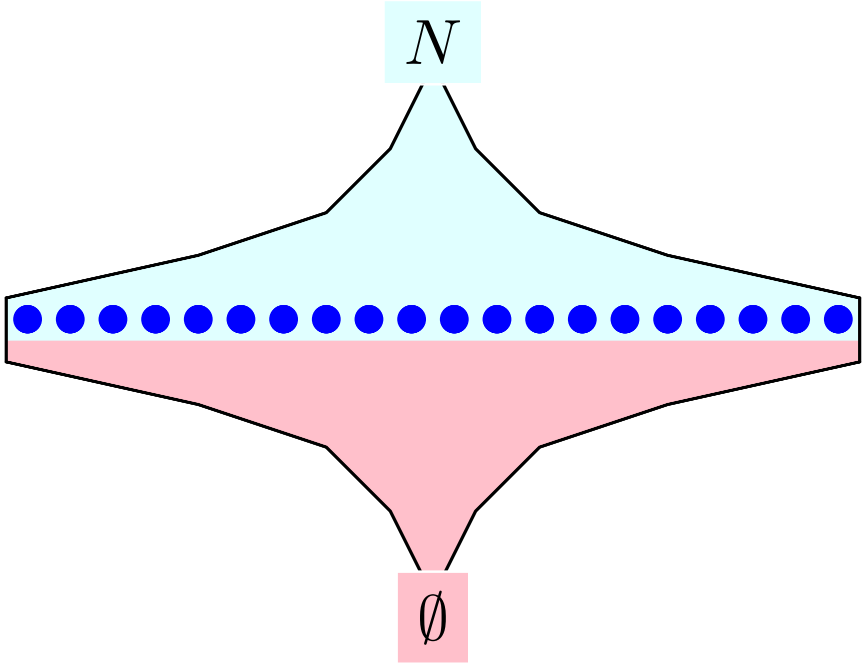
$$\text{極小被覆の総数} \le \binom{|N|}{\lfloor |N|/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

Sperner (1928)

極値組合せ論における
有名な定理

等号を満たす場合が存在





極小被覆の総数 (続)

$$\text{極小被覆の総数} \leq \binom{|N|}{\lfloor |N|/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

Sperner (1928)

極値組合せ論における
有名な定理

等号を満たす場合が存在

n 個の商品

商品	1	2	$\cdots$	n
収入	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
重さ	1	1	$\cdots$	1

ナップサックの重量制限：$B = \lfloor n/2 \rfloor - 1$

$$S \text{ が極小被覆} \quad \Leftrightarrow \quad |S| = \lfloor n/2 \rfloor$$

ナップサック問題：モデルの比較 (2) 続

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \leq B & \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $=$ 許容領域

変数の総数

$|N|$ 　　 $|N|$

不等式制約の総数

1 　　 $|\mathcal{C}| \leq \binom{|V|}{|V|/2}$

線形計画緩和

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \le B \\
& 0 \le x_i \le 1 \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \le |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& 0 \le x_i \le 1 \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

許容領域 $\leftarrow$ 関係？ $\rightarrow$ 許容領域

ナップサック問題：モデルの比較 (3)

線形計画緩和

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

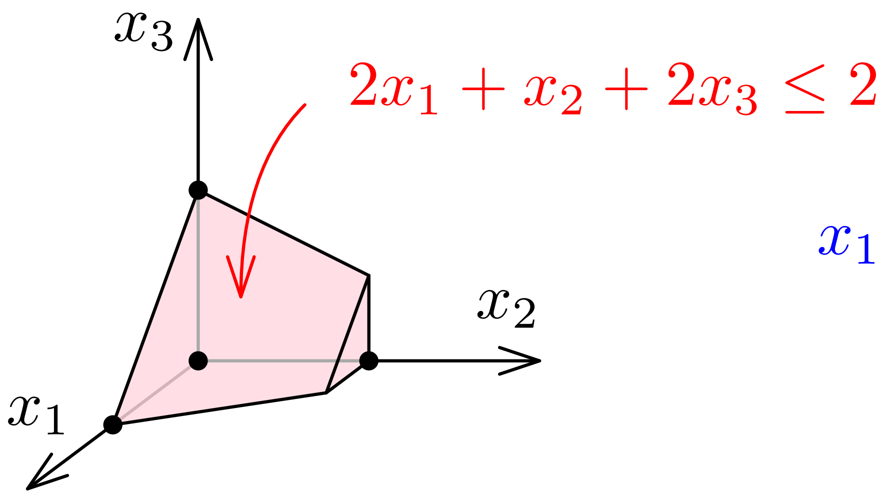
$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

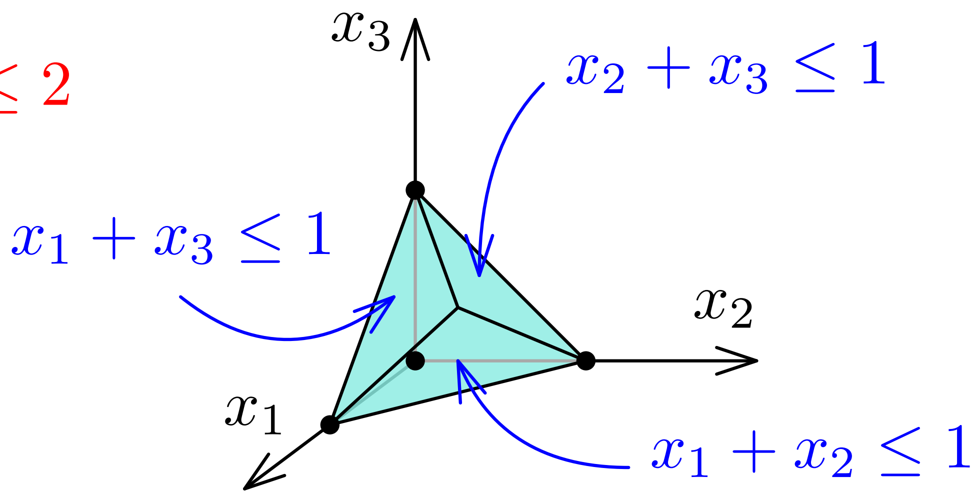
許容領域　　$\leftarrow$ 関係？ $\rightarrow$　　許容領域

商品	1	2	3
重さ	2	1	2

ナップサックの重量制限：$B = 2$

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$





ナップサック問題：モデルの比較 (3)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in N
\end{array}
$$

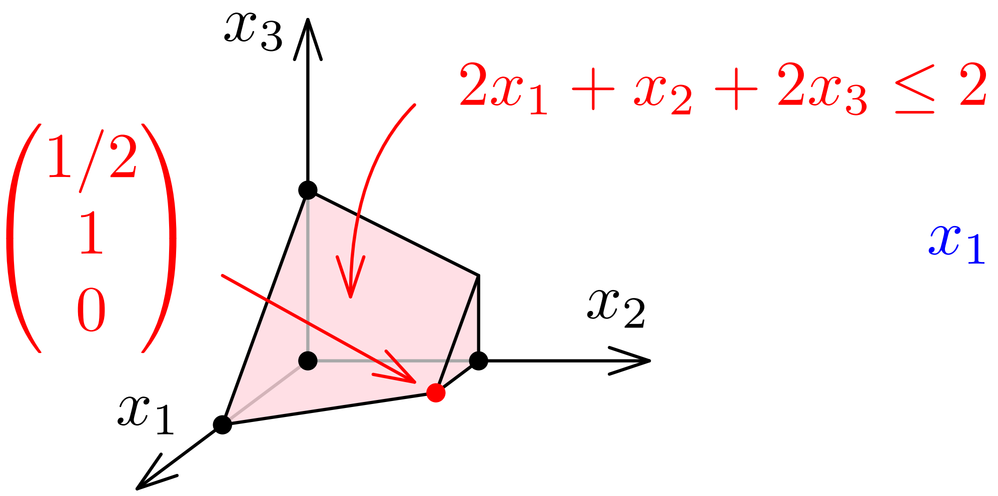
$$
\begin{array}{lll}
\text{max.} & \displaystyle\sum_{i \in N} p_i x_i & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& 0 \leq x_i \leq 1 & \forall\, i \in N
\end{array}
$$

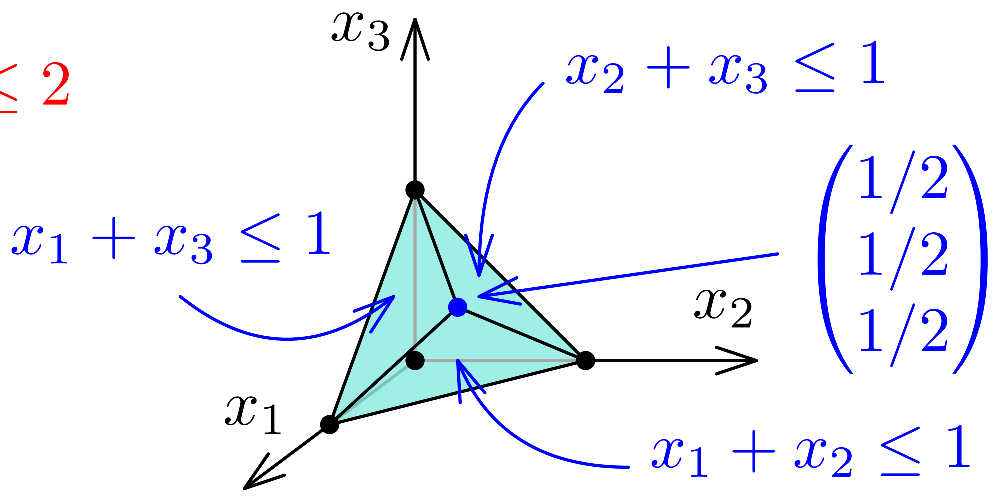
許容領域 ← 関係？ → 許容領域

商品	1	2	3
重さ	2	1	2

ナップサックの重量制限：$B = 2$

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$





線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in N \end{array}$$

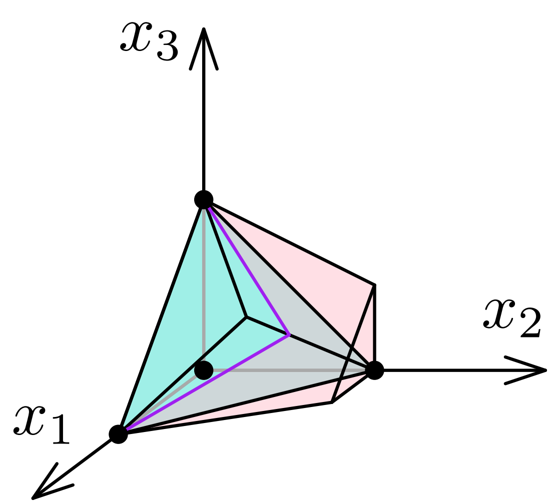
$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \sum_{i \in N} p_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 & \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall\, i \in N \end{array}$$

許容領域 $\leftarrow$ 関係？ $\rightarrow$ 許容領域

商品	1	2	3
重さ	2	1	2

ナップサックの重量制限：$B = 2$

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$



ナップサック問題：モデルの比較

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N
\end{aligned}
$$

不等式制約の総数

少ない　　　　多い

線形計画緩和の許容領域

包含関係はない　　　　包含関係はない

極小被覆：なぜ考えるのか？

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i \in N} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq B \\ & \sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \in \mathcal{C} \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in N \end{aligned}$$

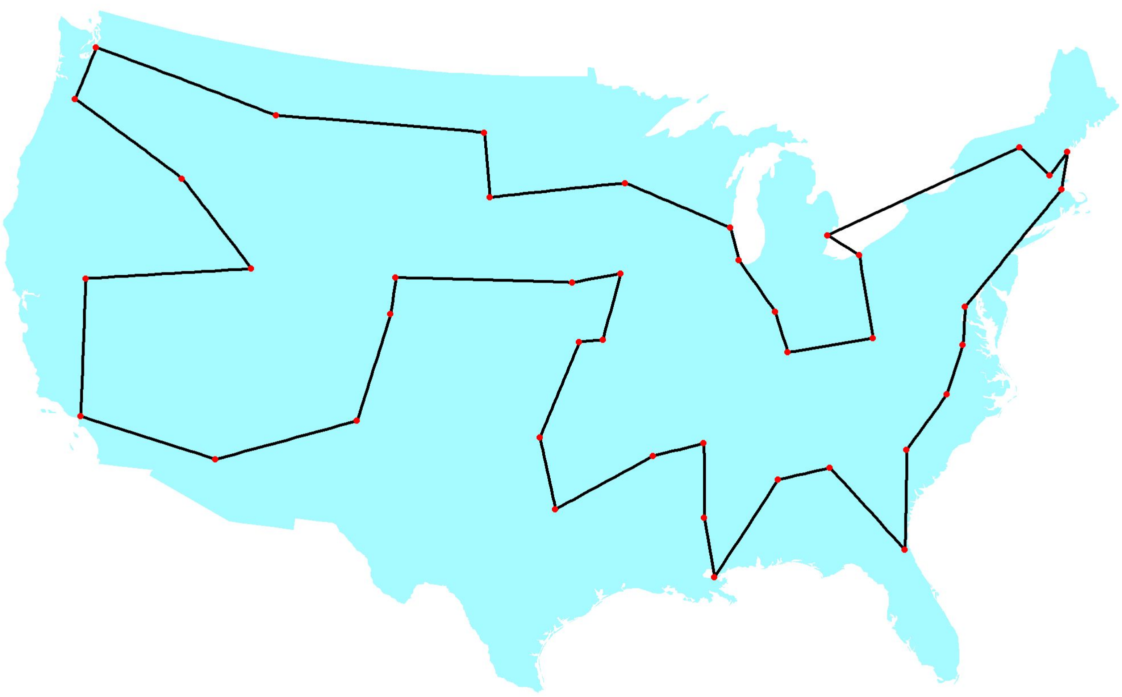
- 極小被覆は同種の「充填型問題」に広く使える
- $\mathcal{C}$ の要素は適応的に追加してもよい
  $\rightsquigarrow$ 第 10 回講義

次回予告

次回の内容

より複雑な問題の整数計画モデリングの例

- 巡回セールスマン問題，ビンパッキング問題
- 整数計画モデルの比較



https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/pictorial/dfj.html