離散最適化基礎論

第 4 回

線形計画緩和

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 11 月 1 日

最終更新：2022 年 11 月 8 日　09:30

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

＊ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

∗ 休み (国内出張) (12/27)

∗ 休み (冬季休業) (1/3)

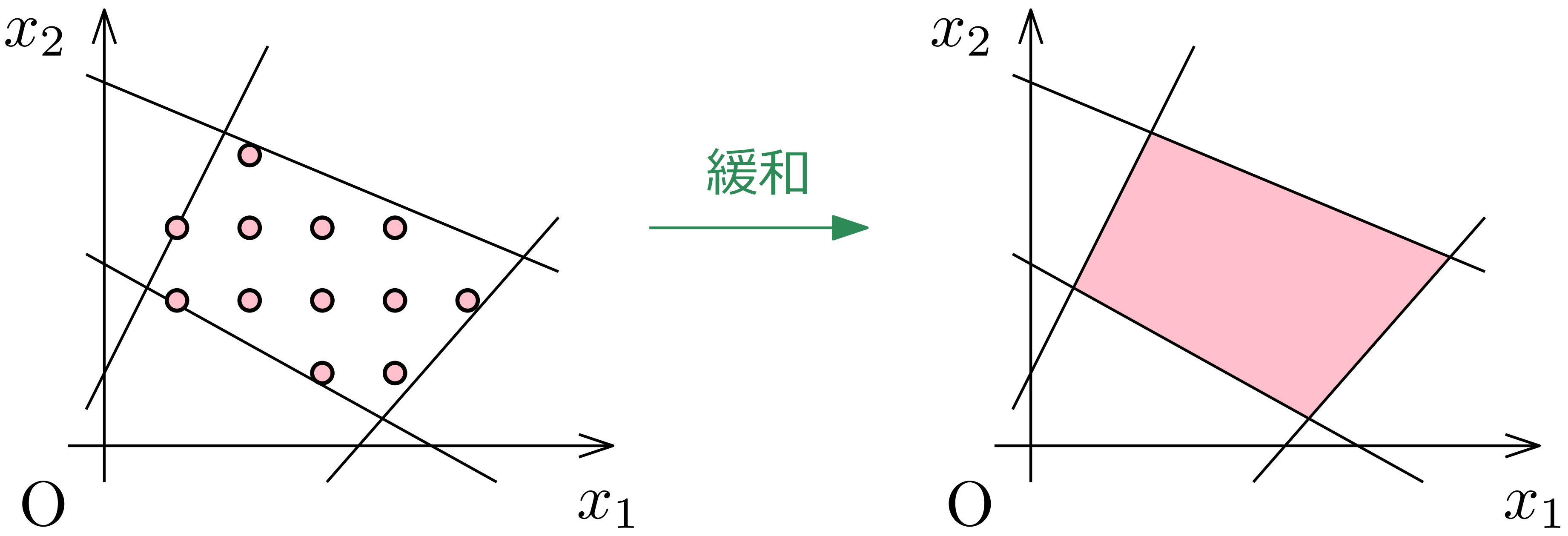
12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

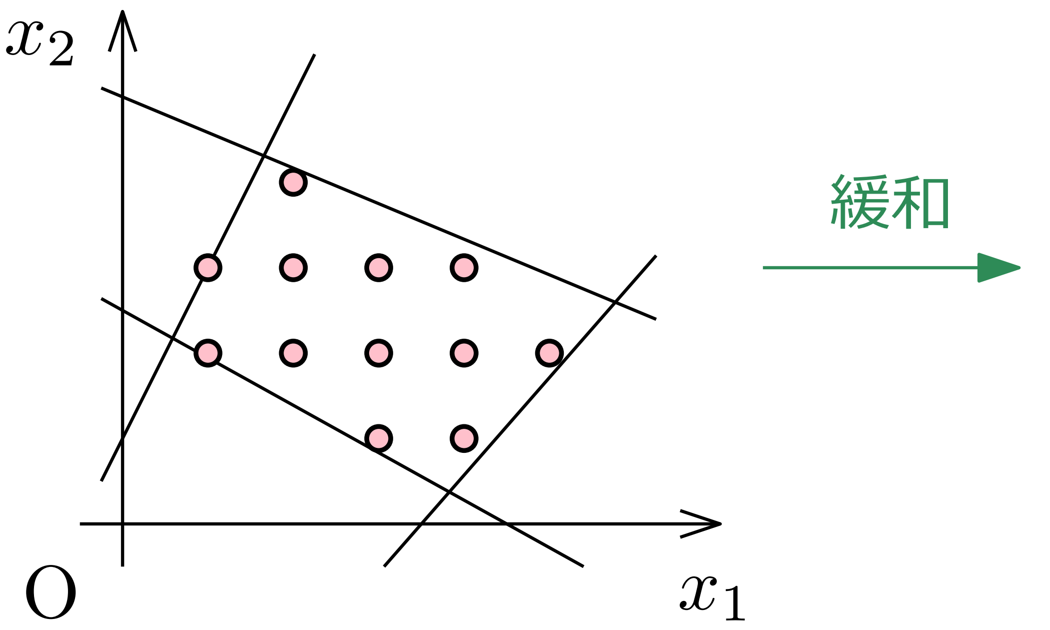
今日の内容

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)



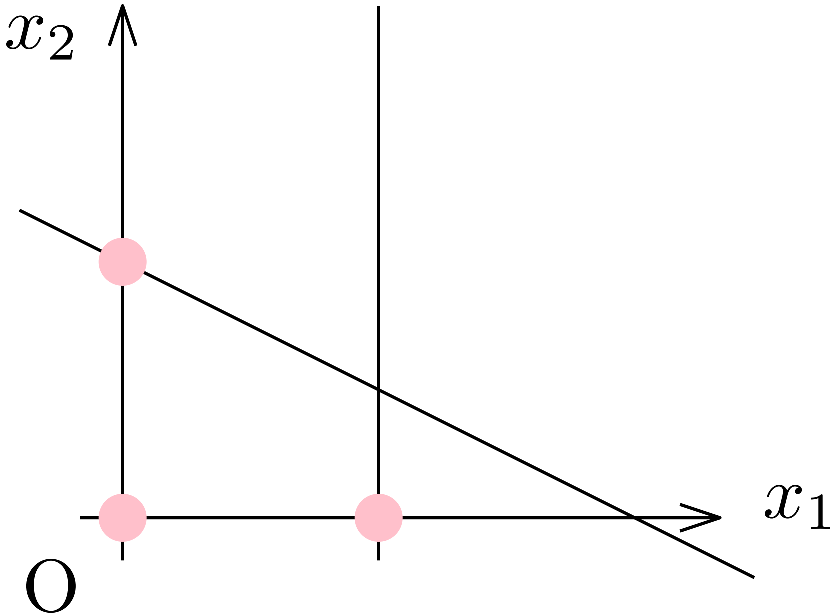
今日の内容

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)



整数計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \leq 1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



線形計画緩和：例

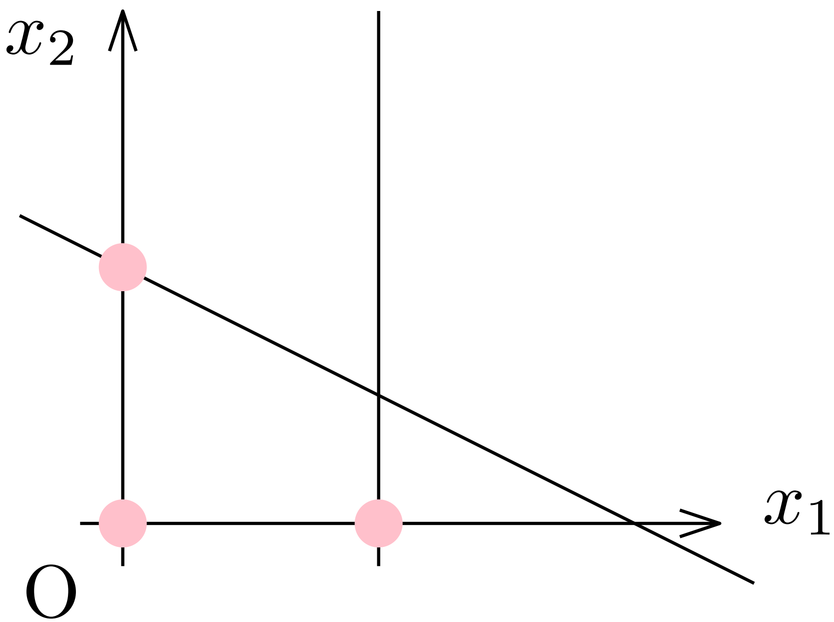
整数計画問題

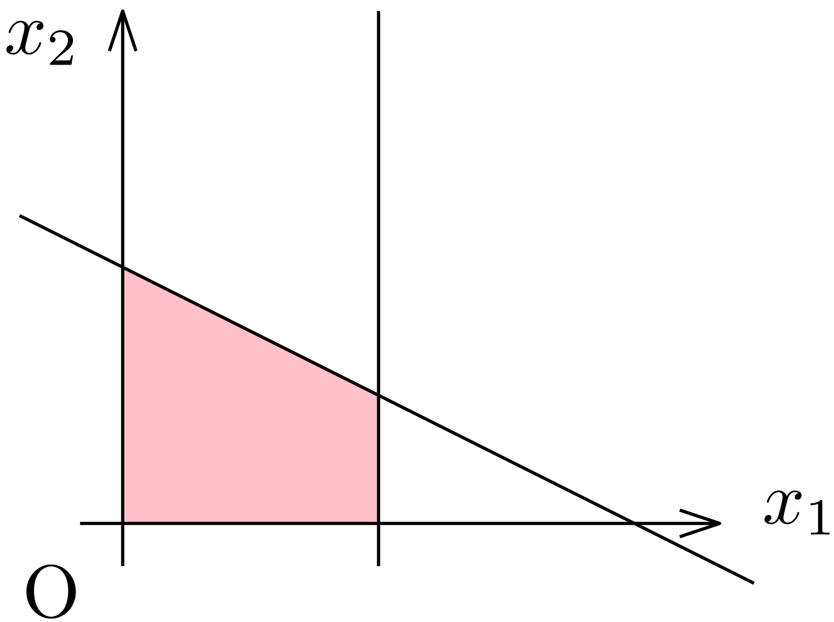
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

緩和 $\longrightarrow$

線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$





線形計画緩和：定義

定義：線形計画緩和 (linear programming relaxation)

整数計画問題 P の **線形計画緩和** とは,
P の整数制約を取り除くことで得られる線形計画問題

整数計画問題 P

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の **線形計画緩和**

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

01 整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

01 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array}$$

$$\|$$

整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

01 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \quad \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n
\end{array}
$$

$$||$$

整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \quad \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}, \\
& \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

01 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array} \xrightarrow{\text{緩和}} \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

$$\|$$

整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

01 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n
\end{array}
$$

$$\|$$

整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

01 整数計画問題の線形計画緩和 (続)

01 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \end{array} \quad \xrightarrow{\text{緩和}} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1} \end{array}$$

$$\|$$

整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

今日の内容

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{緩和}}$$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

今日の内容

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

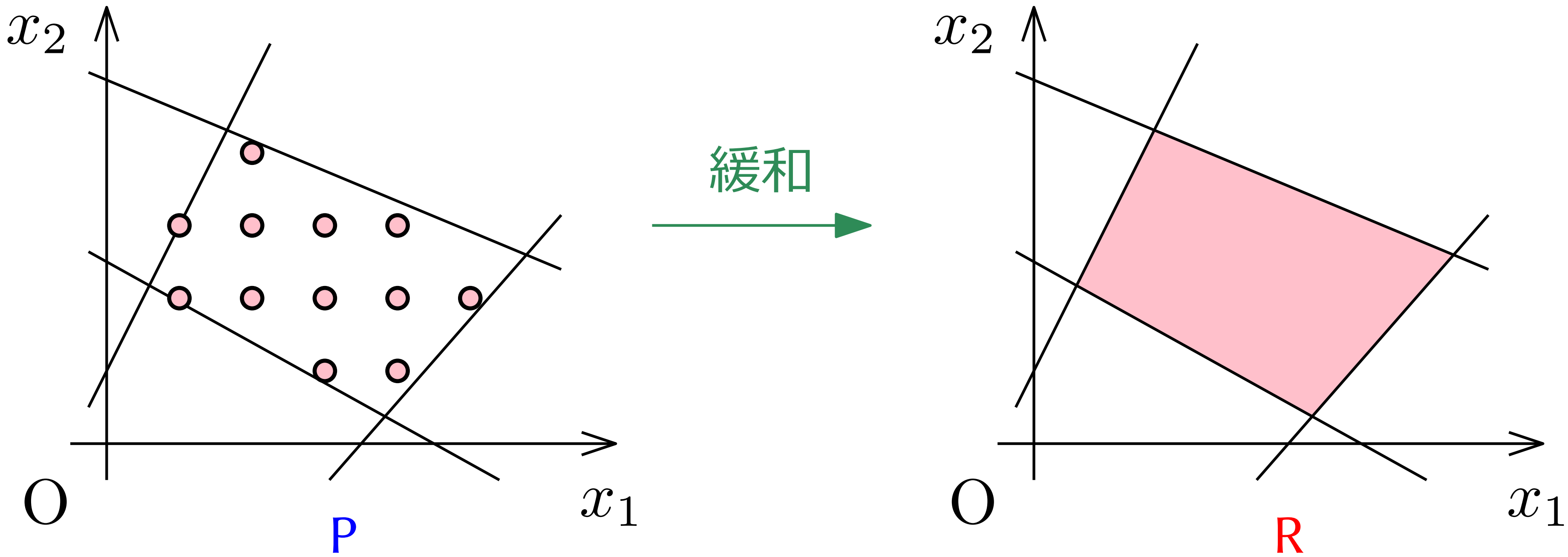
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

許容領域の比較

線形計画緩和の性質 1

整数計画問題 P の許容領域 $\subseteq$ 線形計画緩和 R の許容領域



特に， R が非許容 $\Rightarrow$ P が非許容
P が非有界 $\Rightarrow$ R が非有界

許容領域の比較：あり得るパターン

P の線形計画緩和 R

整数計画問題 P	最適解存在	非有界	非許容
最適解存在	○	○	×
非有界	×	○	×
非許容	○	○	○

特に， R が非許容 $\Rightarrow$ P が非許容

P が非有界 $\Rightarrow$ R が非有界

整数計画問題を解くとは？

定義：整数計画問題を解く とは？

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を与えて,
それらが定める整数計画問題が次のどれか判定する

- 最適解が存在
- 非有界
- 非許容

そして, 最適解が存在するとき, 最適解を **1 つ**求めること

最適値の比較

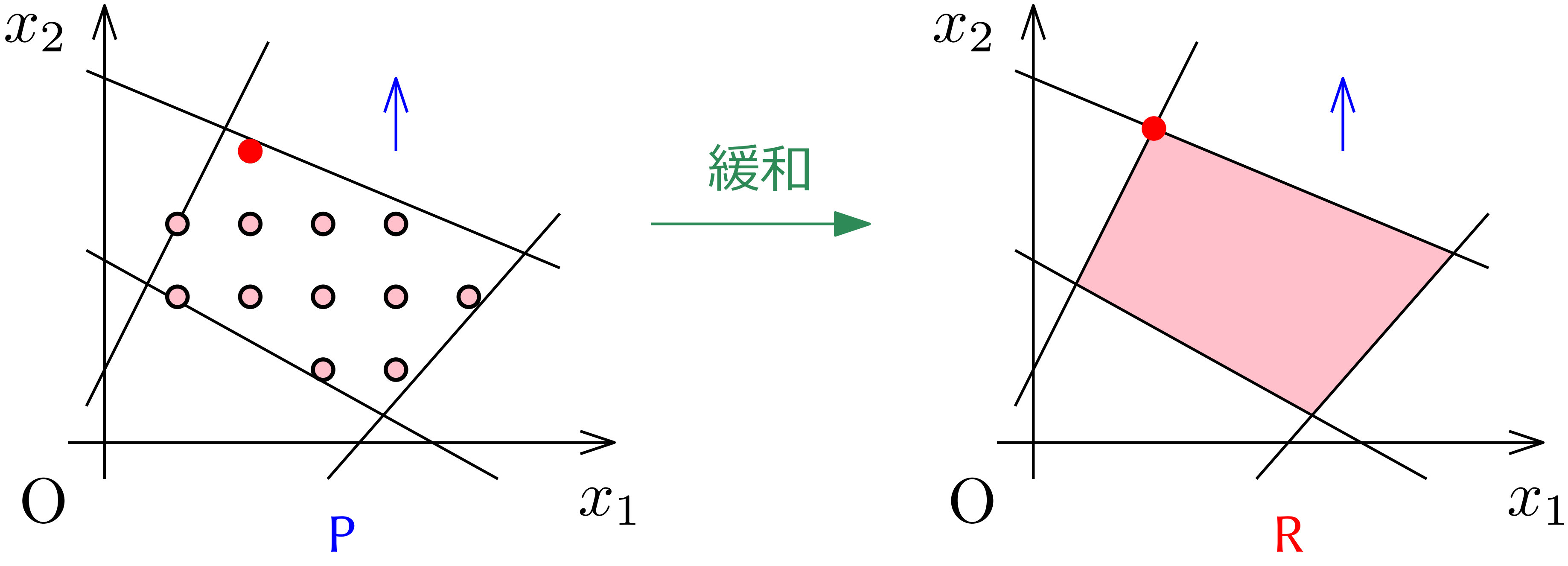
線形計画緩和の性質 1

整数計画問題 P の許容領域 $\subseteq$ 線形計画緩和 R の許容領域

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する $\Rightarrow$

P の最適値 $\geq$ R の最適値



最適値の比較：使い方

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

目的関数値 30 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

最適値の比較：使い方

線形計画緩和の性質１：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 30 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

R の最適値 $= 27$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

最適値の比較：使い方

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 30 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

R の最適値 $= 27$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

$\therefore$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $-$ P の最適値 $\leq 30 - $ R の最適値 $= 3$

最適値の比較：使い方

線形計画緩和の性質１：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 30 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

R の最適値 $= 27$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

良さを評価できた

$\therefore$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $-$ P の最適値 $\leq 30 -$ R の最適値 $= 3$

最適値の比較：使い方 (続)

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

目的関数値 41 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

最適値の比較：使い方 (続)

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する $\Rightarrow$

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 41 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある

R の最適値 $= 41$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

最適値の比較：使い方 (続)

線形計画緩和の性質 1：系　　　(最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する ⇒

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 41 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある　　　R の最適値 $= 41$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

$\therefore$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $-$ P の最適値 $\leq 41 -$ R の最適値 $= 0$

最適値の比較：使い方 (続)

線形計画緩和の性質 1：系　　(最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する $\Rightarrow$

P の最適値 $\geq$ R の最適値

整数計画問題：P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{緩和}}$

P の線形計画緩和：R

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

目的関数値 41 の許容解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ がある　　R の最適値 $= 41$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は どれくらい良い解なのか？

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解！

$\therefore$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $-$ P の最適値 $\leq 41 -$ R の最適値 $= 0$

線形計画緩和による最適性保証

線形計画緩和の性質 2　　(最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
$\tilde{x}$ が P の許容解である
P における $\tilde{x}$ の目的関数値 $=$ R の最適値 $\Rightarrow$
$\tilde{x}$ は P の最適解である

線形計画緩和による最適性保証

線形計画緩和の性質 2 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が P の許容解である
P における $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $=$ R の最適値 $\Rightarrow$
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解である

証明：$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$ を P の最適解，$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする

1. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \le \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ (P の最適解の定義)
2. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (仮定)
3. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \ge \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (性質 1 の系)

線形計画緩和による最適性保証

線形計画緩和の性質 2 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が P の許容解である
P における $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $=$ R の最適値 $\Rightarrow$
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解である

<u>証明</u>：$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$ を P の最適解，$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする

1. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ (P の最適解の定義)
2. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (仮定)
3. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (性質 1 の系)

したがって，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$

線形計画緩和による最適性保証

線形計画緩和の性質 2 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が P の許容解である
P における $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $=$ R の最適値 $\Rightarrow$
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解である

<u>証明</u>：$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$ を P の最適解，$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ を R の最適解とする

1. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ (P の最適解の定義)
2. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (仮定)
3. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (性質 1 の系)

したがって，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$

したがって，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ であり，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解である □

線形計画緩和による最適性保証 (続)

線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解である

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

線形計画緩和による最適性保証 (続)

線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
x^*_{R} が R の最適解である
$x^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow$
x^*_{R} は P の最適解である

証明：x^*_{P} を P の最適解とする

1. x^*_{R} は P の許容解 (R の定義と $x^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n$)
2. $c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{P}} \le c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$ (P の最適解の定義と 1)
3. $c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{P}} \ge c^{\mathrm{T}} x^*_{\mathrm{R}}$ (性質 1 の系)

線形計画緩和による最適性保証 (続)

線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

P と R に最適解が存在する
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解である
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n$ $\Rightarrow$
$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

証明：$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}}$ を P の最適解とする

1. $\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の許容解 (R の定義と $\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n$)
2. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (P の最適解の定義と 1)
3. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ (性質 1 の系)

したがって，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ □

線形計画緩和の性質：まとめ

仮定：P と R に最適解が存在する

線形計画緩和の性質 1：系 (最小化問題の場合)

P の最適値 $\geq$ R の最適値

線形計画緩和の性質 2 (最小化問題の場合)

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が P の許容解である

P における $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の目的関数値 $=$ R の最適値 $\Rightarrow$

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は P の最適解である

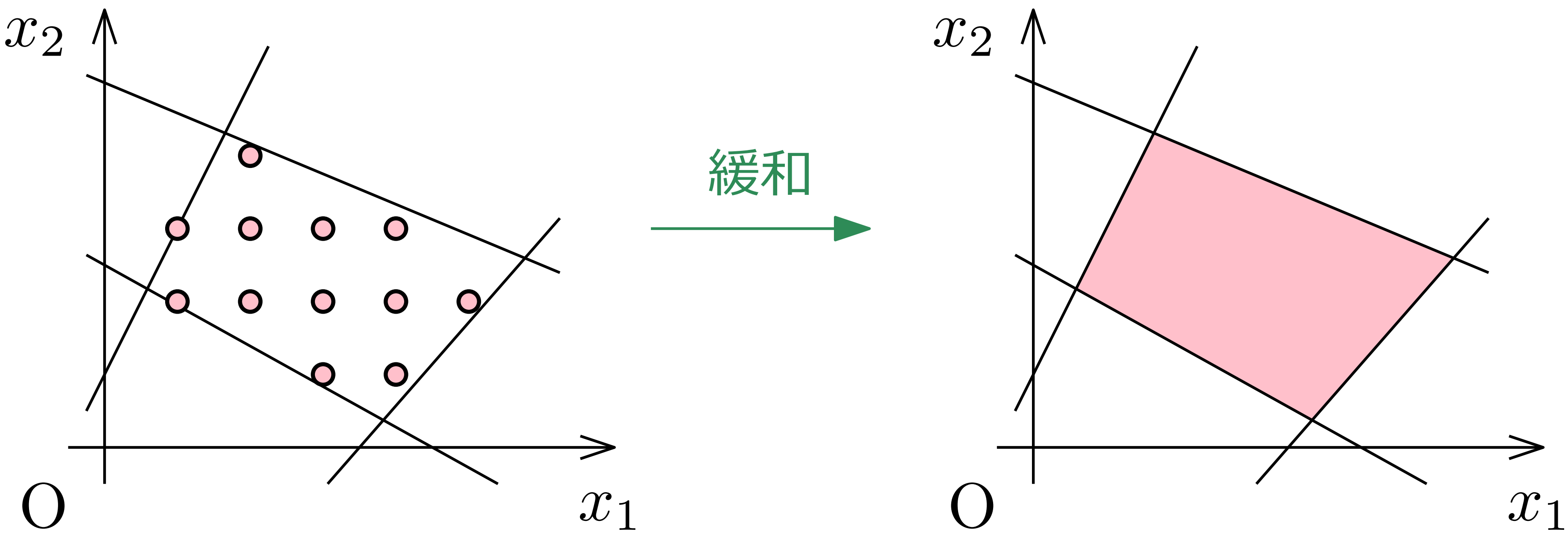
線形計画緩和の性質 3 (最小化問題の場合)

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ が R の最適解であり，$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}} \in \mathbb{Z}^n$ $\Rightarrow$

$\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{R}}$ は P の最適解である

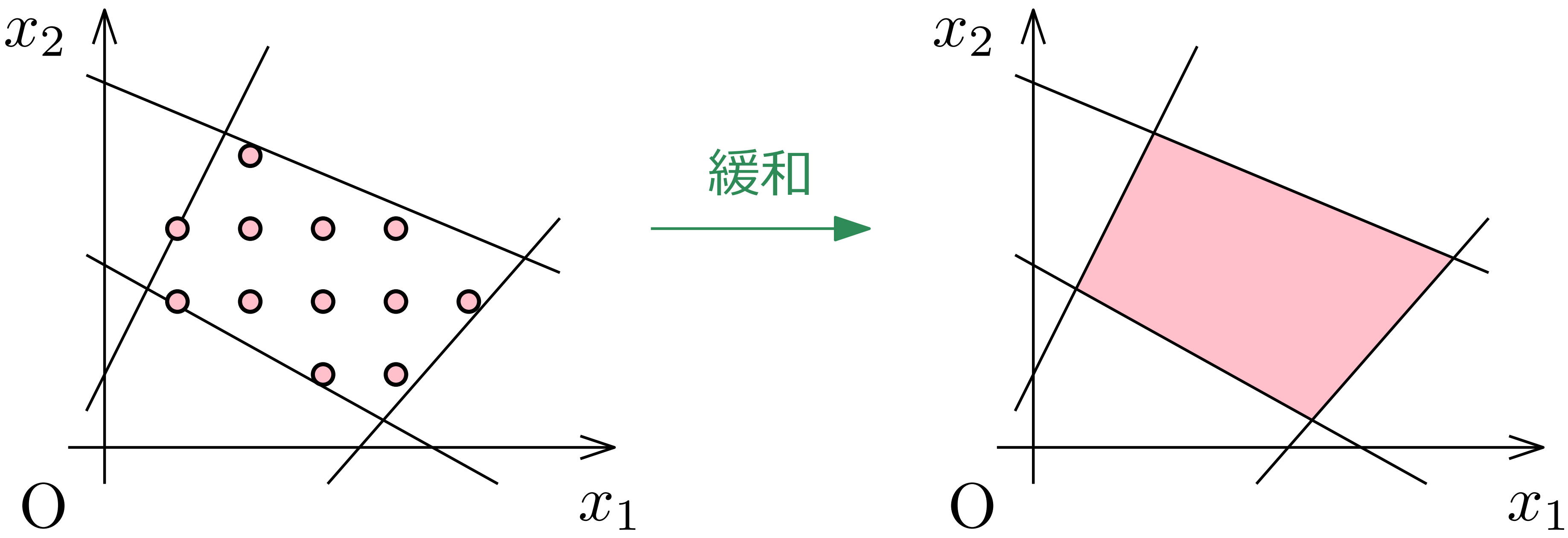
補足：性質 2 と 3 は，最大化問題でも成立する

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)



今日の内容

- 線形計画緩和
- 線形計画緩和の性質
- 整数計画モデリングの良さ (一考)



整数計画モデリングの良さ？

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

良い整数計画モデル (私見)

短い時間で解くことができる

アルゴリズムに依存するので，今後「何が良い」のか変わる可能性あり

良い整数計画モデル (1)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

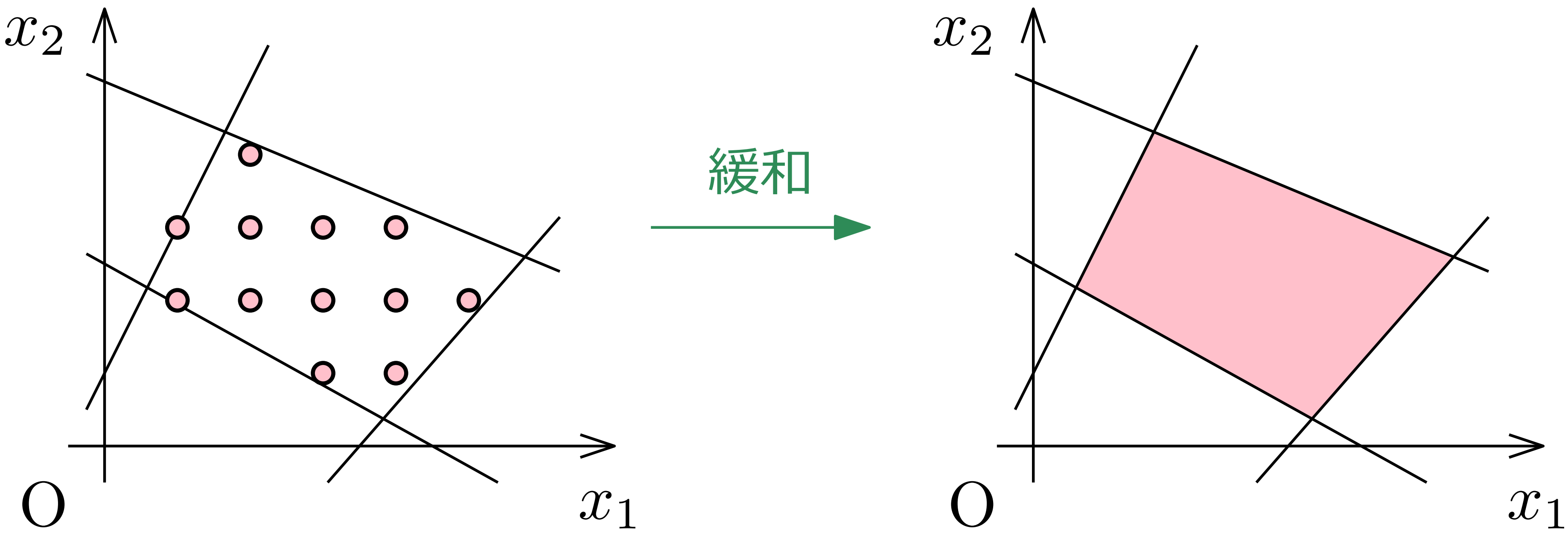
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

良い整数計画モデルの判断材料 (1)

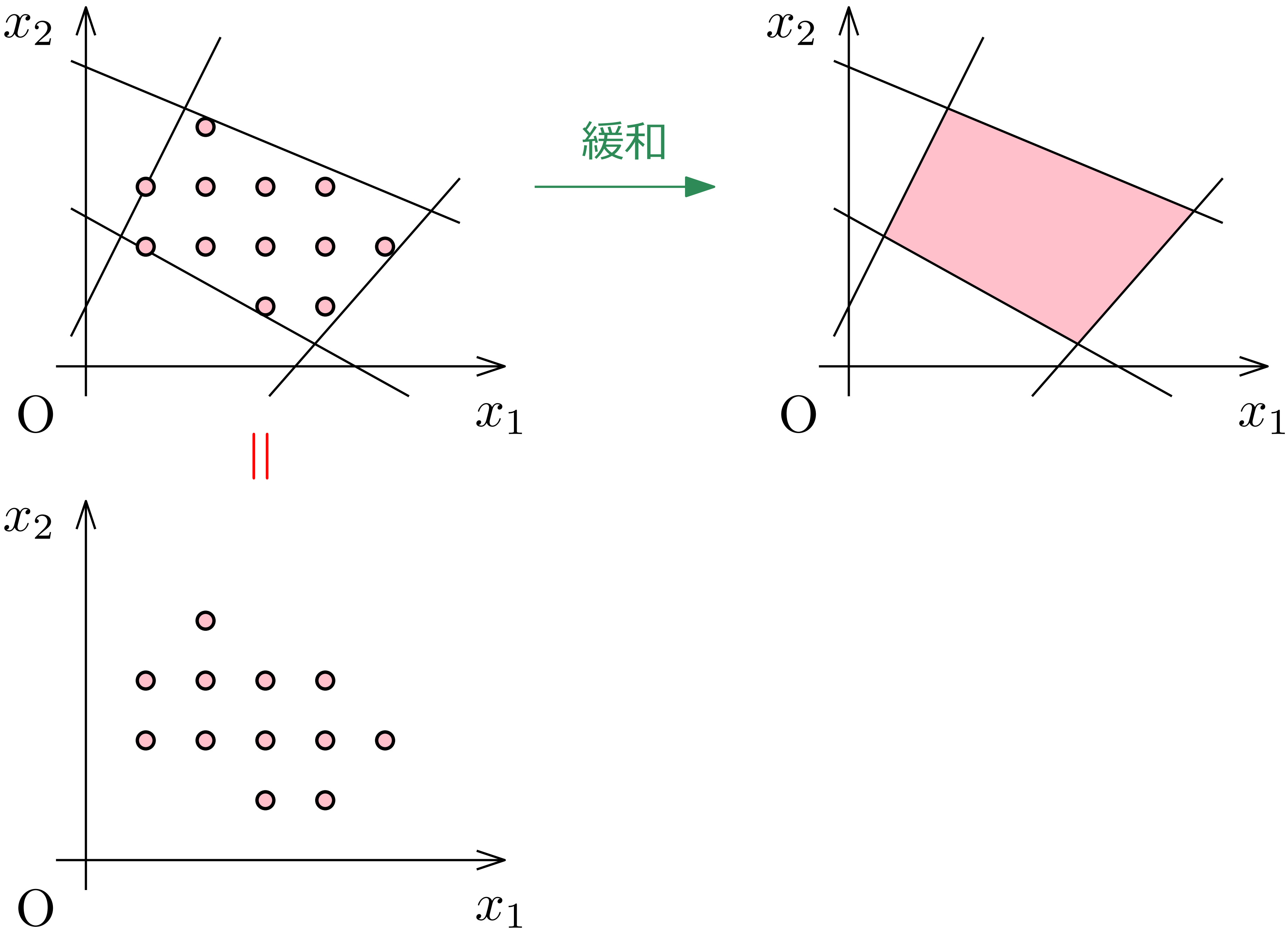
- 変数の数 n が小さい
- 制約の数 m が小さい

n や m は問題の **規模** を表す

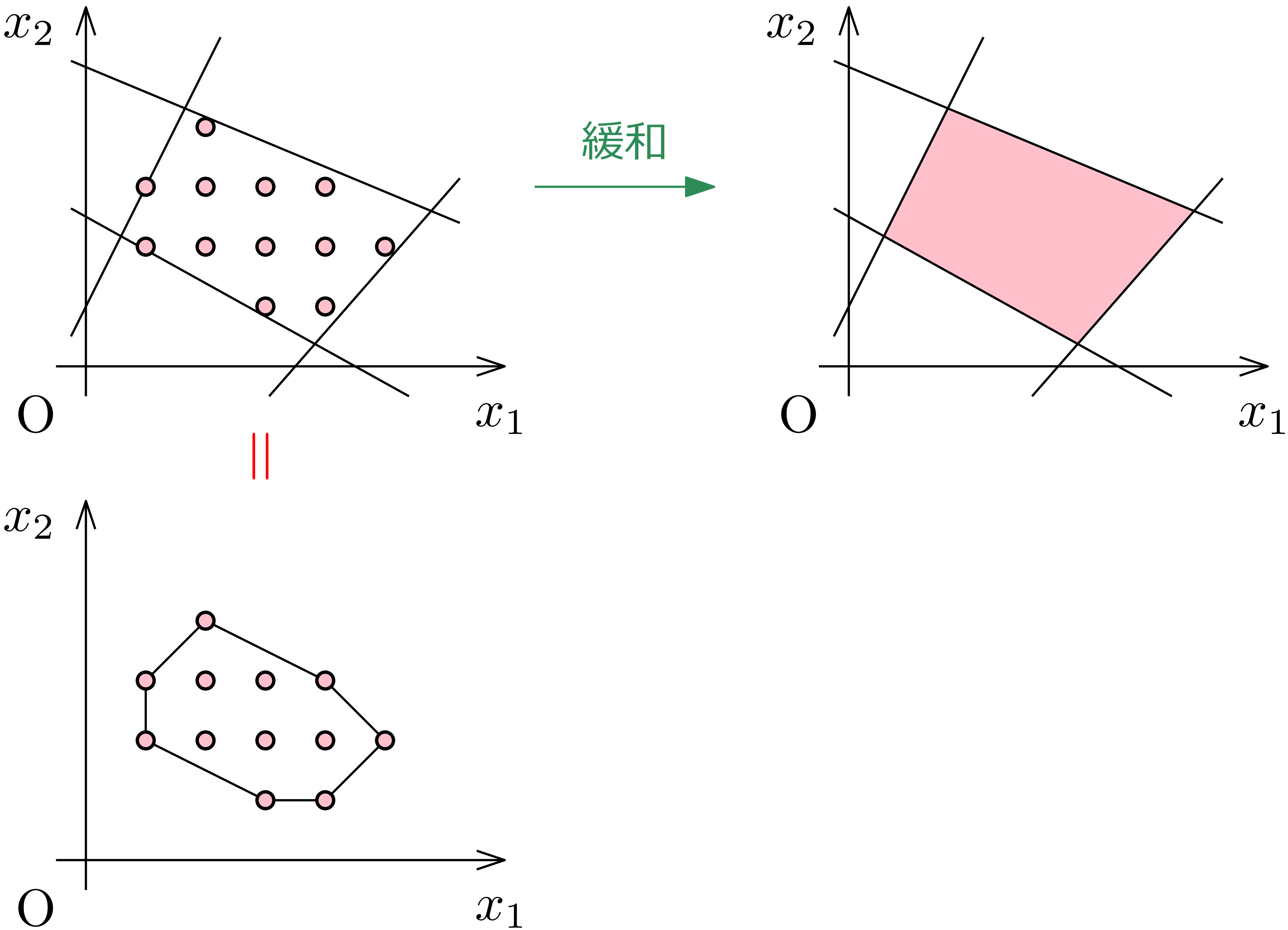
整数計画問題は線形計画問題



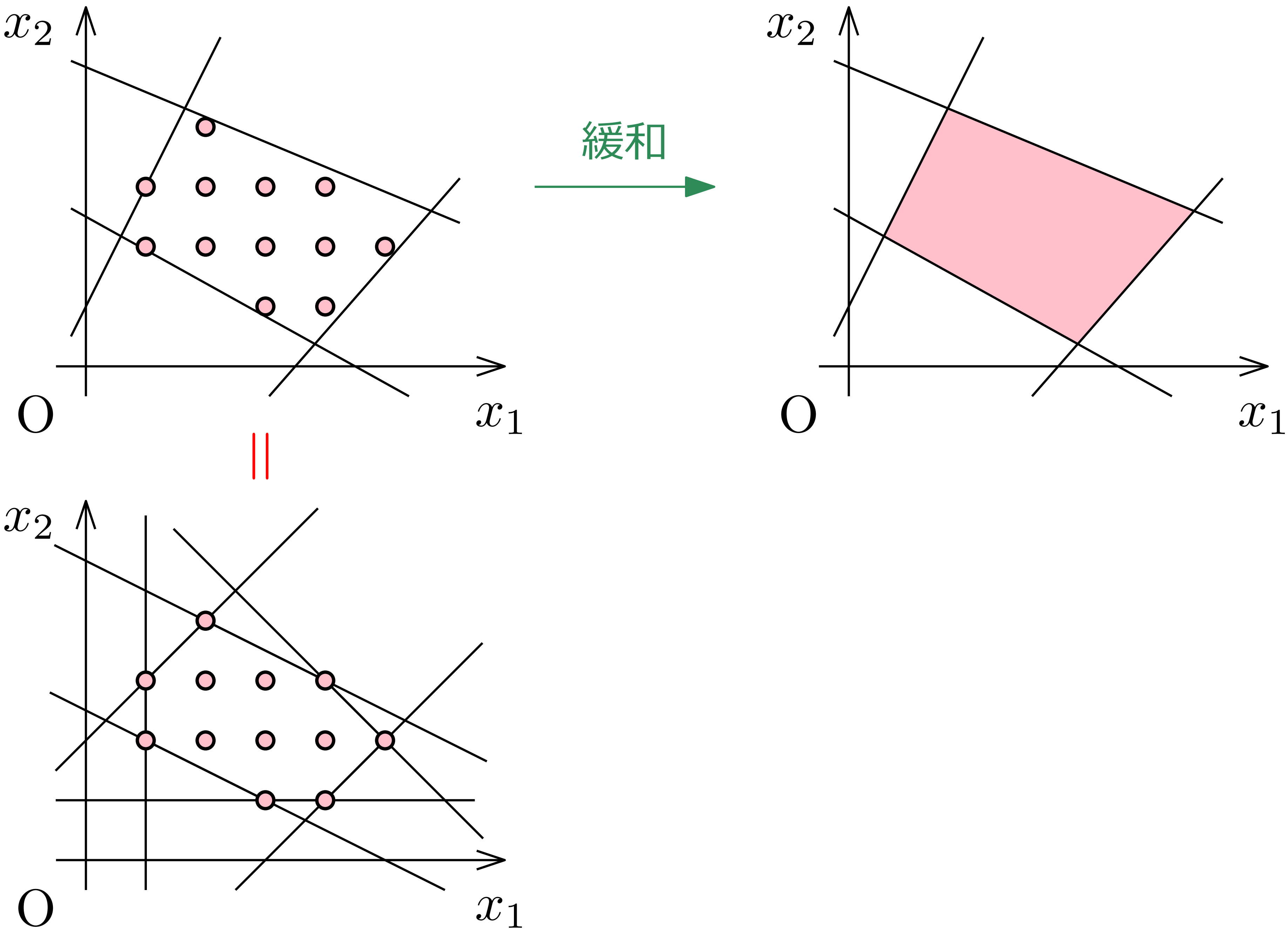
整数計画問題は線形計画問題



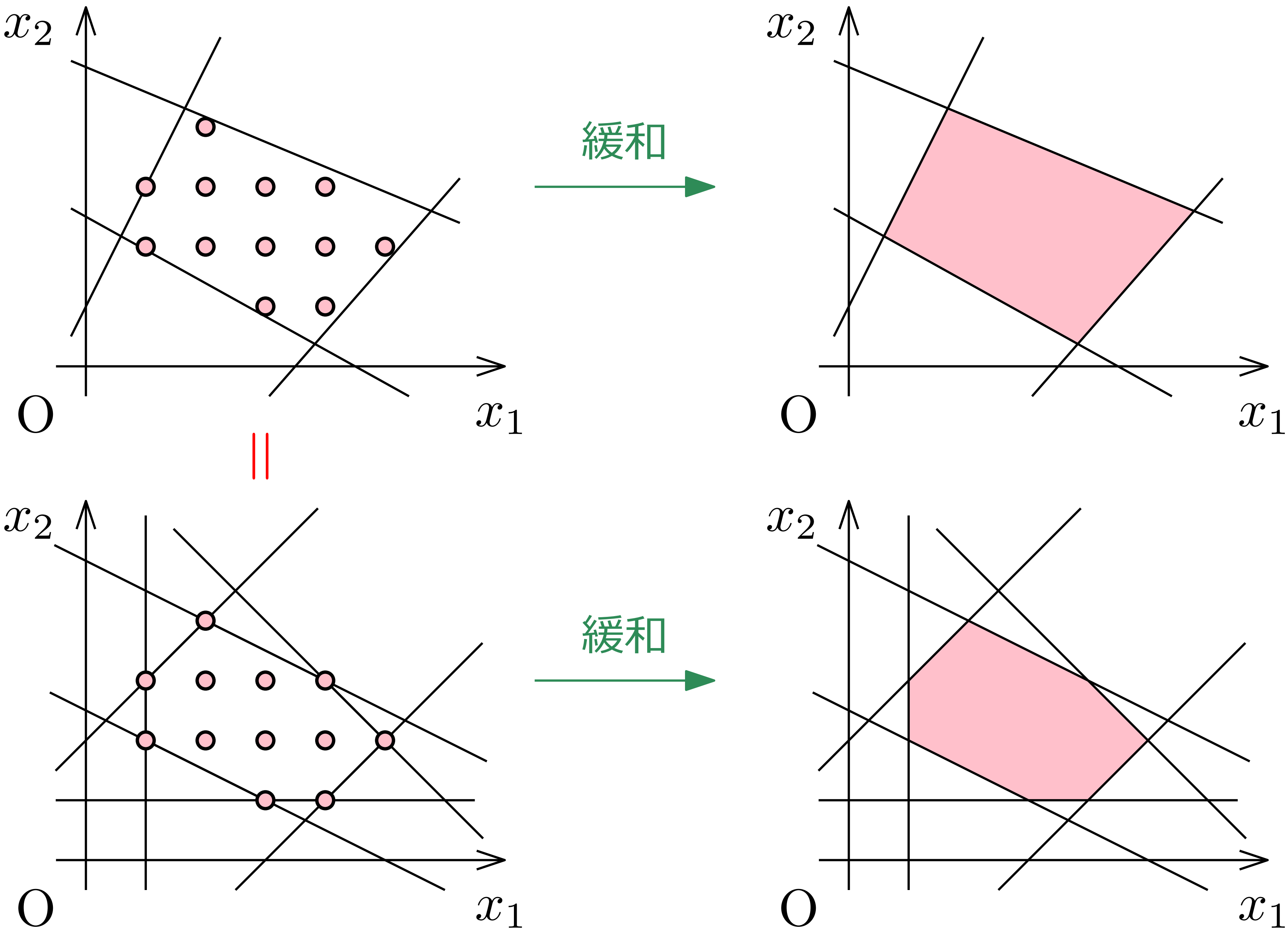
整数計画問題は線形計画問題



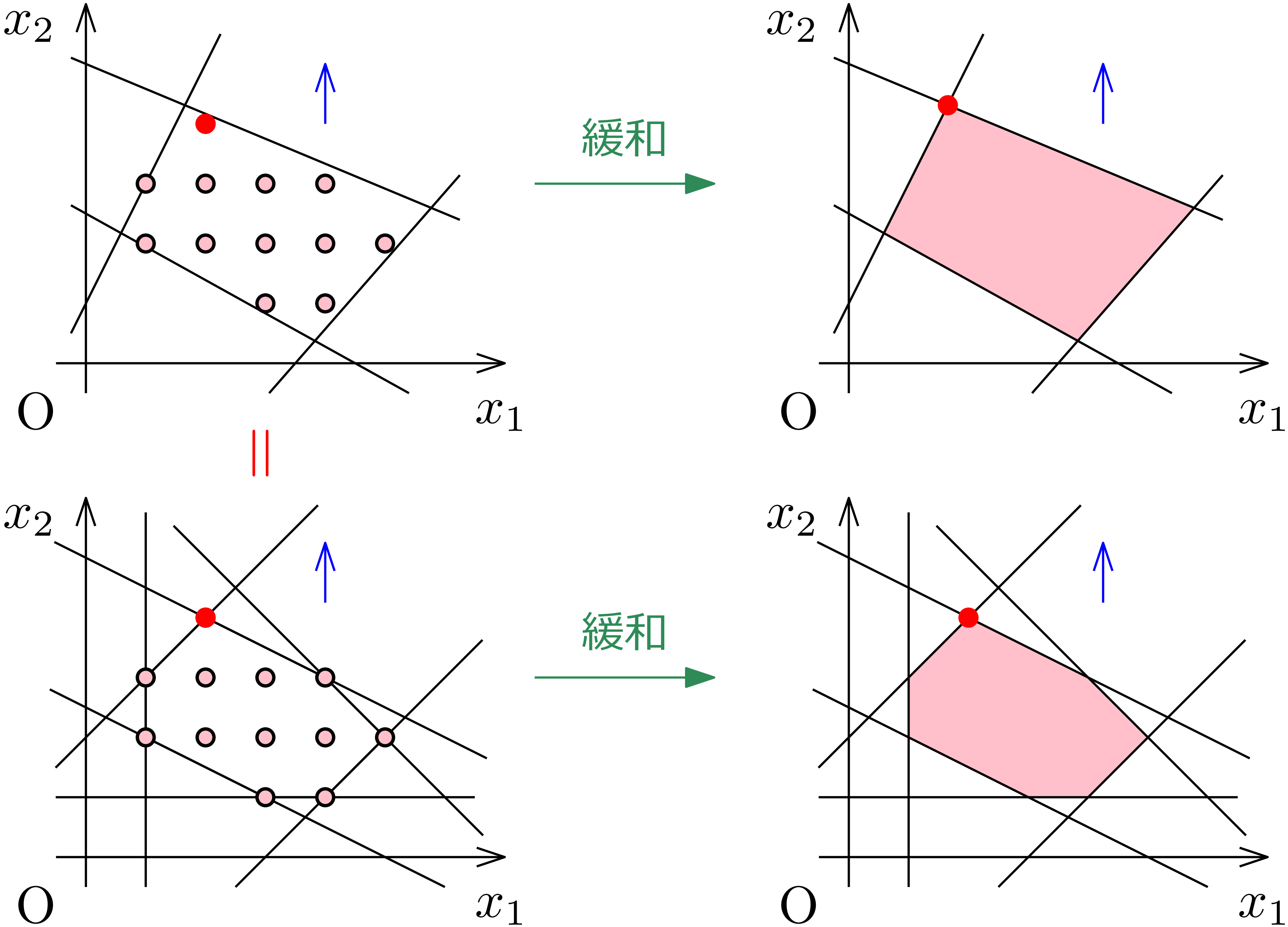
整数計画問題は線形計画問題



整数計画問題は線形計画問題



整数計画問題は線形計画問題



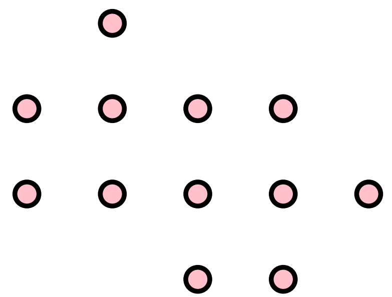
整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

P の許容領域

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\}$$



整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

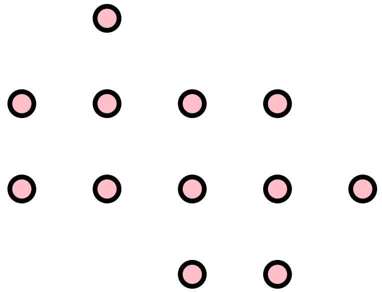
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

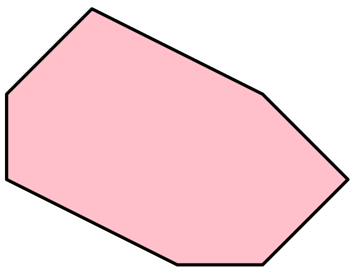
P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \quad \subseteq \quad \mathrm{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)





整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P’

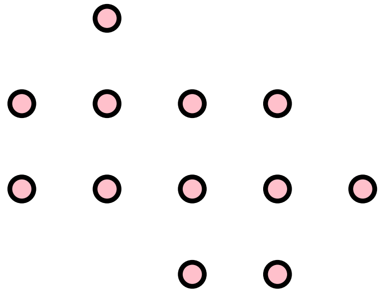
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(S) \end{array}$$

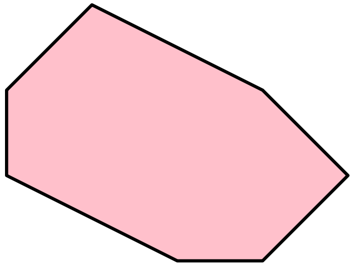
P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \quad \subseteq \quad \mathrm{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)





整数計画問題は線形計画問題：詳細

整数計画問題 P

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題 P'

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}(S) \end{array}$$

P の許容領域

P の許容領域の凸包

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{r} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{conv}(S)$$

(S が無限集合のとき，要注意)

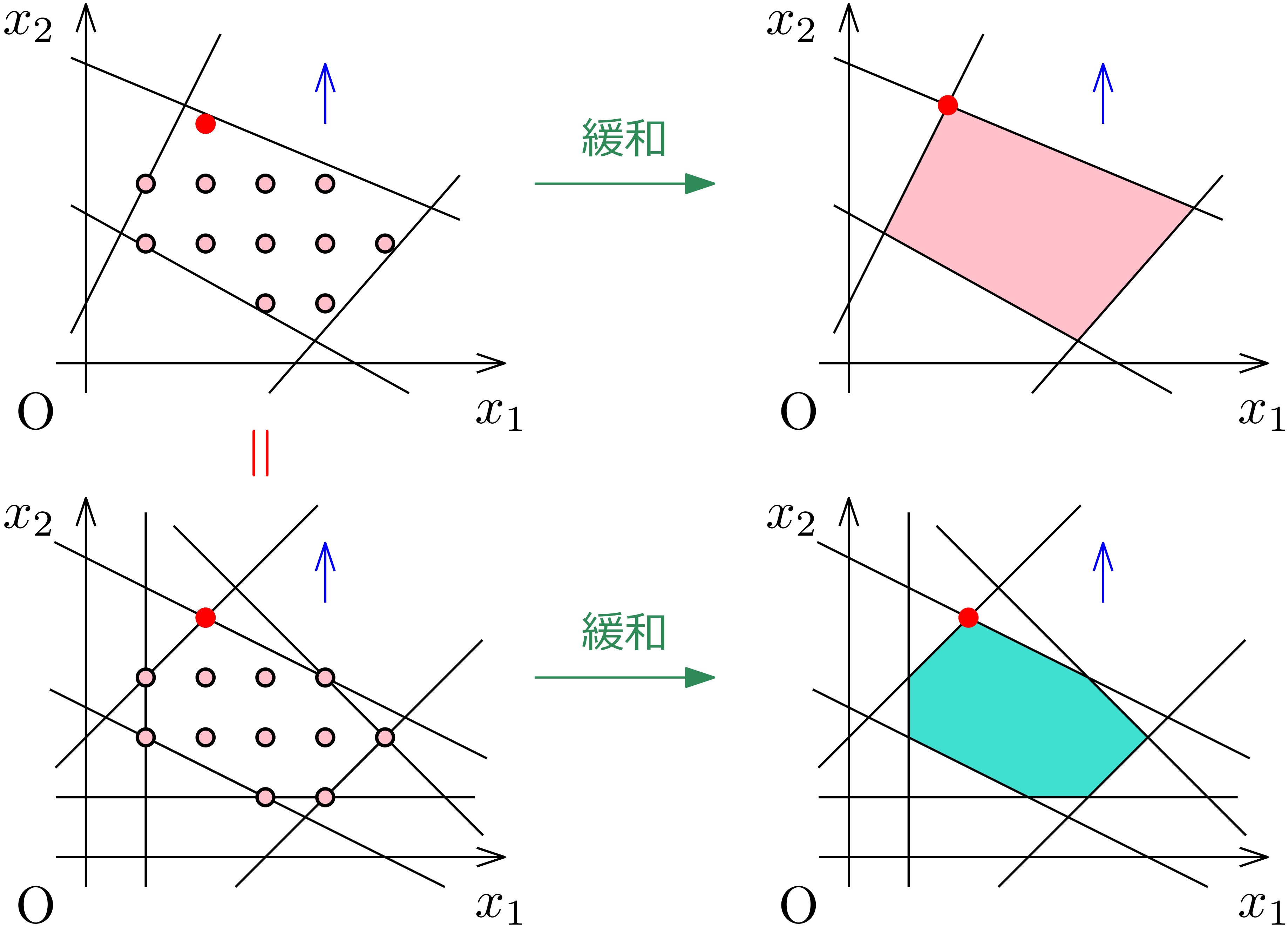
性質：整数計画問題は線形計画問題

P に最適解が存在する $\Rightarrow$

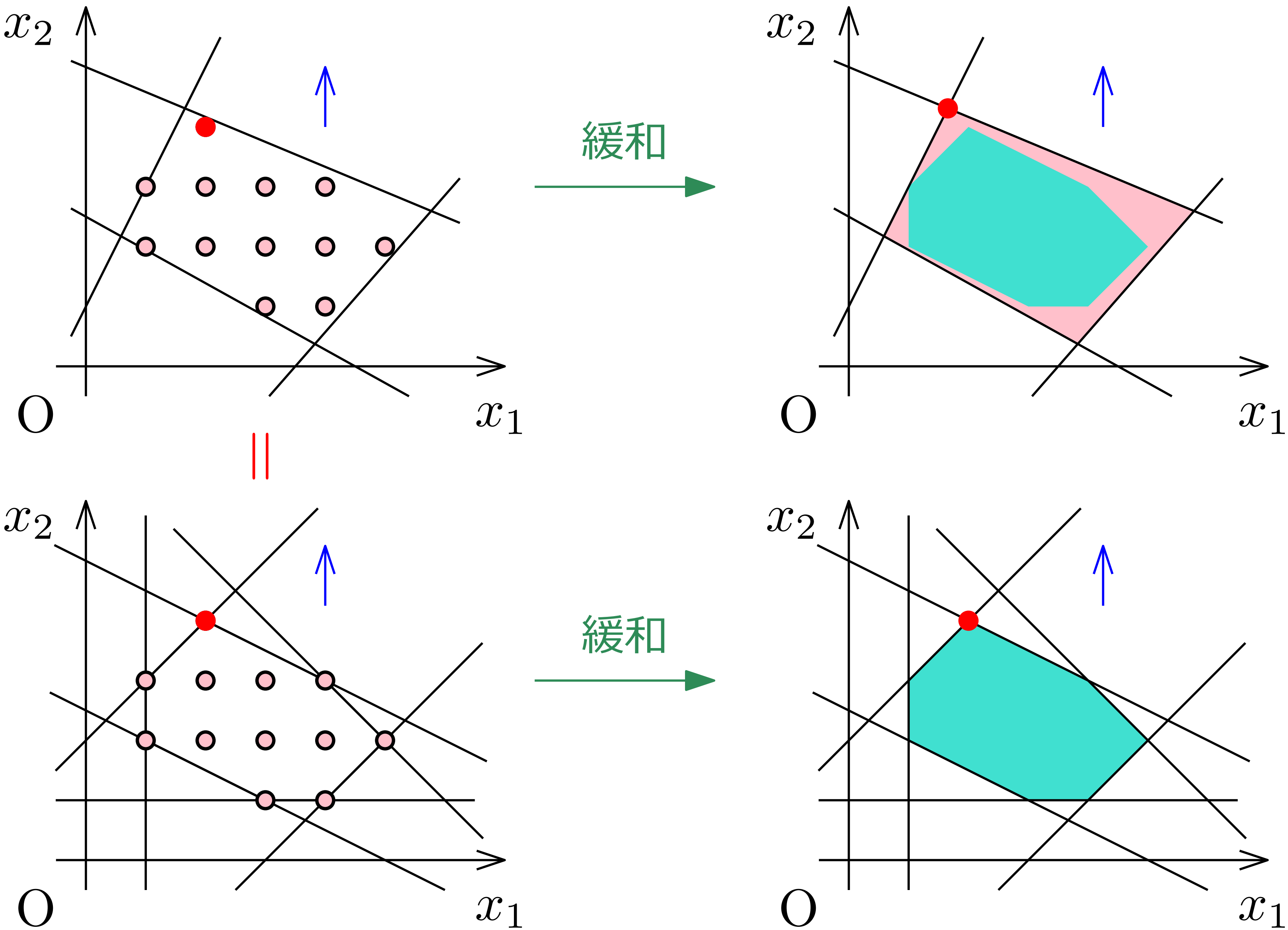
P' にも最適解が存在し，

$\boldsymbol{x}^*$ が P の最適解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}^*$ が P' の**整数**最適解

良い整数計画モデル (2)：準備



良い整数計画モデル (2)：準備



良い整数計画モデル (2)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

良い整数計画モデルの判断材料 (2)

整数計画問題が同じ許容領域を持つならば

- 線形計画緩和の許容領域が小さい方が良い

良い整数計画モデル (3)

解きたい問題 $\xrightarrow{\text{モデリング}}$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

他にも，整数計画モデルの良さに影響を与えそうなもの

- $A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の性質・構造
- 対称性

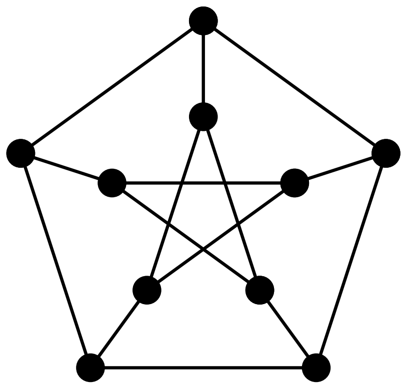
これらは本講義で扱わない (が重要かもしれない)

次回予告

次回の内容

整数計画モデリングの例 (組合せ最適化)

- ナップサック問題，最大独立集合問題
- 整数計画モデルの比較



$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} x_v & \\
\text{subject to} & x_u + x_v \leq 1 & (\forall \{u, v\} \in E), \\
& \qquad\quad x_v \in \{0, 1\} & (\forall\, v \in V)
\end{array}
$$