離散最適化基礎論

第 3 回

線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理

岡本 吉央 (電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 10 月 25 日

最終更新：2022 年 11 月 8 日 09:31

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)
* ＊ 休み (国内出張) (12/27)
* ＊ 休み (冬季休業) (1/3)

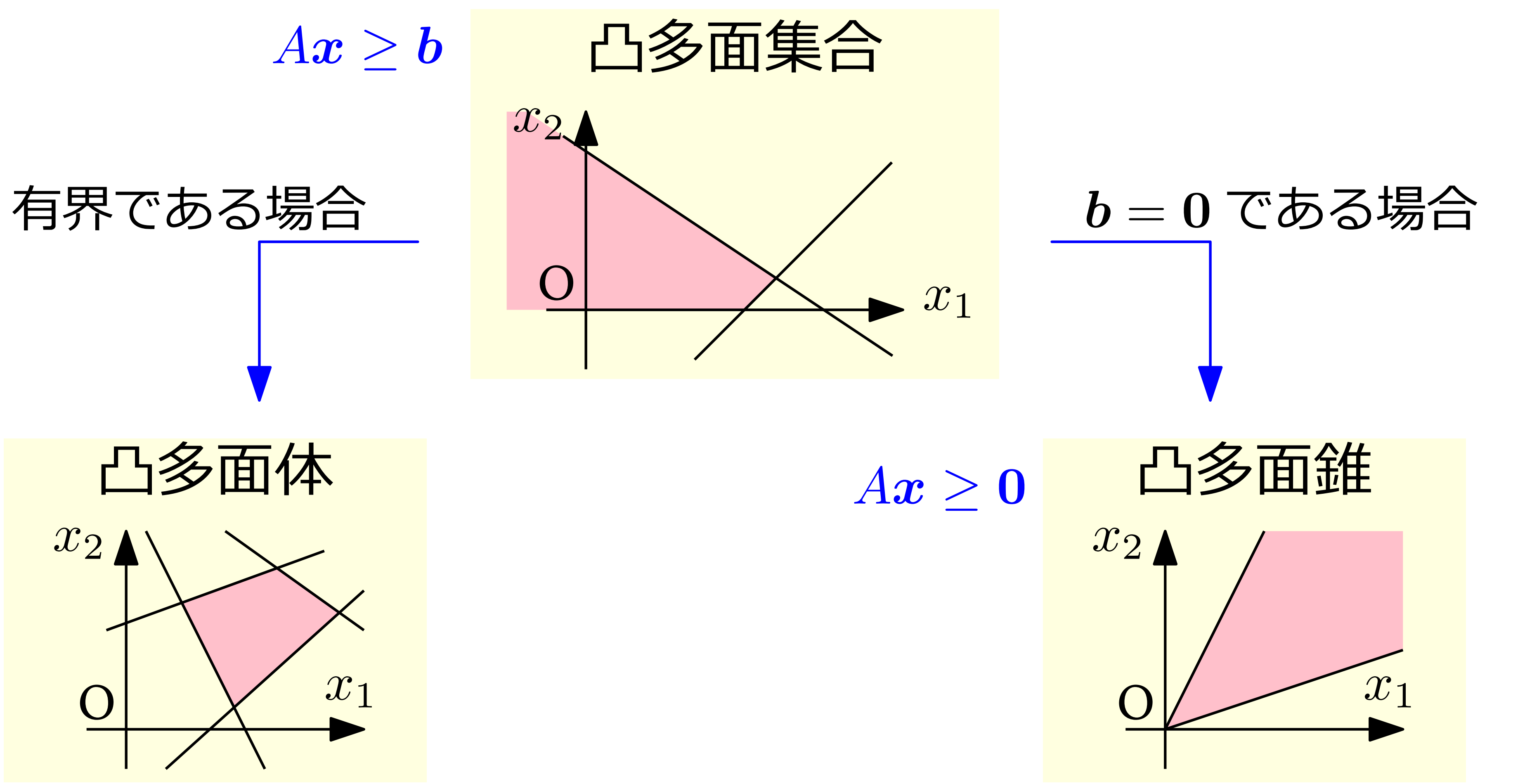
12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

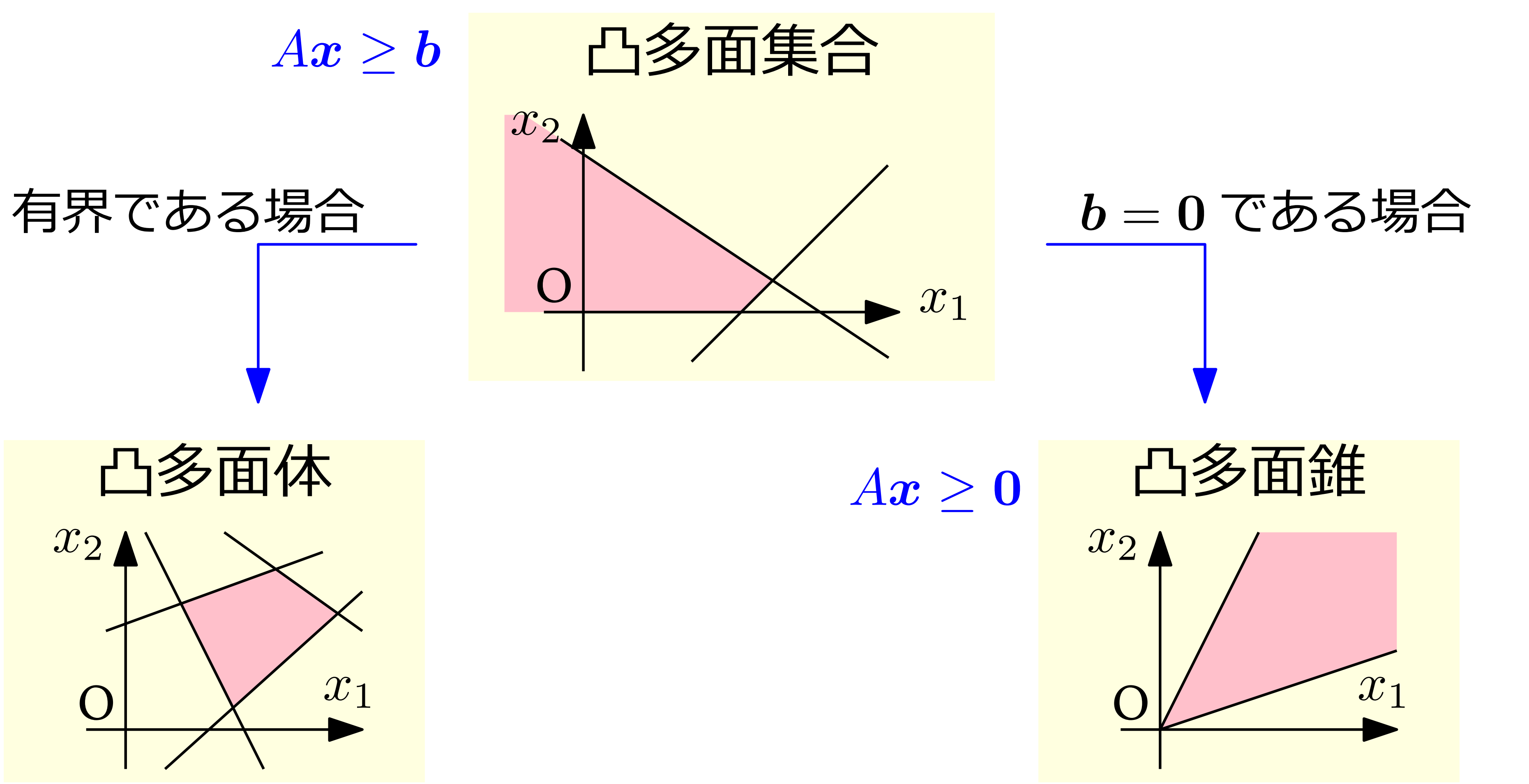
今日の内容

- Minkowski–Weyl の定理
- 双対定理
- 単体法と端点最適解



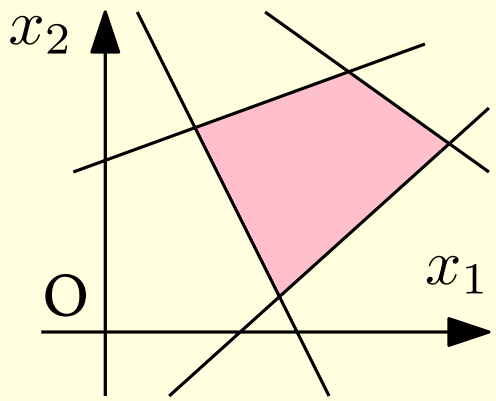
今日の内容

- $\boxed{\text{Minkowski–Weyl の定理}}$
- 双対定理
- 単体法と端点最適解

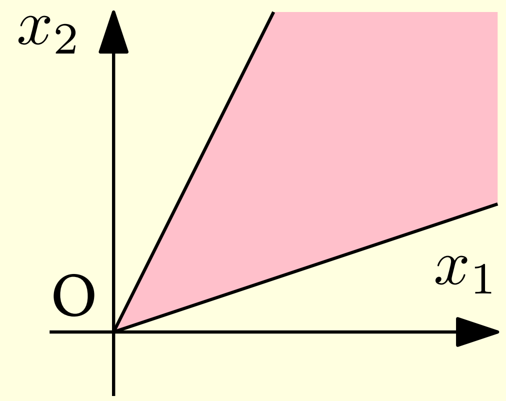


Minkowski–Weyl の定理の 3 バージョン

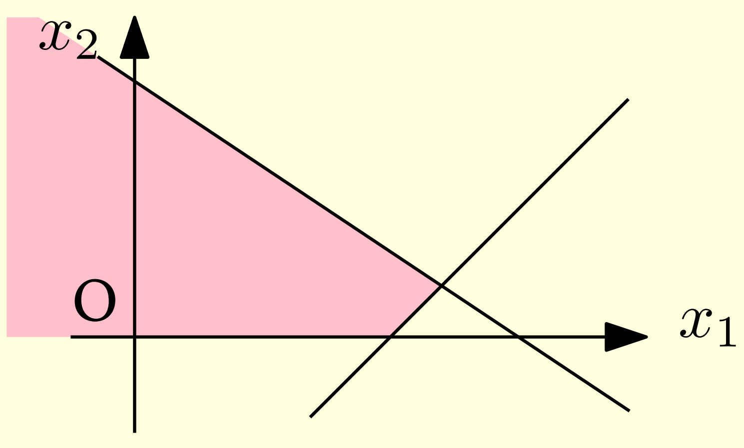
凸多面体版



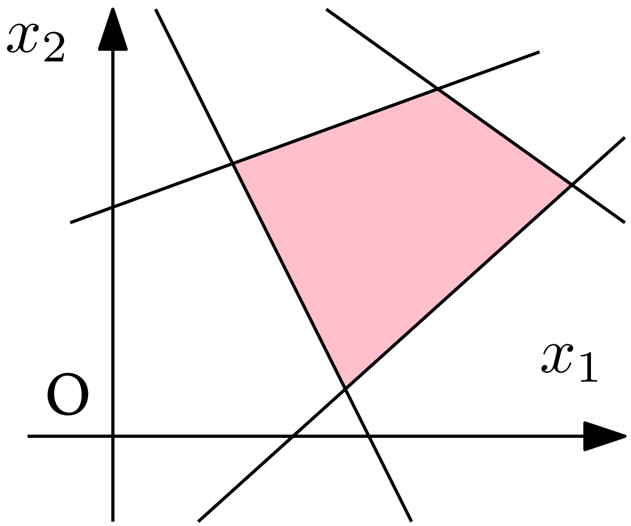
凸多面錐版

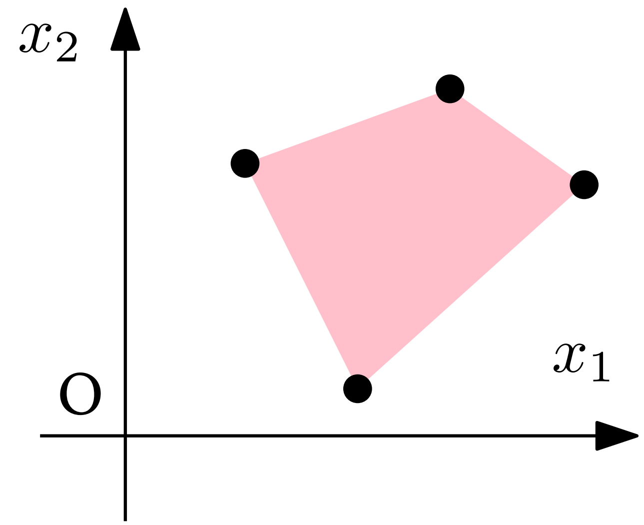


凸多面集合版



Minkowski–Weyl の定理 (凸多面体版)：例





有限点集合の凸包

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

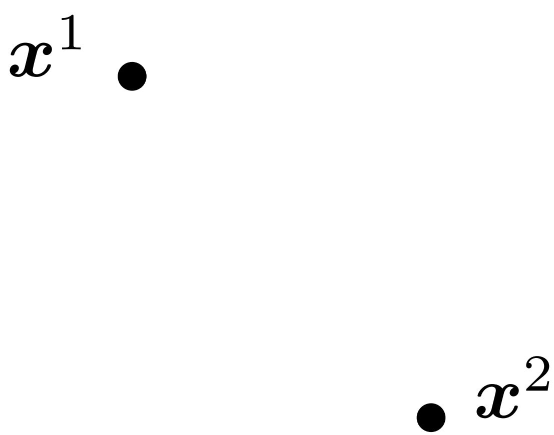
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

凸結合

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

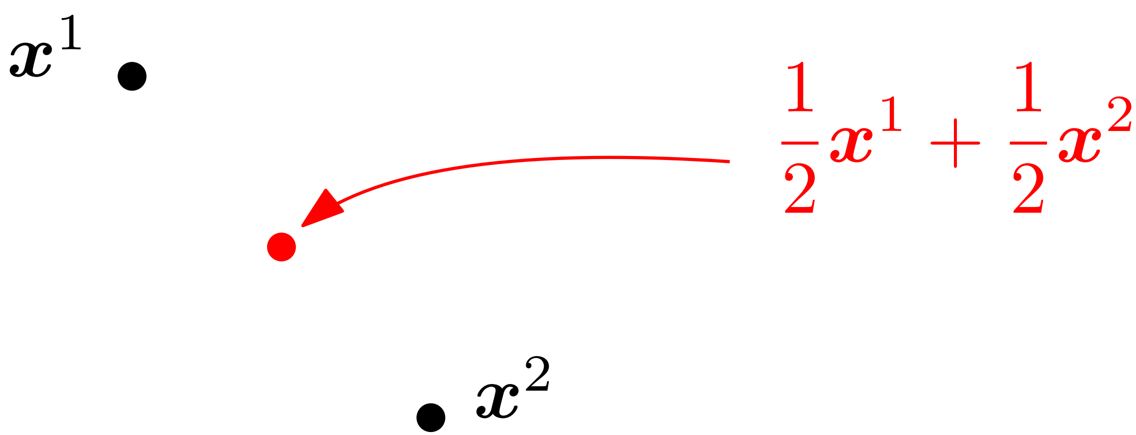
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2$

$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

凸結合

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

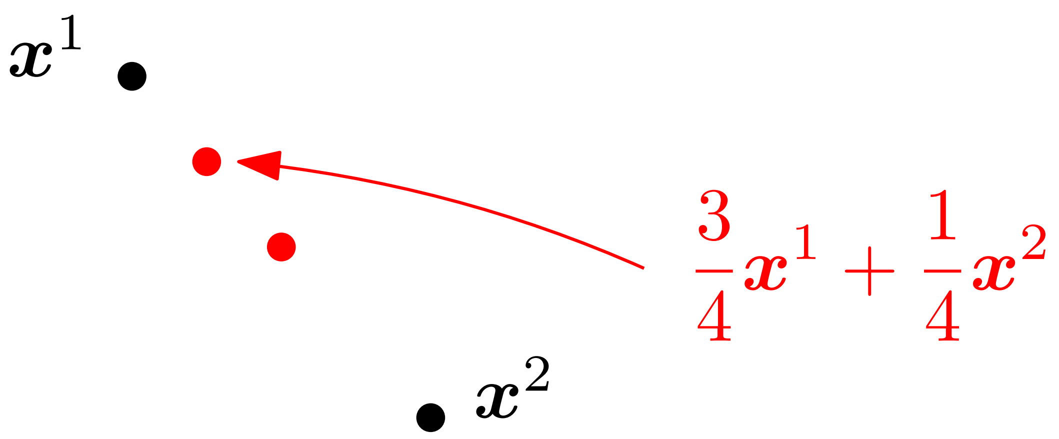
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

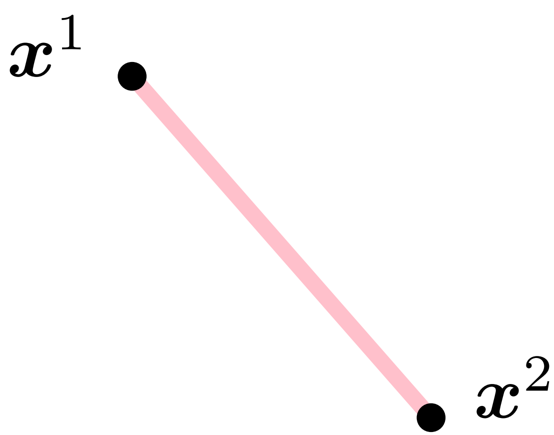
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

凸結合 (別の例)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

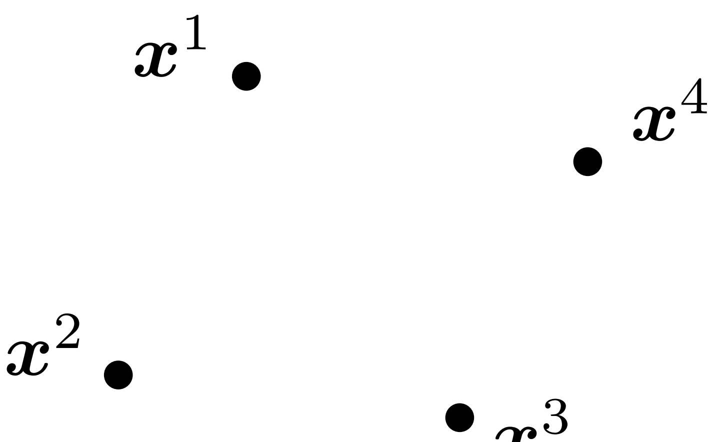
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



凸結合 (別の例)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \dots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

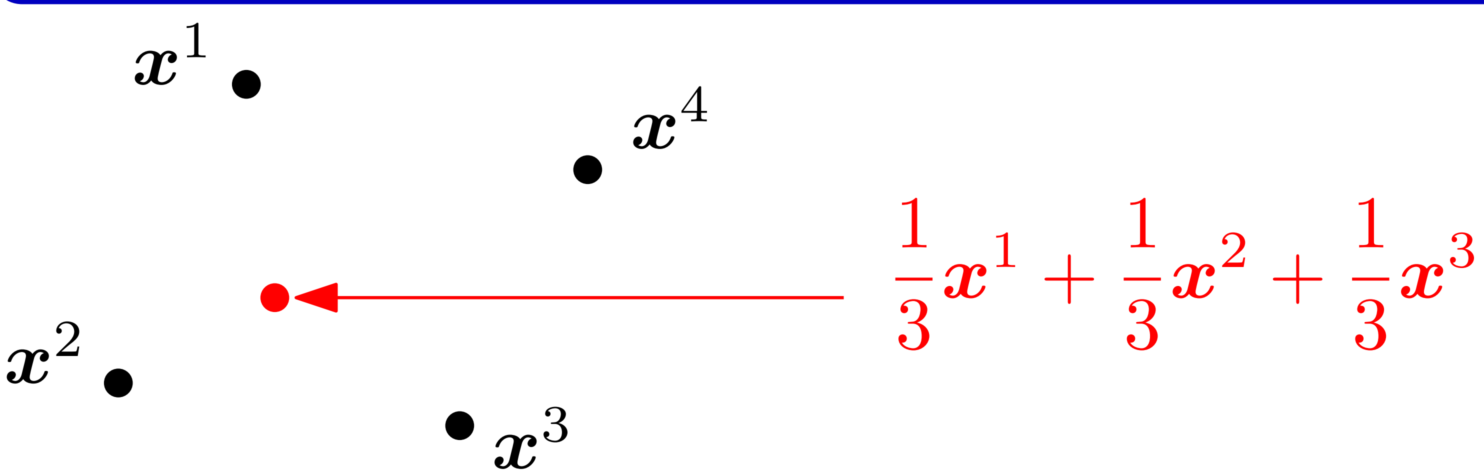
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \dots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



凸結合 (別の例)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

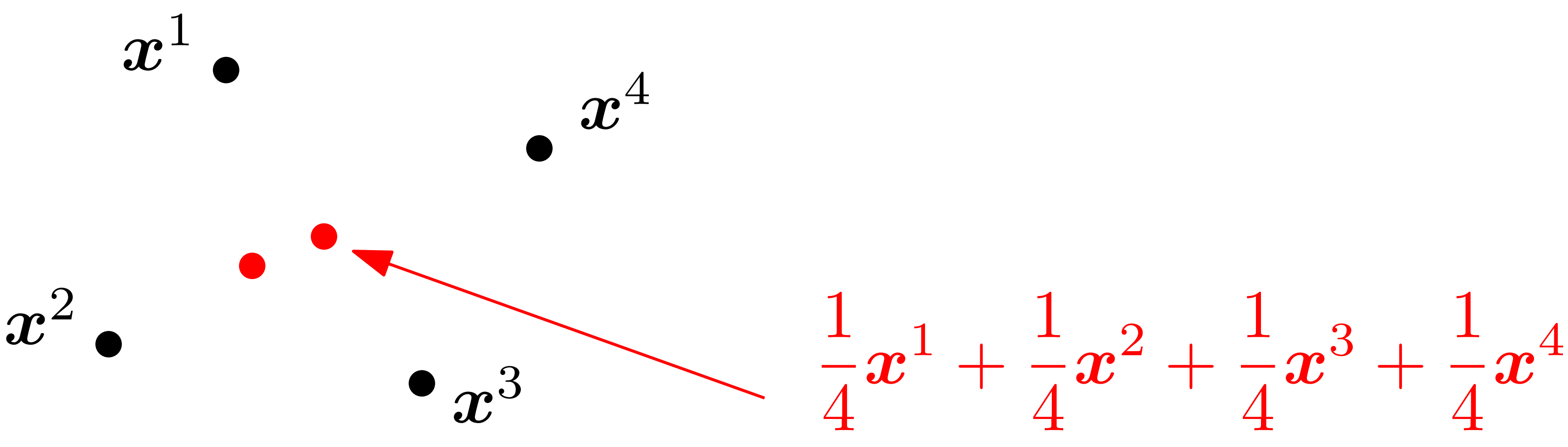
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



凸結合 (別の例)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

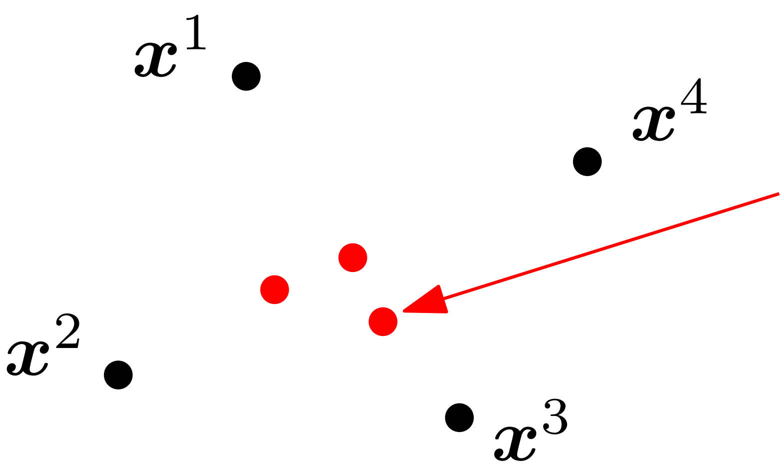
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$



$$\frac{1}{6}\boldsymbol{x}^1 + \frac{1}{6}\boldsymbol{x}^2 + \frac{13}{24}\boldsymbol{x}^3 + \frac{1}{8}\boldsymbol{x}^4$$

凸結合 (別の例)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k \in \mathbb{R}^n$

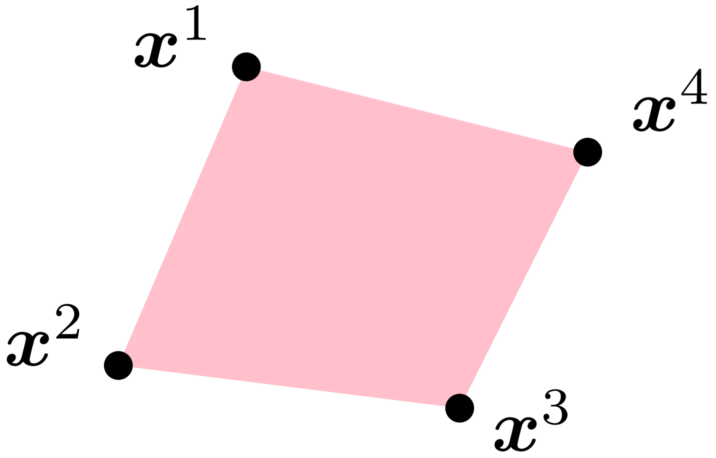
定義：凸結合 (convex combination)

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ の **凸結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}^2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$

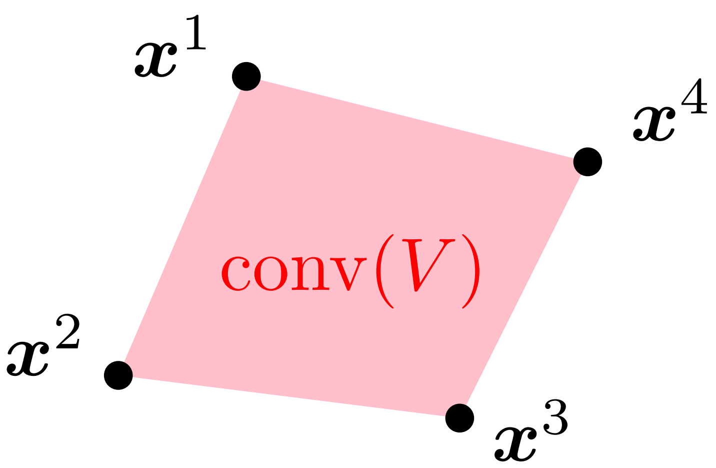


$V = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包 (convex hull)

V の **凸包** とは，V の点の凸結合全体から成る集合

$$\mathrm{conv}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}^i \,\middle|\, \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 \end{array} \right\}$$

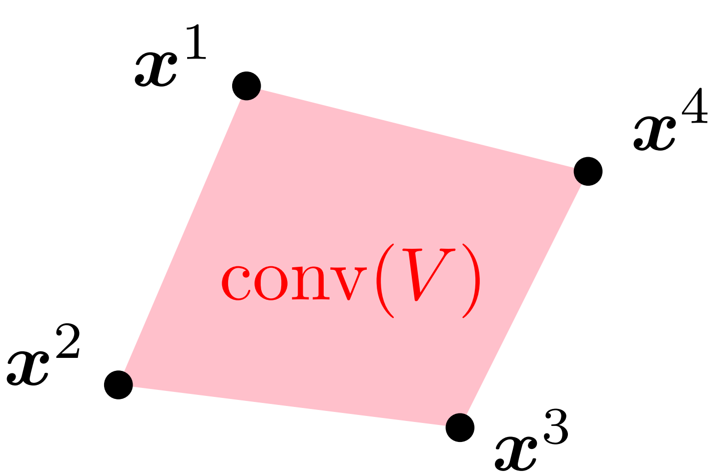


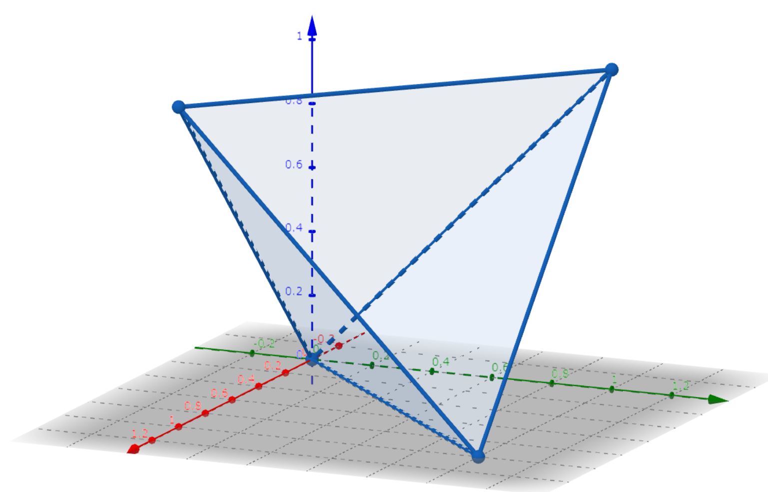
$V = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包 (convex hull)

V の **凸包** とは，V の点の凸結合全体から成る集合

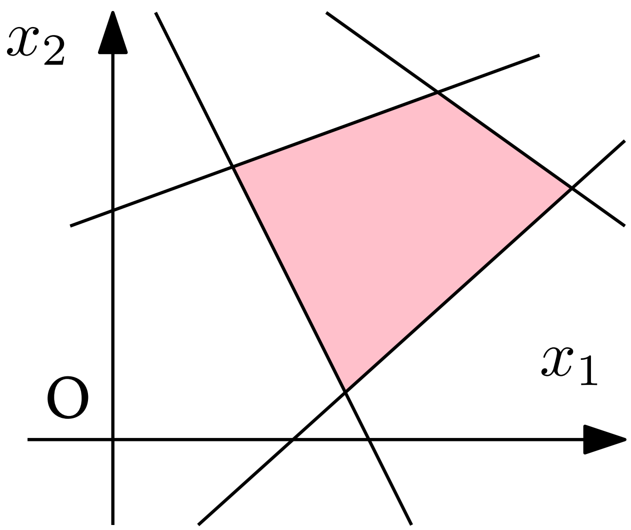
$$\mathrm{conv}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}^i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 \end{array} \right\}$$

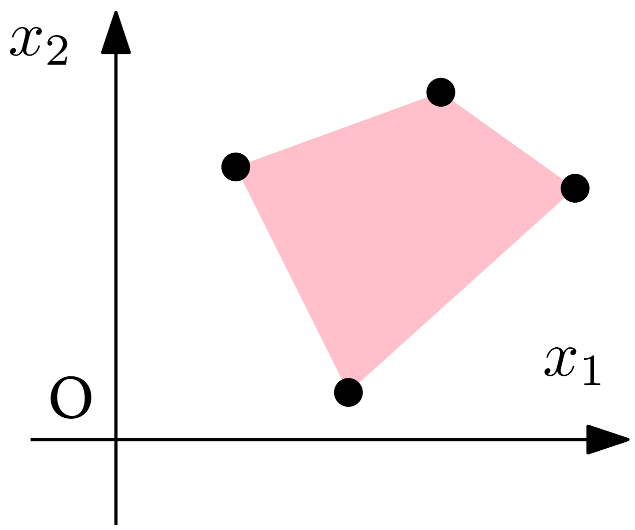




Minkowski–Weyl の定理 (凸多面体版)

- 凸多面体は ある有限点集合の凸包である
- 有限点集合の凸包は 凸多面体である



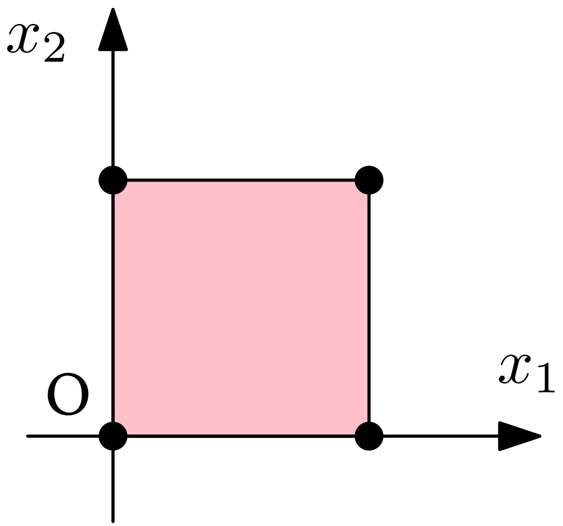


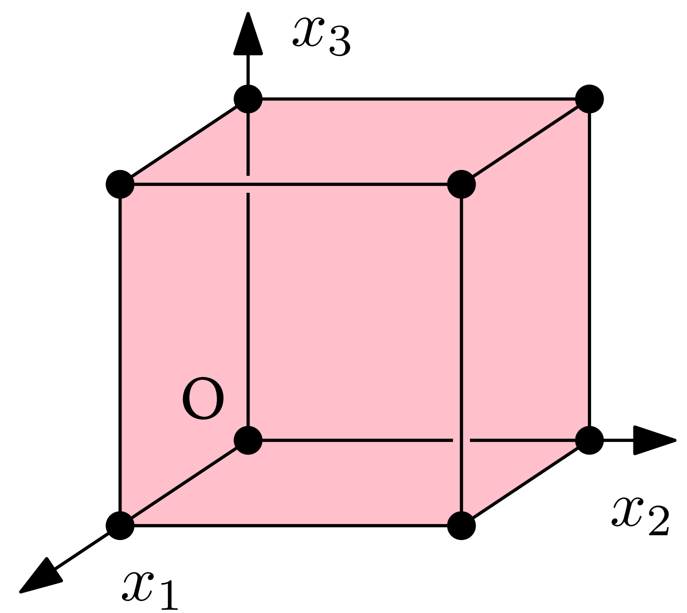
証明は この講義で扱わない

立方体：凸包としての表現 (例)

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \le x_i \le 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$





$$\mathrm{conv}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

$$\mathrm{conv}\left(\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

立方体の凸包としての表現

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

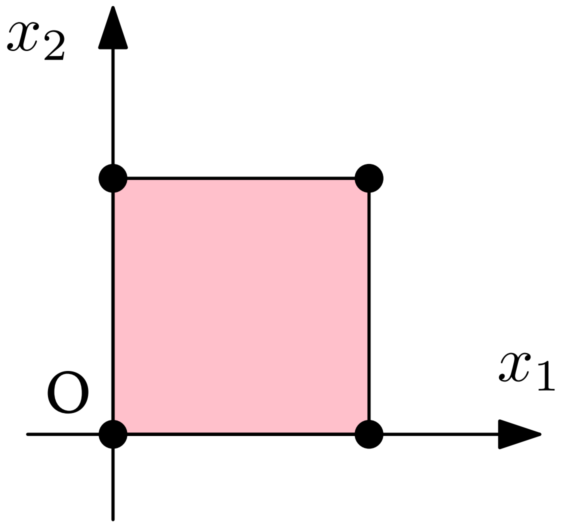
$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ とする

凸多面体 P は次の点集合 V の凸包である

$$V = \left\{ \sum_{i \in I} \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

標準単位ベクトル



$$\mathrm{conv}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$$

立方体の凸包としての表現：証明 (1)

設定

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

$$V = \left\{ \sum_{i \in I} \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

注：$|V| = 2^n$

証明すること

$$P = \mathrm{conv}(V)$$

[$\supseteq$ の証明]　$\boldsymbol{z} \in \mathrm{conv}(V)$ とする

$$\boldsymbol{z} = \sum_{I} \lambda_I \sum_{i \in I} \boldsymbol{e}_i \text{ と書ける} \quad (\lambda_I \ge 0, \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \lambda_I = 1)$$

任意の $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を考える

$$z_j = \sum_{I : j \in I} \lambda_I \ge 0$$

$$z_j = \sum_{I : j \in I} \lambda_I \le \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \lambda_I = 1$$

□

立方体の凸包としての表現：証明 (2)

設定

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$$

$$V = \left\{ \sum_{i \in I} \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

注：$|V| = 2^n$

証明すること

$$P = \mathrm{conv}(V)$$

[$\subseteq$ の証明]　$\boldsymbol{z} \in P$ とする ($0 \le z_i \le 1$ を満たす)

$z_{\sigma(1)} \ge z_{\sigma(2)} \ge \cdots \ge z_{\sigma(n)}$ を満たす置換 σ を考える

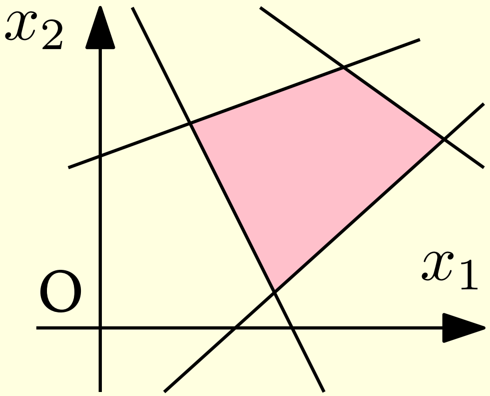
各 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して，$I(i) = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}$ として

$\lambda_{I(i)} = z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i+1)}$ とする (ただし，$I(0) = \emptyset, z_{\sigma(0)} = 1, z_{\sigma(n+1)} = 0$)

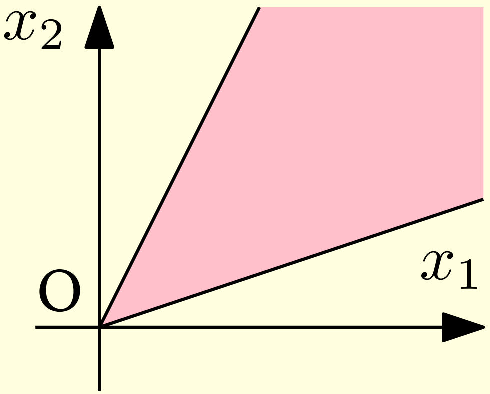
このとき，$\boldsymbol{z} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{I(i)} \sum_{j \in I(i)} \boldsymbol{e}_j$，$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{I(i)} = 1$ となる　(確認せよ)

$\square$

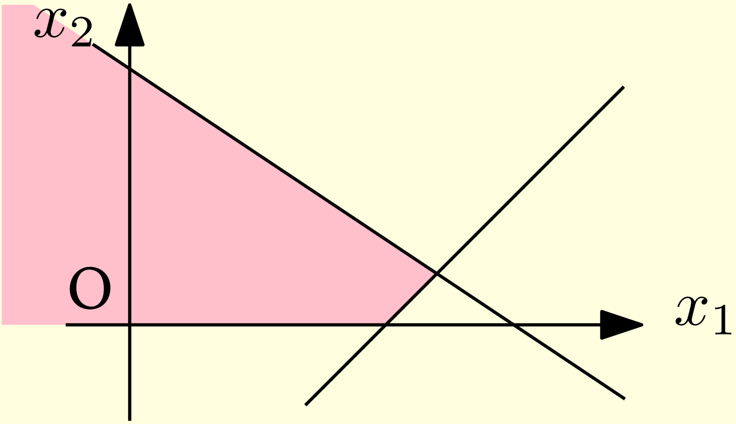
凸多面体版

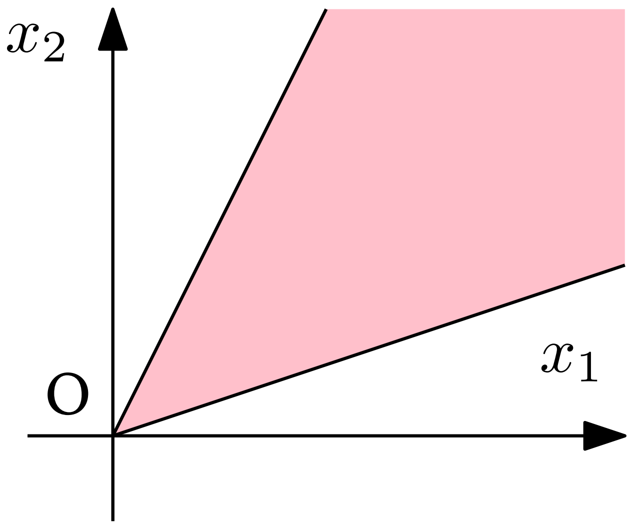


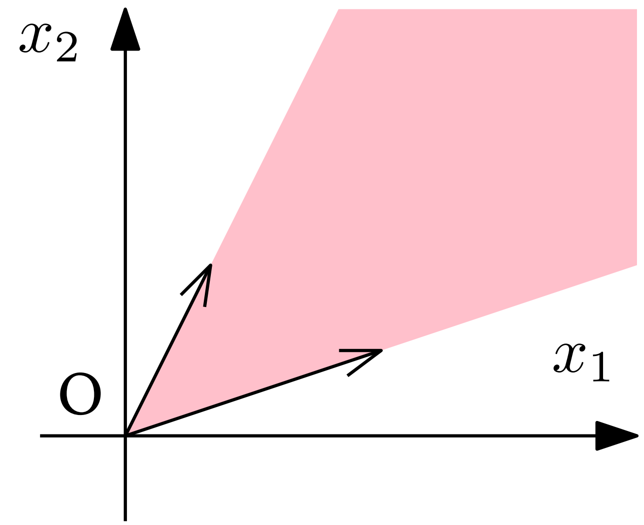
凸多面錐版



凸多面集合版







有限ベクトル集合の錐包

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell \in \mathbb{R}^n$

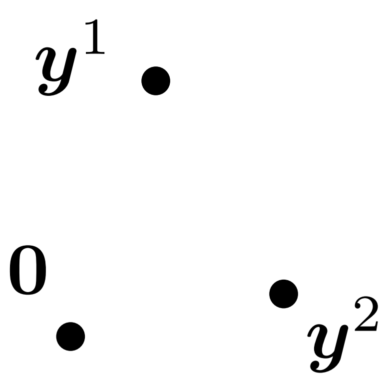
定義：錐結合 (conic combination)

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell$ の **錐結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2 + \cdots + \mu_\ell \boldsymbol{y}^\ell$$

ただし，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0$



$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2$

$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell \in \mathbb{R}^n$

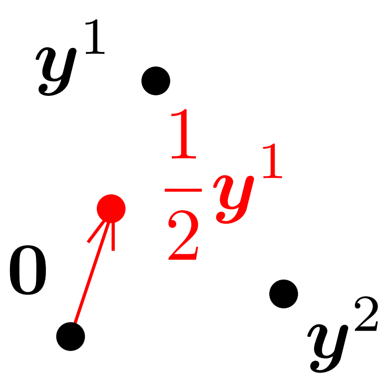
定義：錐結合 (conic combination)

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell$ の **錐結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2 + \cdots + \mu_\ell \boldsymbol{y}^\ell$$

ただし，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0$



$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2$

$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

錐結合

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell \in \mathbb{R}^n$

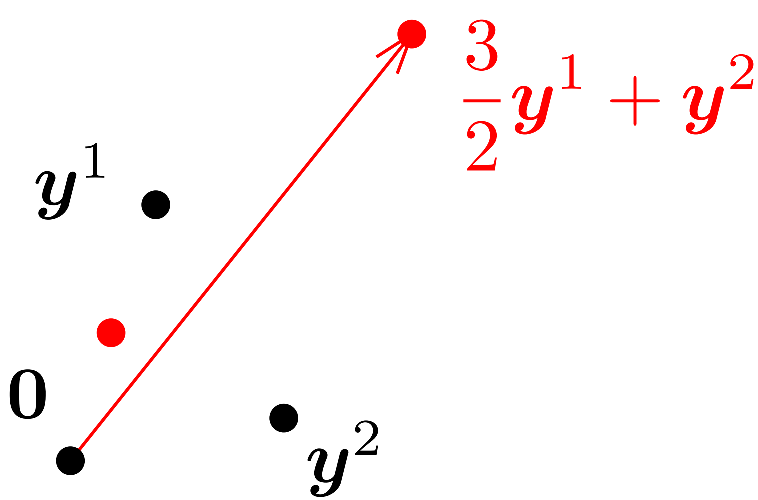
定義：錐結合 (conic combination)

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell$ の **錐結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2 + \cdots + \mu_\ell \boldsymbol{y}^\ell$$

ただし，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0$



$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2$

$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

錐結合

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell \in \mathbb{R}^n$

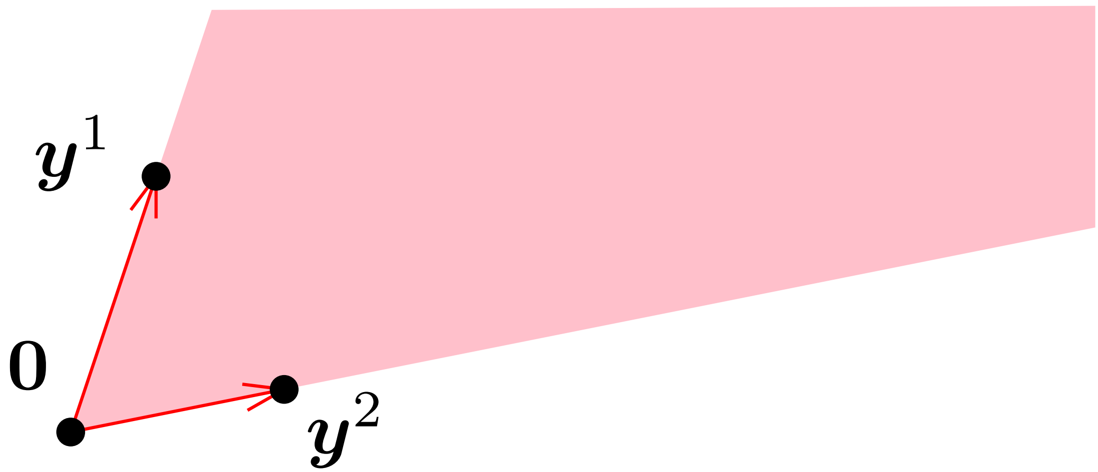
定義：錐結合 (conic combination)

$\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell$ の **錐結合** とは，次で表現できる点のこと

$$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2 + \cdots + \mu_\ell \boldsymbol{y}^\ell$$

ただし，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ は次を満たすとする

1. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0$



$\mu_1 \boldsymbol{y}^1 + \mu_2 \boldsymbol{y}^2$

$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

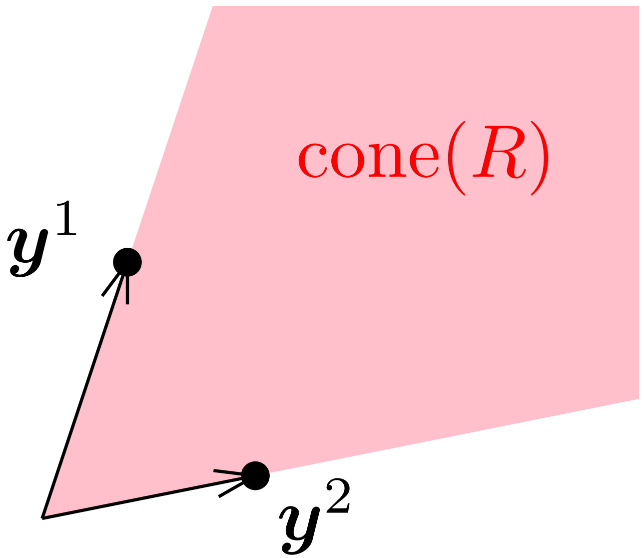
錐包

$R = \{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：錐包 (conic hull)

R の **錐包** とは, R のベクトルの錐結合全体から成る集合

$$\operatorname{cone}(R) = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \boldsymbol{y}^j \;\middle|\; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0 \right\}$$



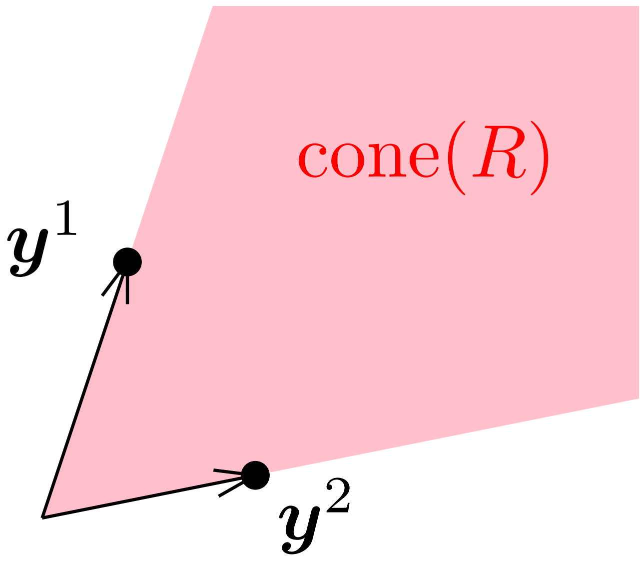
錐包

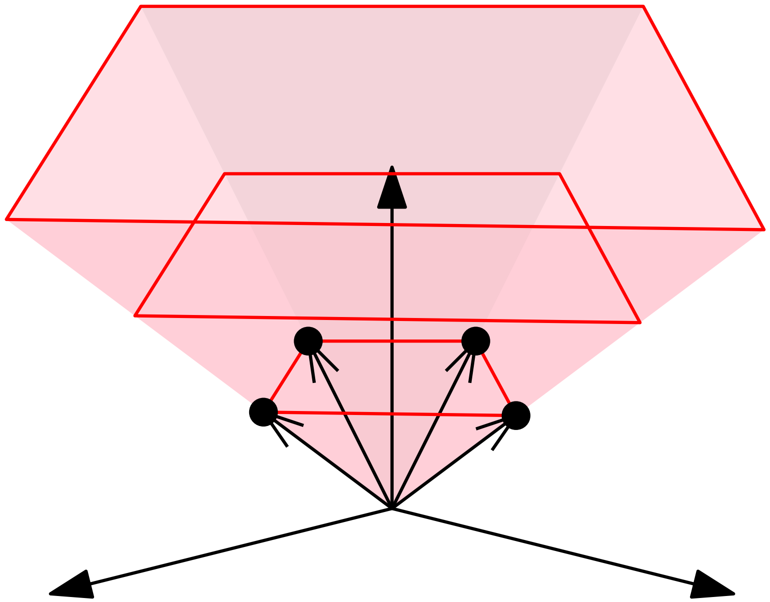
$R = \{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：錐包 (conic hull)

R の **錐包** とは, R のベクトルの錐結合全体から成る集合

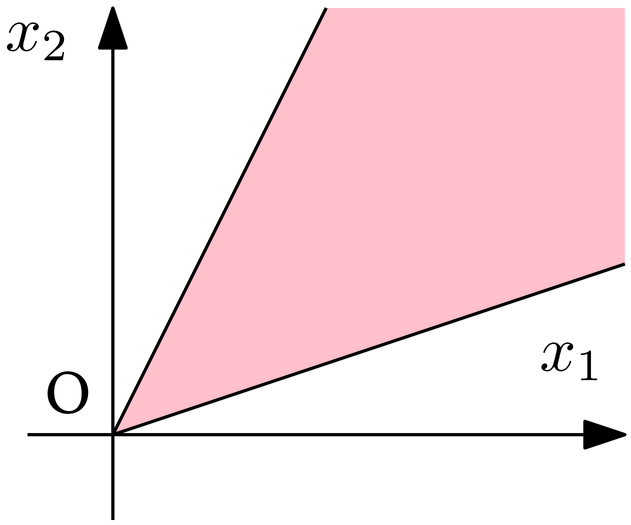
$$\mathrm{cone}(R) = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \boldsymbol{y}^j \,\middle|\, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0 \right\}$$

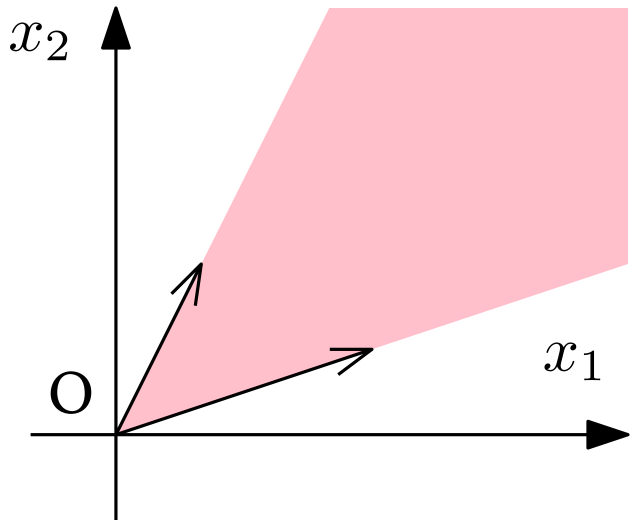




Minkowski–Weyl の定理 (凸多面錐版)

- 凸多面錐は ある有限ベクトル集合の錐包 である
- 有限ベクトル集合の錐包は 凸多面錐である

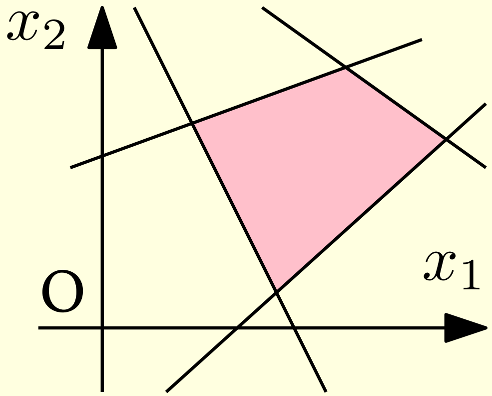




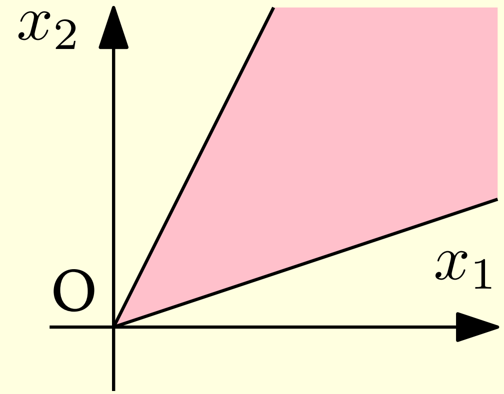
証明は この講義で扱わない

Minkowski–Weyl の定理の 3 バージョン

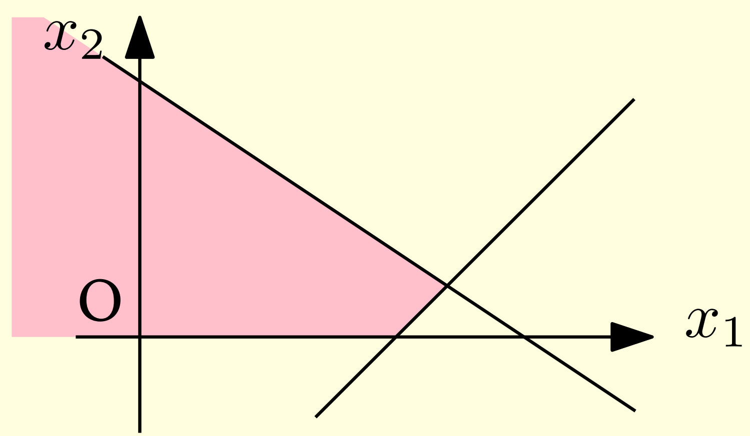
凸多面体版

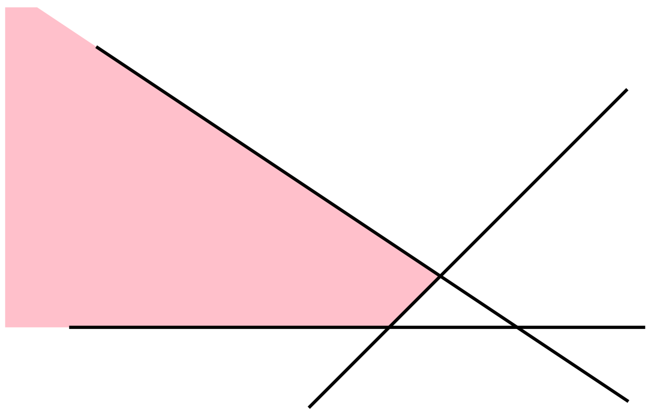


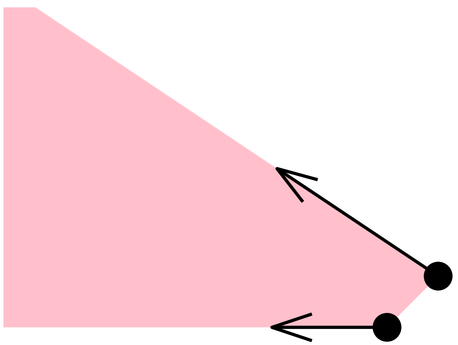
凸多面錐版



凸多面集合版







有限点集合の凸包

＋

有限ベクトル集合の錐包

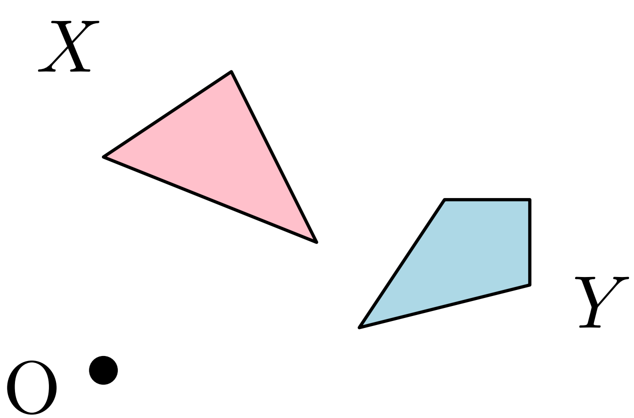
Minkowski 和

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：Minkowski 和 (Minkowski sum)

X と Y の **Minkowski 和** とは，次で定義される集合

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$



注：

X と Y が凸 $\Rightarrow$

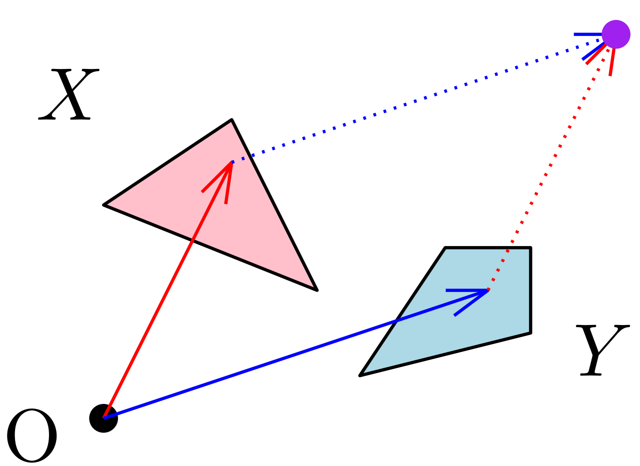
$X + Y$ も凸

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：Minkowski 和 (Minkowski sum)

X と Y の **Minkowski 和** とは，次で定義される集合

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$



注：

X と Y が 凸 $\Rightarrow$

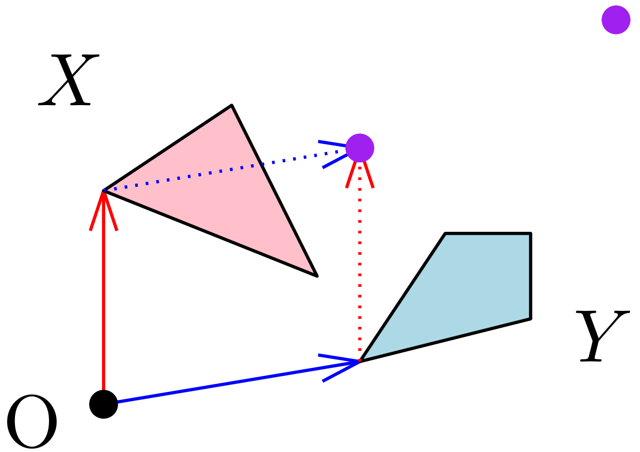
$X + Y$ も 凸

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：Minkowski 和 (Minkowski sum)

X と Y の **Minkowski 和** とは，次で定義される集合

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$



注：

X と Y が 凸 $\Rightarrow$

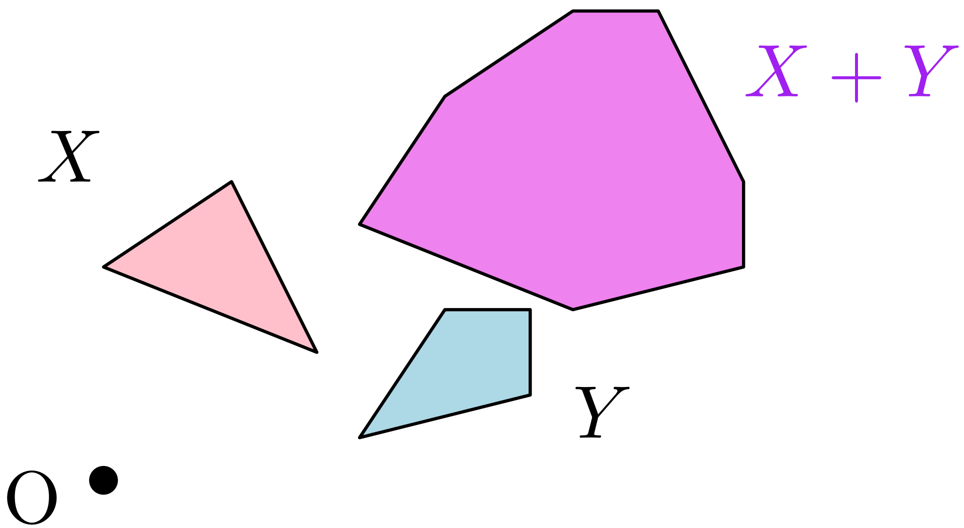
$X + Y$ も 凸

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：Minkowski 和 (Minkowski sum)

X と Y の **Minkowski 和** とは，次で定義される集合

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$



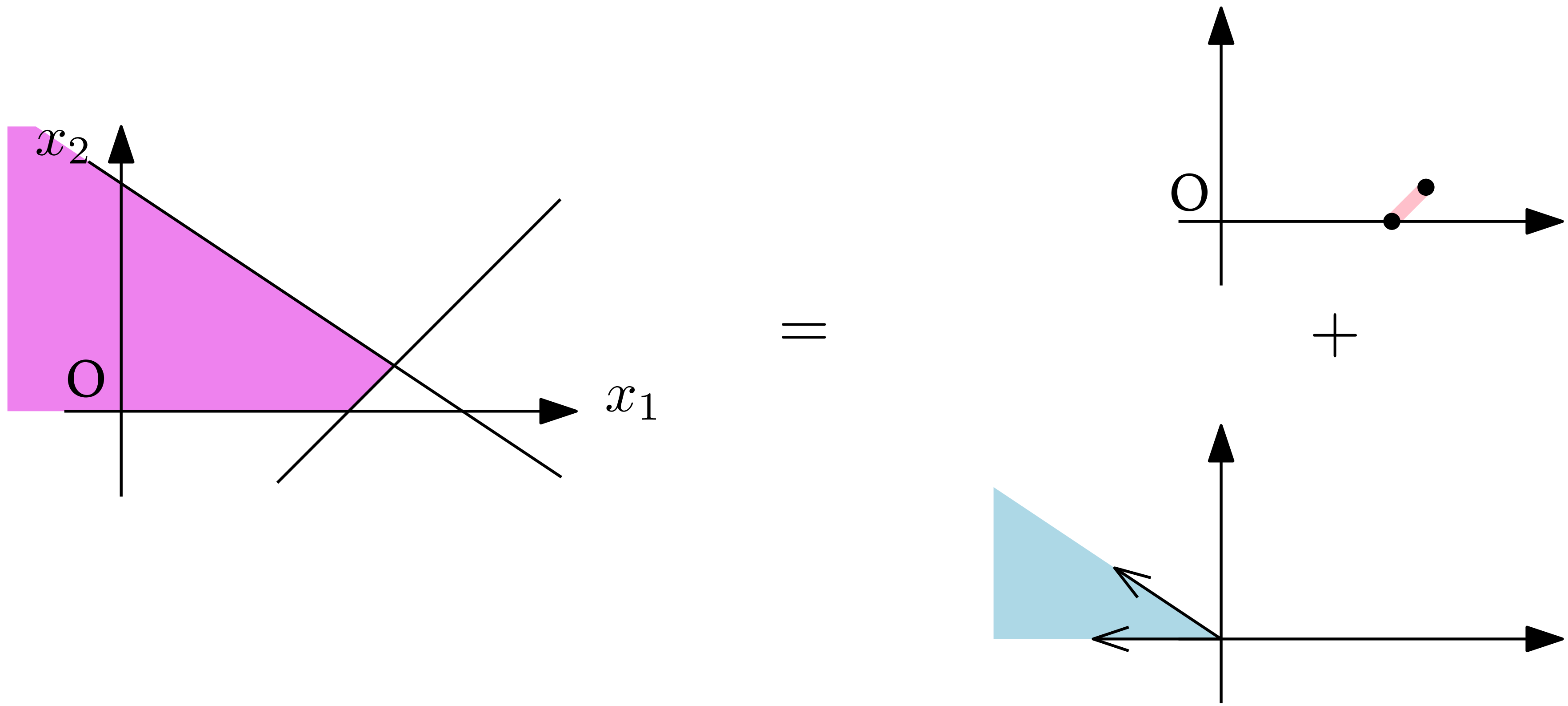
注：

X と Y が 凸 $\Rightarrow$

$X + Y$ も 凸

Minkowski–Weyl の定理 (凸多面集合版)

- 凸多面集合は ある有限点集合の凸包 と ある有限ベクトル集合の錐包 の Minkowski 和である
- 有限点集合の凸包と有限ベクトル集合の錐包の Minkowski 和は 凸多面集合である



Minkowski–Weyl の定理 (凸多面集合版)

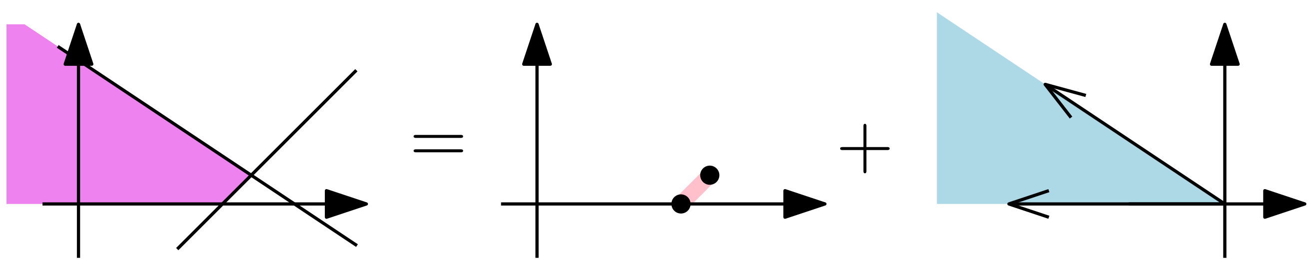
- 凸多面集合は ある有限点集合の凸包 と ある有限ベクトル集合の錐包 の Minkowski 和である

任意の凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，

ある有限点集合 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ と有限ベクトル集合 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ が

存在して，次が成立

$$P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(R)$$

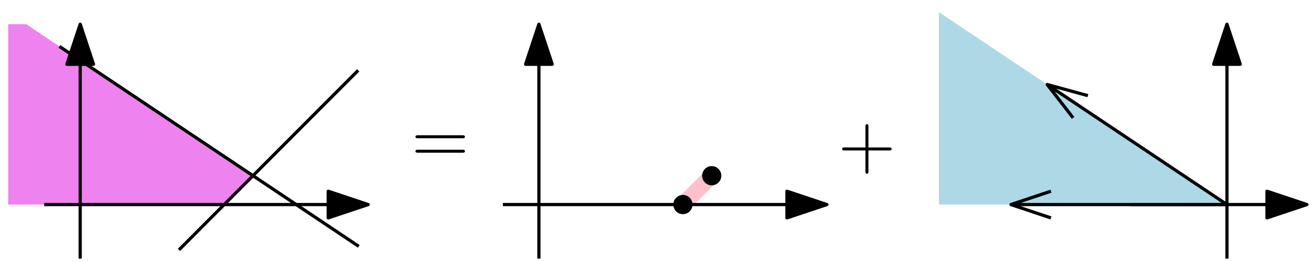


Minkowski–Weyl の定理：気分

任意の凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，
ある有限点集合 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ と有限ベクトル集合 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ が
存在して，次が成立

$$P = \underline{\mathrm{conv}(V)} + \underline{\mathrm{cone}(R)}$$

有界性の記述　非有界性の記述



Minkowski–Weyl の定理：別表現

任意の凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，
ある有限点集合 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ と有限ベクトル集合 $R \subseteq \mathbb{R}^n$ が
存在して，次が成立

$$P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(R)$$

$V = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$，$R = \{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^\ell\}$ とすると

$$P = \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}^i}_{\in\ \operatorname{conv}(V)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \boldsymbol{y}^j}_{\in\ \operatorname{cone}(R)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1, \\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \geq 0 \end{array} \right\}$$

事実 (証明しない)

V として，P の頂点全体の集合
R として，P の端線 (の方向ベクトル) 全体の集合を
考えればよい　　(P が頂点を持つとき)

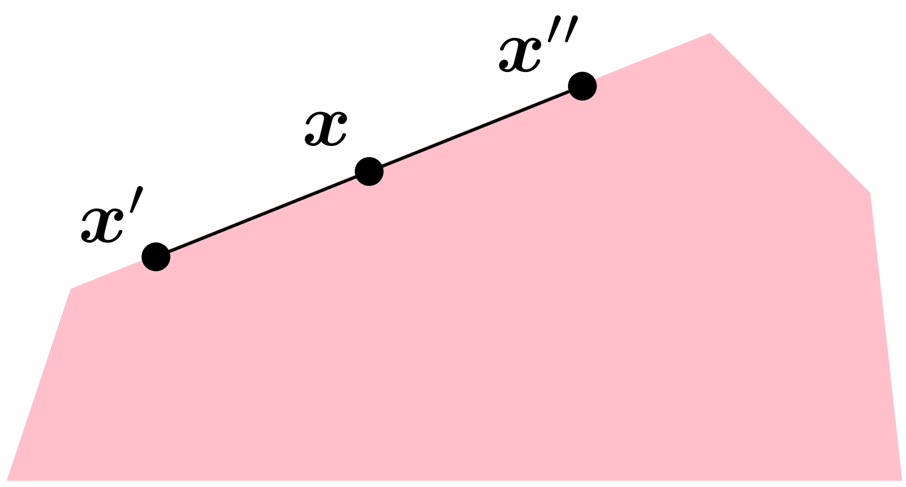
凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

性質：凸結合による頂点の特徴づけ

$\boldsymbol{x}$ が P の頂点 $\Leftrightarrow$
任意の $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in P$ に対して，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'') \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}''$$

$\Rightarrow$ の証明 (イメージ)



$\Leftarrow$ の証明 (アイディア)

$\boldsymbol{x}$ を相対的内部に含むような P の次元最大の面を考える

錐結合による端線の特徴づけ

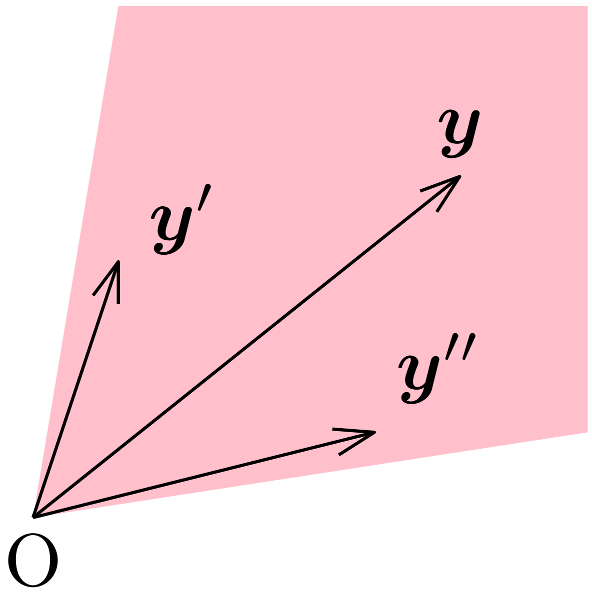
凸多面錐 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (頂点を持つ)

性質：錐結合による端線の特徴づけ

$\boldsymbol{y}$ が P の端線の方向ベクトル $\Leftrightarrow$
任意の $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'' \in P$ に対して,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}'' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}''$$

$\Rightarrow$ の証明 (イメージ)



$\Leftarrow$ の証明 (アイディア)

$\boldsymbol{y}$ を方向ベクトルとする

半直線を含むような

P の次元最大の面を考える

- Minkowski–Weyl の定理
- 双対定理
- 単体法と端点最適解

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

- Minkowski–Weyl の定理
- 双対定理
- 単体法と端点最適解

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：等式標準形

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：等式標準形

等式標準形 (standard form) ⟶ 別の最適化問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：等式標準形

等式標準形 (standard form) $\longrightarrow$ 別の最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

主問題 (primal)

$\boldsymbol{x}$：主変数 (primal variable)

双対問題 (dual)

$\boldsymbol{y}$：双対変数 (dual variable)

$\boxed{\text{注}}$：双対問題も線形計画問題

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：不等式標準形

不等式標準形 (canonical form)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：不等式標準形

不等式標準形 (canonical form) $\longrightarrow$ 別の最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：不等式標準形

不等式標準形 (canonical form) ⟶ 別の最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

主問題 (primal)

$\boldsymbol{x}$：主変数 (primal variable)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

双対問題 (dual)

$\boldsymbol{y}$：双対変数 (dual variable)

注：双対問題も線形計画問題

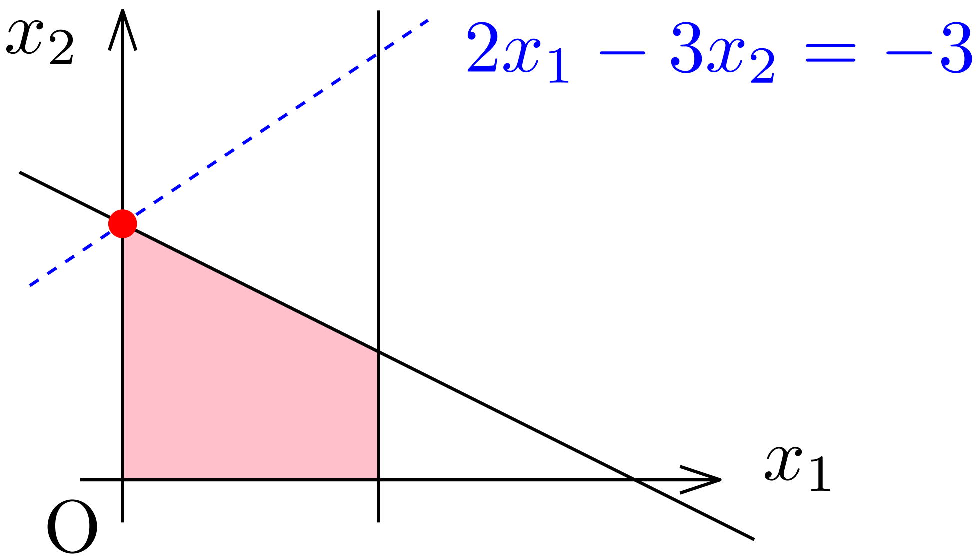
ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数　　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

双対問題：例

主問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & -x_1 \geq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



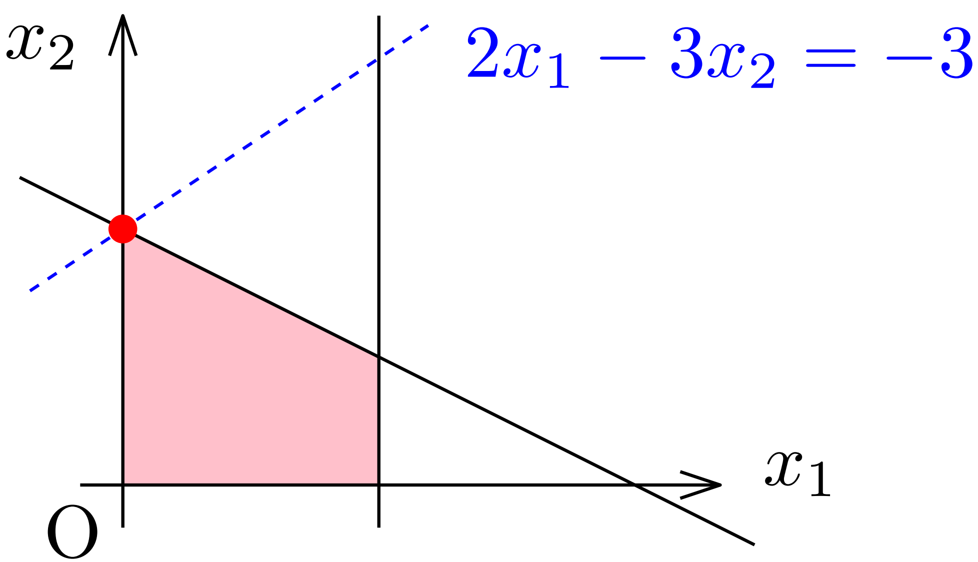
双対問題：例

主問題

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to}\ & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & -x_1 \geq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0\end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & -2y_1 - y_2 \\ \text{subject to}\ & -y_1 - y_2 \leq 2, \\ & -2y_1 \leq -3, \\ & y_1 \geq 0, \\ & y_2 \geq 0\end{aligned}$$



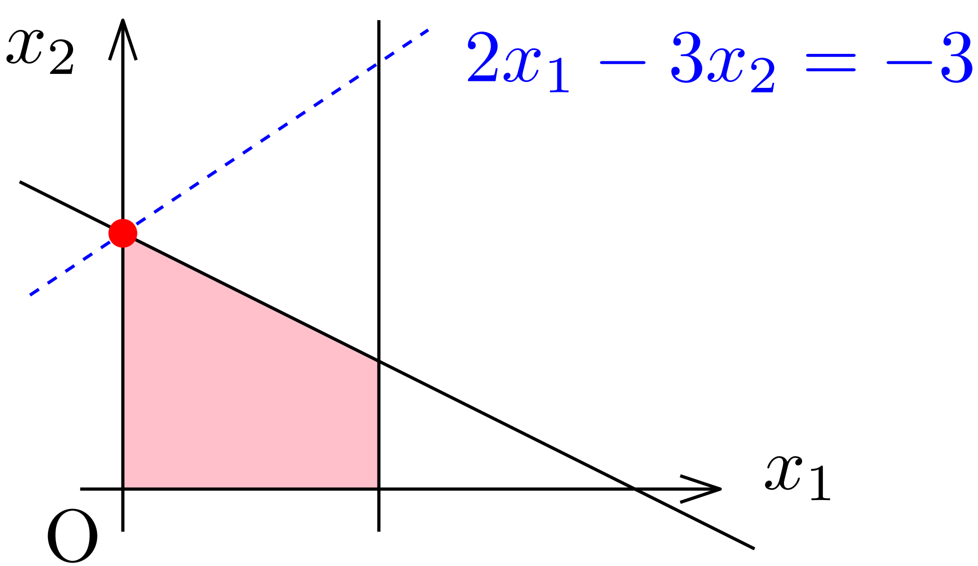
双対問題：例

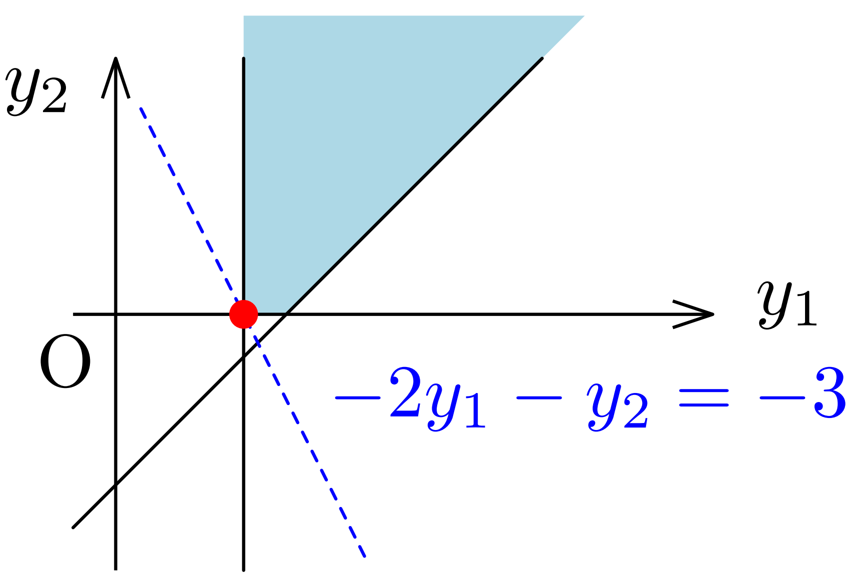
主問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ & -x_1 \geq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & -2y_1 - y_2 \\ \text{subject to} \quad & -y_1 - y_2 \leq 2, \\ & -2y_1 \leq -3, \\ & y_1 \geq 0, \\ & y_2 \geq 0 \end{aligned}$$





弱双対定理

主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

性質：弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題の許容解 $\boldsymbol{x}$，双対問題の許容解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

不等式標準形に対しても同様に成立

弱双対定理

主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

性質：弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題の許容解 $\boldsymbol{x}$，双対問題の許容解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

証明 $$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \underset{\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}}{=} (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \underset{\substack{A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}}}{\leq} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$ □

不等式標準形に対しても同様に成立

弱双対定理：気分

主問題 (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

性質：弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題の許容解 $\boldsymbol{x}$，双対問題の許容解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

目的関数の取りうる値

弱双対定理：気分

主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

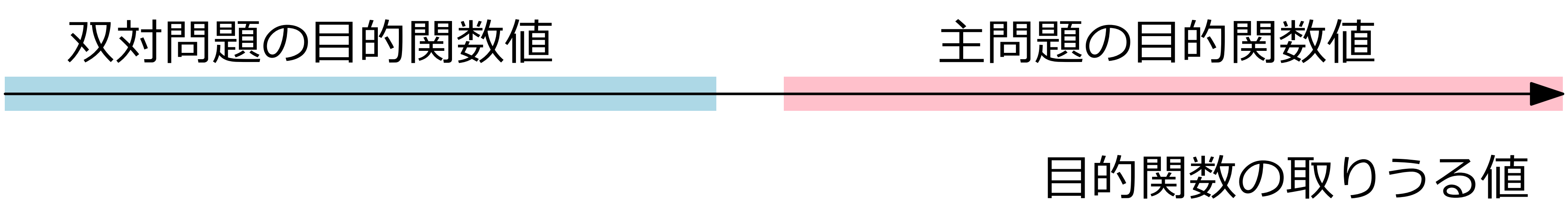
双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

性質：弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題の許容解 $\boldsymbol{x}$，双対問題の許容解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$



弱双対定理：気分

主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

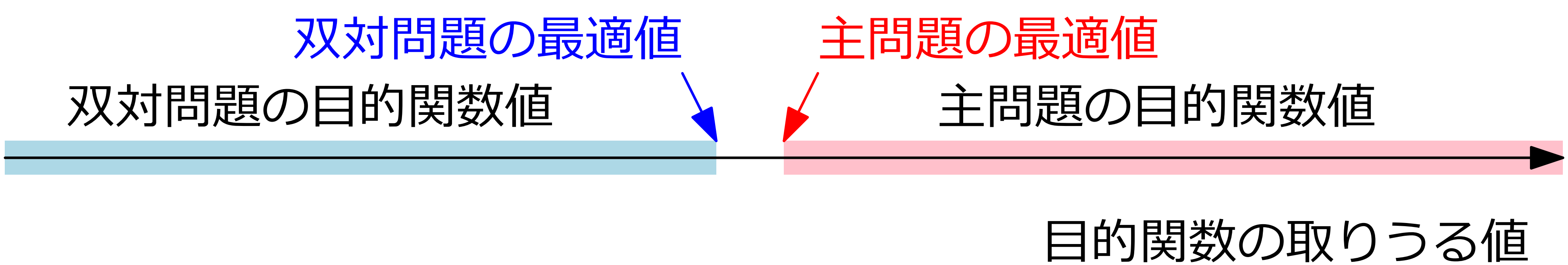
双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

性質：弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題の許容解 $\boldsymbol{x}$，双対問題の許容解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$



強双対定理

主問題 (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

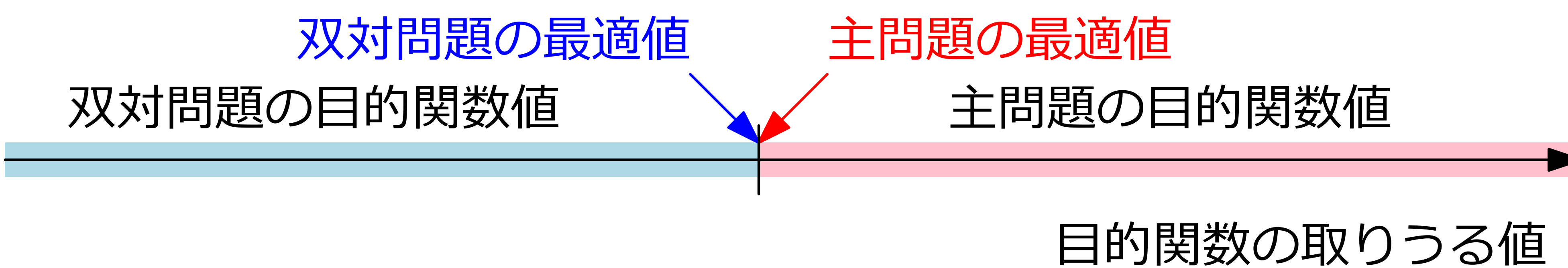
双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

性質：強双対定理 (strong duality theorem)

主問題と双対問題がともに許容解を持つ $\Rightarrow$
主問題の最適解 $\boldsymbol{x}^*$，双対問題の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$$



不等式標準形に対しても同様に成立

非許容な線形計画問題

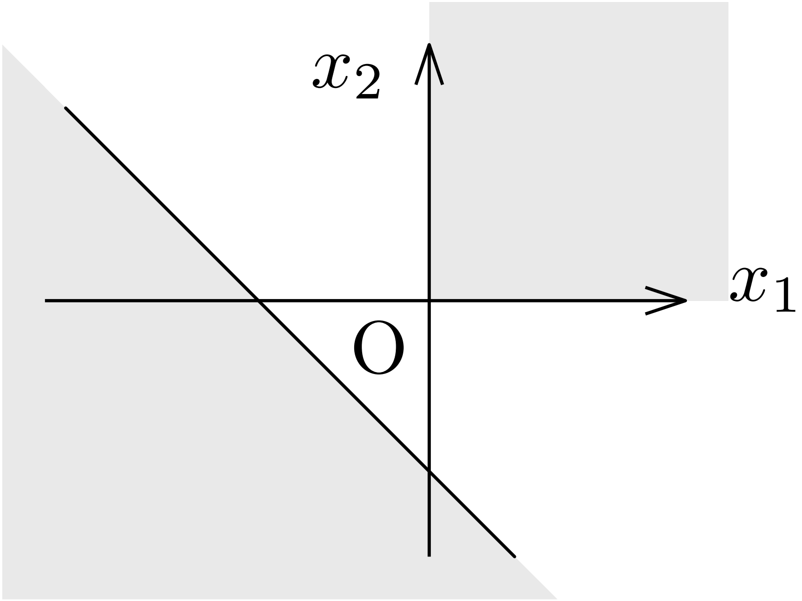
不等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

問題が **非許容** (infeasible) とは

許容解が存在しないこと

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - x_2 \geq 1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



非許容な線形計画問題に，最適解は存在しない

非有界な線形計画問題

不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

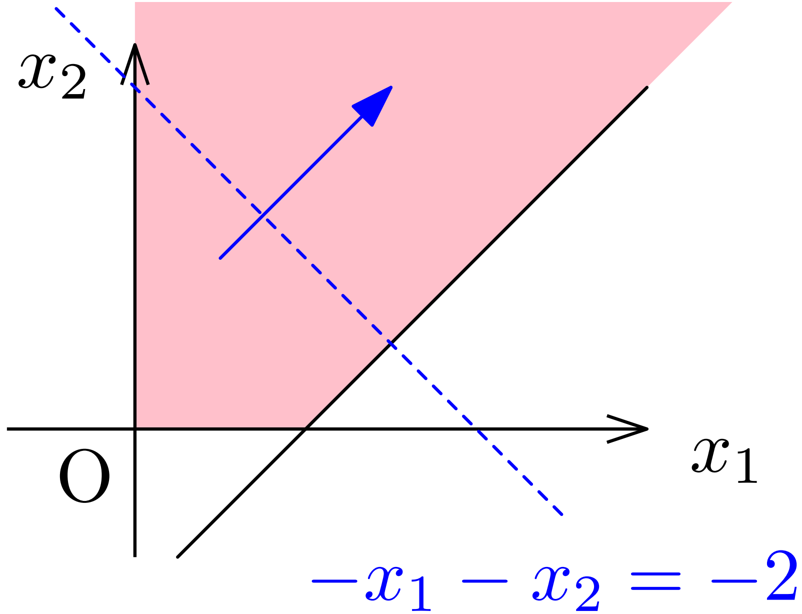
(最小化)

問題が **非有界** (unbounded) とは

目的関数値を任意に小さくする

許容解の列があること

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 + x_2 \geq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$



非有界な線形計画問題に，最適解は存在しない

非有界な線形計画問題：注

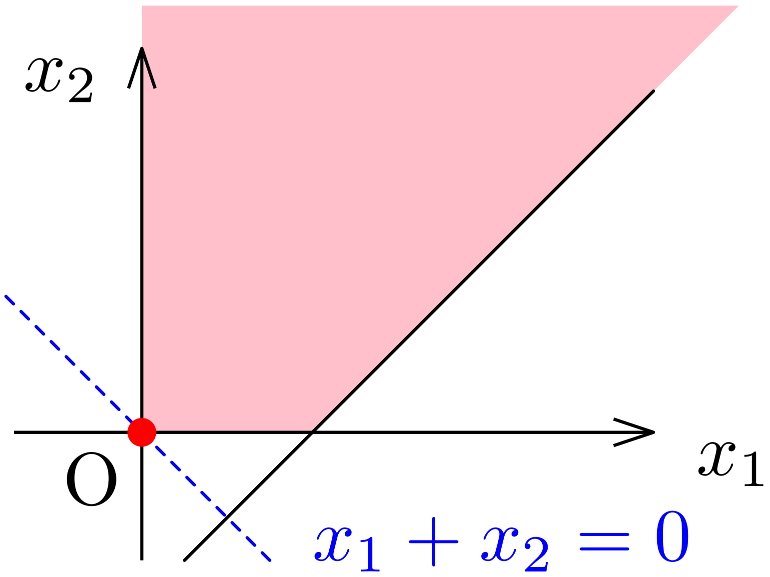
不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

(最小化)
問題が **非有界** (unbounded) とは
目的関数値を任意に小さくする
許容解の列があること

許容領域が非有界でも，最適解が存在することはある

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 + x_2 \geq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$



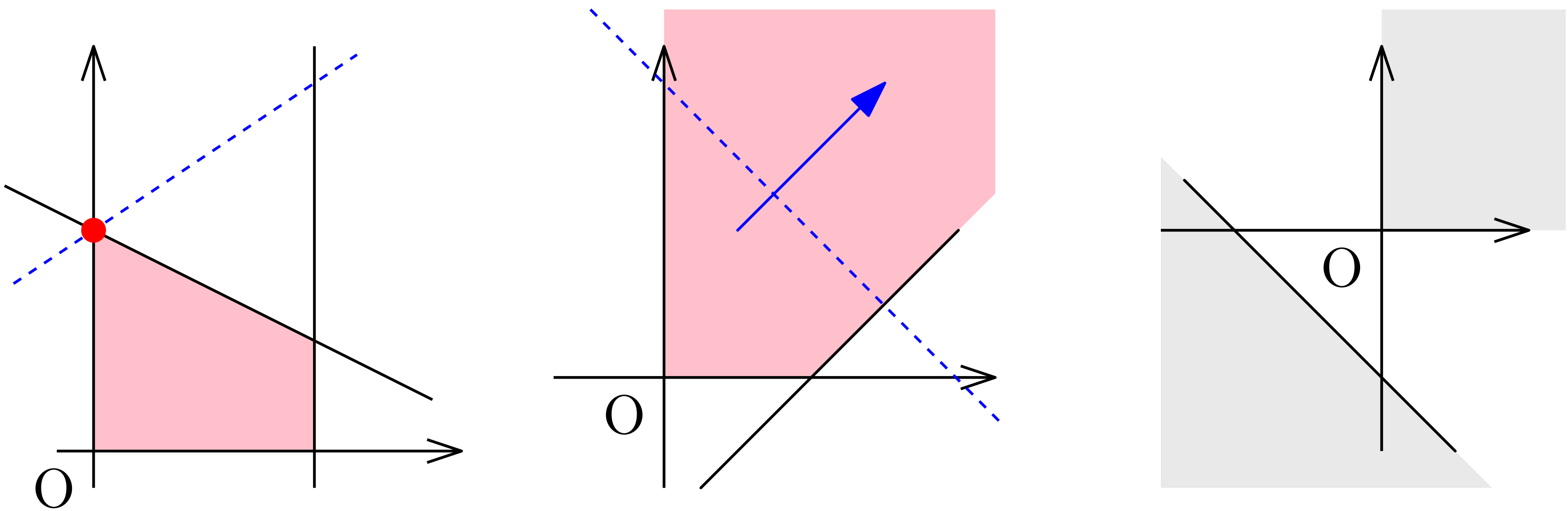
線形計画問題の三態

性質：線形計画問題の三態

任意の線形計画問題に対して, 次のどれか 1 つだけが成立

- 最適解が存在
- 非有界
- 非許容

この講義で 証明はしない



線形計画問題を解くとは？

定義：線形計画問題を解く とは？

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を与えて，
それらが定める線形計画問題が次のどれか判定する

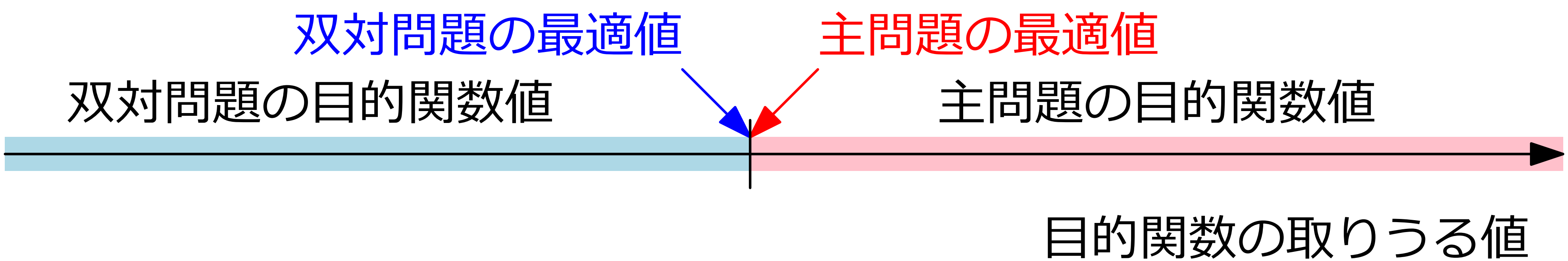
- 最適解が存在
- 非有界
- 非許容

そして，最適解が存在するとき，最適解を **1 つ**求めること

主問題と双対問題の関係

主問題 ＼ 双対問題	最適解存在	非有界	非許容
最適解存在	○	×	×
非有界	×	×	○
非許容	×	○	○

この講義で完全な証明はしない



- Minkowski–Weyl の定理
- 双対定理
- 単体法と端点最適解

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし,

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

- Minkowski–Weyl の定理
- 双対定理
- 単体法と端点最適解

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

最適値を達成する頂点

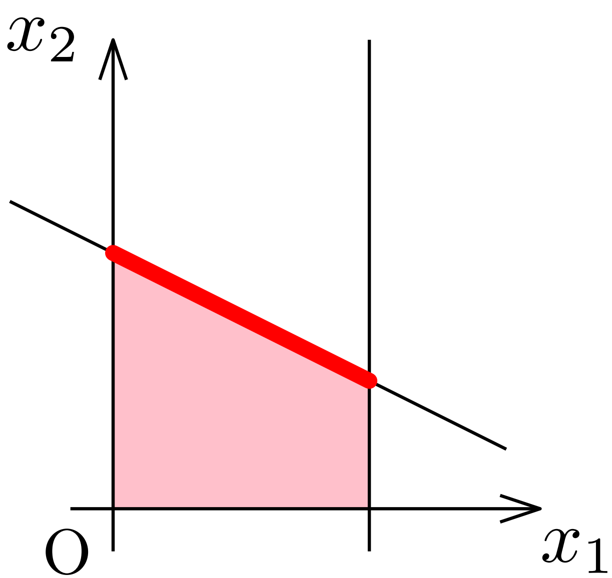
(fundamental theorem of linear programming)

性質：線形計画法の基本定理

等式標準形/不等式標準形の線形計画問題は
最適解を持つならば,
許容領域の頂点となる最適解を持つ

端点最適解

この講義で証明はしない



$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& -x_1 \geq -1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

多くの最適化ソルバーは線形計画問題に対して端点最適解を与える

等式標準形

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

許容領域

$$
P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\}
$$

$\overline{\boldsymbol{x}}$ が P の頂点 $\Rightarrow A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ $\quad$ $(\mathrm{rank}(A)$ 個の行が線形独立)

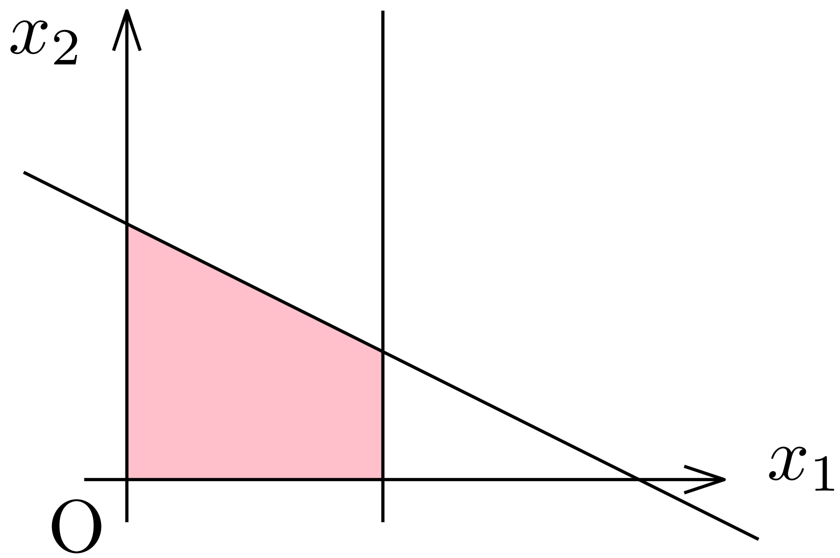
$\Rightarrow n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添字 i に対して，$\overline{x}_i = 0$

したがって，次のように頂点を特定できる

1. $\overline{x}_i = 0$ とする $n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添字 i を決める
2. 残りの添字 i について，$\overline{x}_i$ は $A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ を解いて決める
3. 構成できた $\overline{\boldsymbol{x}}$ が $\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}$ を満たすか確認する

以下，$m = \mathrm{rank}(A)$ と仮定

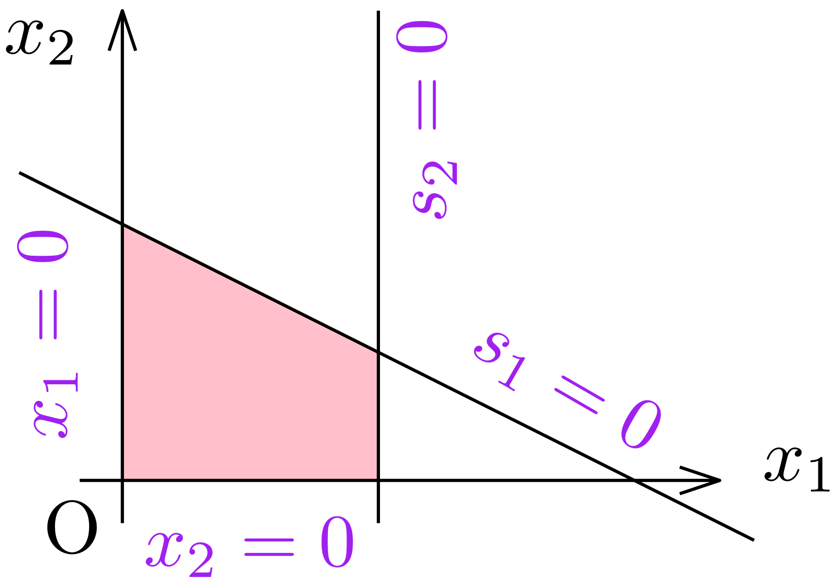
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& -x_1 \geq -1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



単体法：例 (準備)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& -x_1 \geq -1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\
& -x_1 - s_2 = -1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& s_1 \geq 0, \\
& s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

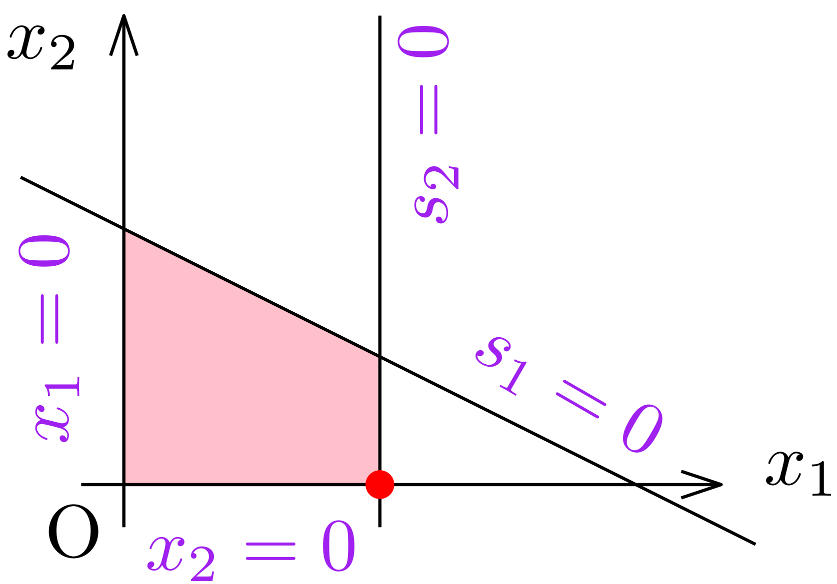


単体法：例 (1)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_2 = s_2 = 0$ と決めると

$$\begin{aligned} -x_1 - s_1 &= -2 \\ -x_1 &= -1 \end{aligned}$$

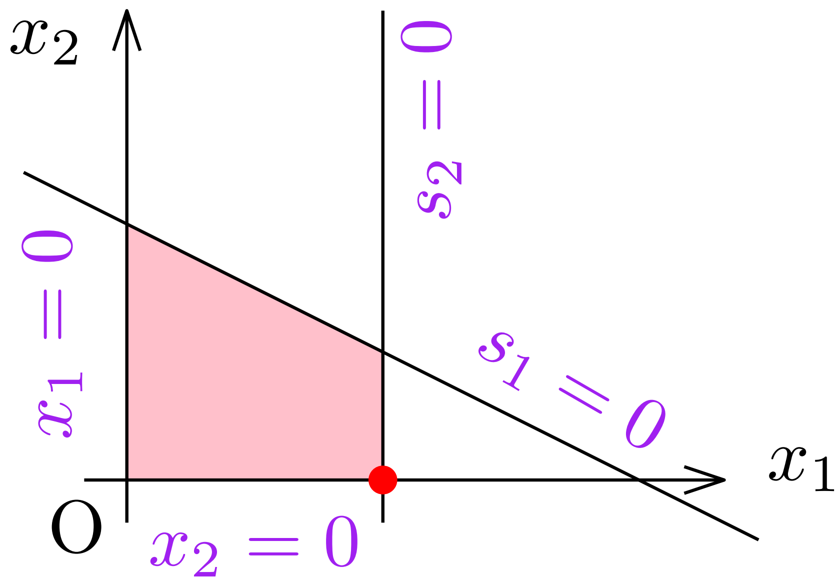


$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_2 = s_2 = 0$ と決めると

$$\begin{aligned} -x_1 - s_1 &= -2 \\ -x_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 = 1, s_1 = 1$$



$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\underline{x_2 = s_2 = 0}$ と決めると

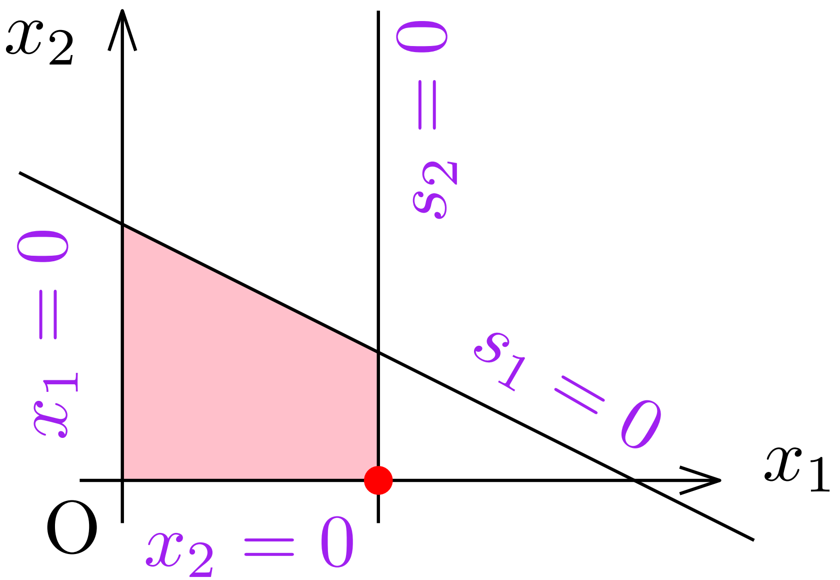
$$-x_1 - s_1 = -2$$

$$-x_1 = -1$$

$$\therefore \quad \underline{x_1 = 1, s_1 = 1}$$

非基底変数

基底変数



単体法：例 (1)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

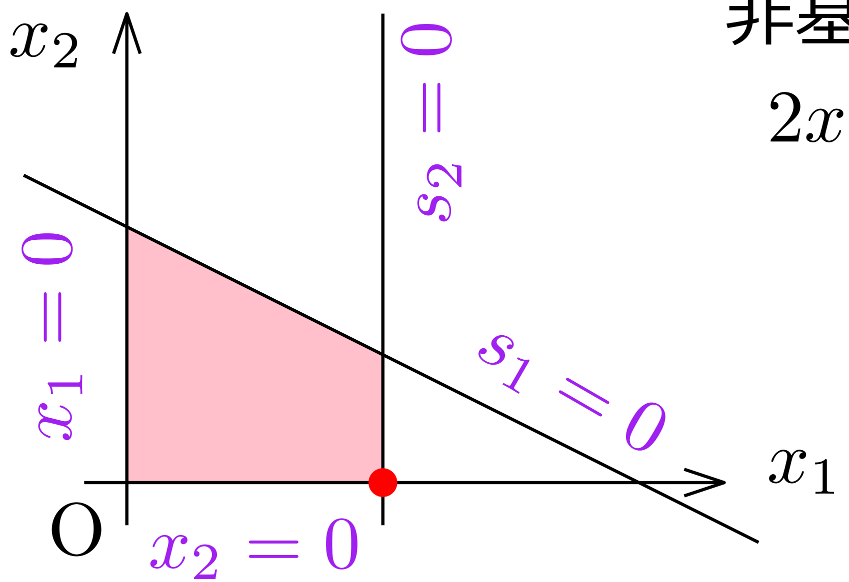
$\underline{x_2 = s_2 = 0}$ と決めると

非基底変数

$$\begin{aligned} -x_1 - s_1 &= -2 \\ -x_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{x_1 = 1, s_1 = 1}$$

基底変数



目的関数から基底変数を消して，非基底変数だけで書く

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 2(1 - s_2) - 3x_2 \\ &= 2 - 3x_2 - 2s_2 \end{aligned}$$

単体法：例 (1)

minimize $2x_1 - 3x_2$

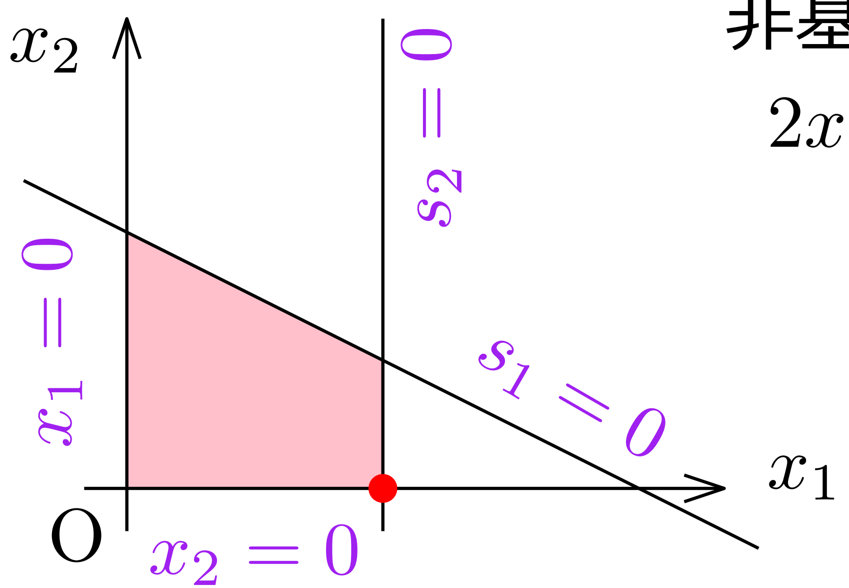
subject to $-x_1 - 2x_2 - s_1 = -2,$
$-x_1 - s_2 = -1,$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

$\underline{x_2 = s_2 = 0}$ と決めると

$$-x_1 - s_1 = -2$$
$$-x_1 = -1$$
$$\therefore \quad \underline{x_1 = 1, s_1 = 1}$$

非基底変数

基底変数



目的関数から基底変数を消して，
非基底変数だけで書く

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 2(1 - s_2) - 3x_2 \\ &= 2 \underline{- 3}x_2 \underline{- 2}s_2 \end{aligned}$$

x_2, s_2 を増やすと，
目的関数値が減る

単体法：例 (1)

minimize $2x_1 - 3x_2$

subject to
$$-x_1 - 2x_2 - s_1 = -2,$$
$$-x_1 - s_2 = -1,$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$\underline{x_2 = s_2 = 0}$ と決めると

非基底変数

$$-x_1 - s_1 = -2$$
$$-x_1 = -1$$

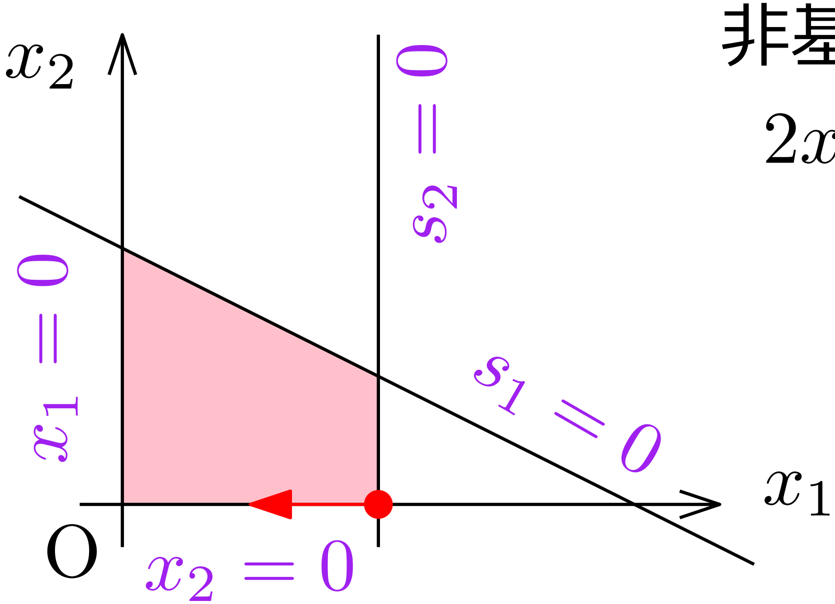
$\therefore \quad \underline{x_1 = 1, s_1 = 1}$

基底変数

目的関数から基底変数を消して，非基底変数だけで書く

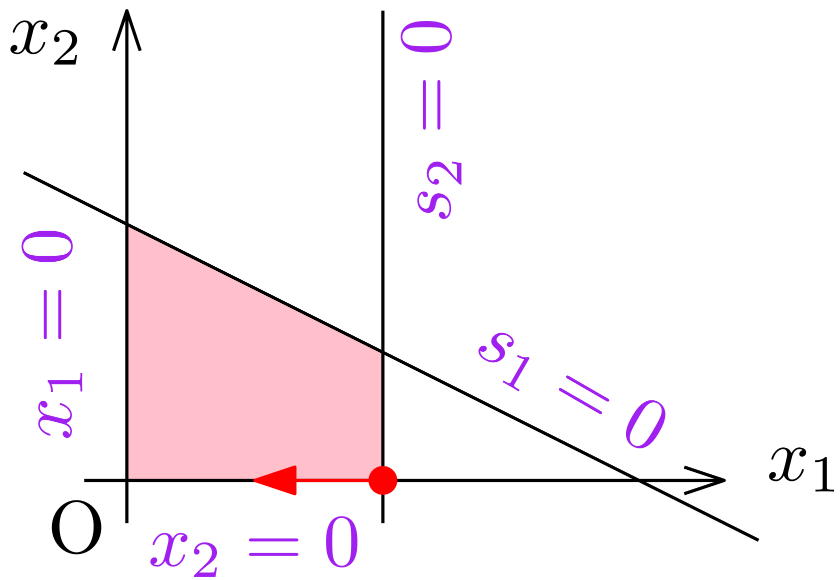
$$2x_1 - 3x_2 = 2(1 - s_2) - 3x_2$$
$$= 2 \underline{- 3x_2} \underline{- 2s_2}$$

x_2, s_2 を増やすと，目的関数値が減る



$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = 0, s_2 > 0$$

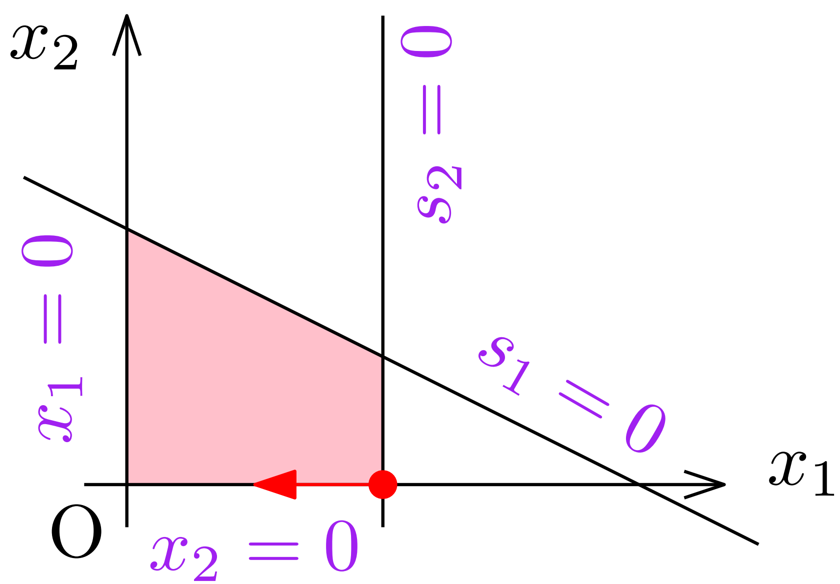


単体法：例 (2)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_2 = 0, s_2 > 0$

$$-x_1 - s_1 = -2$$
$$-x_1 = -1 + s_2$$
$$\therefore \quad s_1 = 1 + s_2$$
$$x_1 = 1 - s_2$$

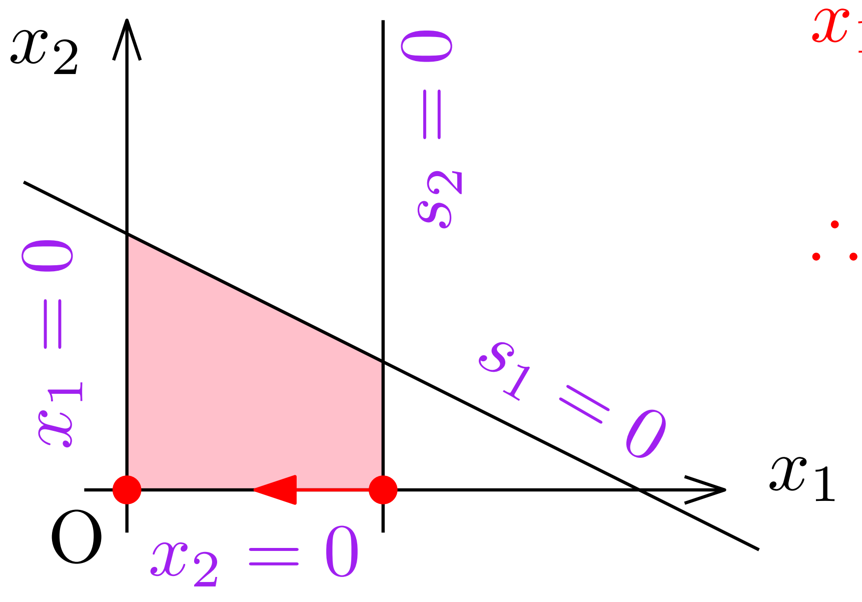


単体法：例 (2)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = 0, s_2 > 0$$

$$\begin{aligned} -x_1 - s_1 &= -2 \\ -x_1 &= -1 + s_2 \\ \therefore \quad s_1 &= 1 + s_2 \\ x_1 &= 1 - s_2 \end{aligned}$$



s_2 を増やすと

x_1 が最も早く 0 になる

$\therefore$ 新しい非基底変数は x_2, x_1

単体法：例 (3)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2, \\ & -x_1 - s_2 = -1, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

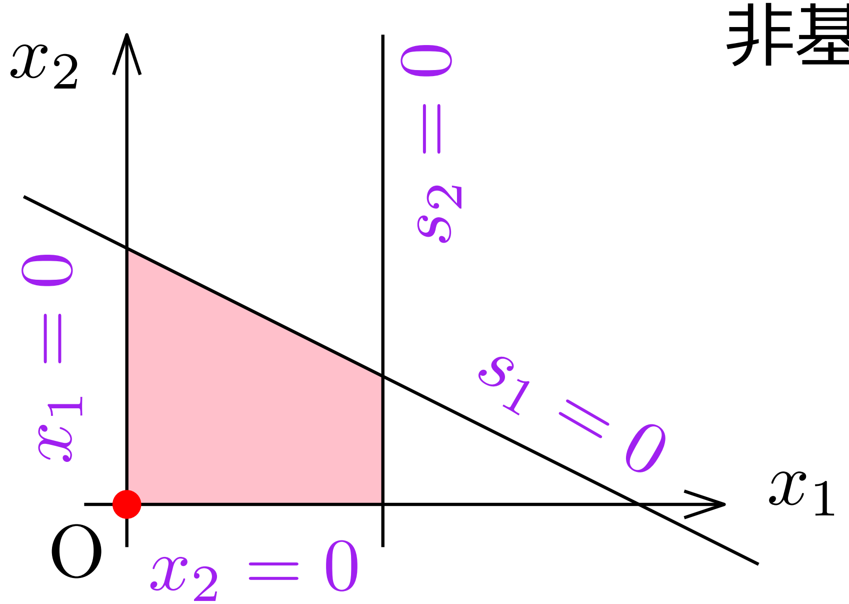
$\underline{x_1 = x_2 = 0}$ と決めると

$$\begin{aligned} -s_1 &= -2 \\ -s_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{s_1 = 2, s_2 = 1}$$

非基底変数

基底変数



目的関数から基底変数を消して，
非基底変数だけで書く

$$2x_1 \underline{- 3x_2}$$

x_2 を増やすと，
目的関数値が減る

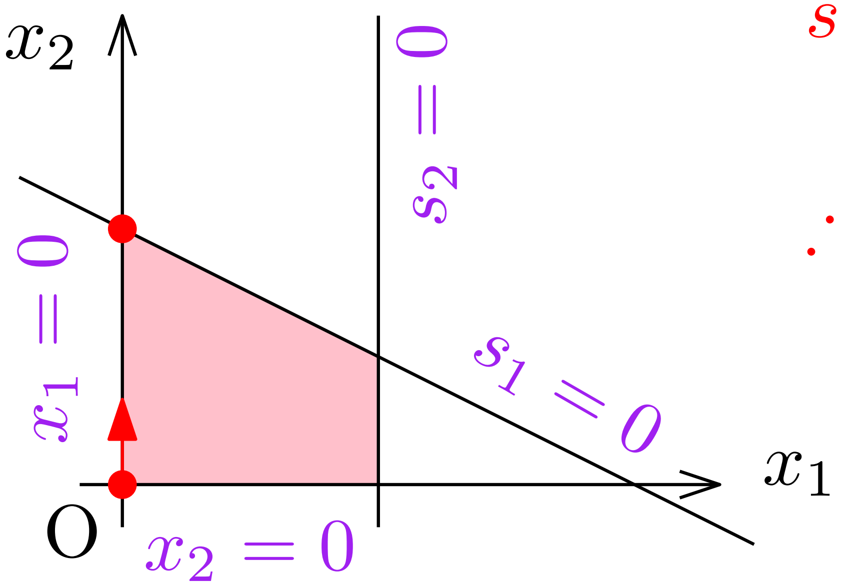
単体法：例 (4)

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & 2x_1 - 3x_2\\ \text{subject to}\quad & -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2,\\ & -x_1 - s_2 = -1,\\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\end{aligned}$$

$$x_1 = 0, x_2 > 0$$

$$\begin{aligned}-s_1 &= -2 + 2x_2\\ -s_2 &= -1\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{aligned}s_1 &= 2 - 2x_2\\ s_2 &= 1\end{aligned}$$



x_2 を増やすと

s_1 が最も早く 0 になる

$\therefore$ 新しい非基底変数は x_1, s_1

minimize $\quad 2x_1 - 3x_2$

subject to $\quad -x_1 - 2x_2 - s_1 = -2,$
$-x_1 - s_2 = -1,$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

$\underline{x_1 = s_1 = 0}$ と決めると

$$-2x_2 = -2$$
$$-s_2 = -1$$

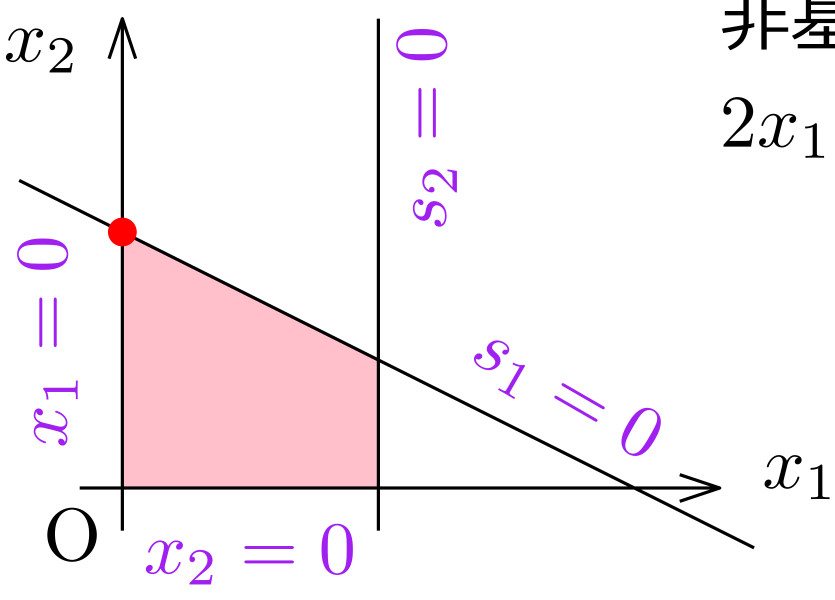
$\therefore \quad \underline{x_2 = 1, s_2 = 1}$

非基底変数

基底変数

目的関数から基底変数を消して，
非基底変数だけで書く

$$2x_1 - 3x_2 = 2x_1 - 3(2 - x_1 - s_1)/2$$
$$= -3 + 5x_1 + 3s_1/2$$



x_1, s_1 を増やしても
目的関数値が減らない
$\therefore$ この頂点は最適解

単体法：一般論 (1)

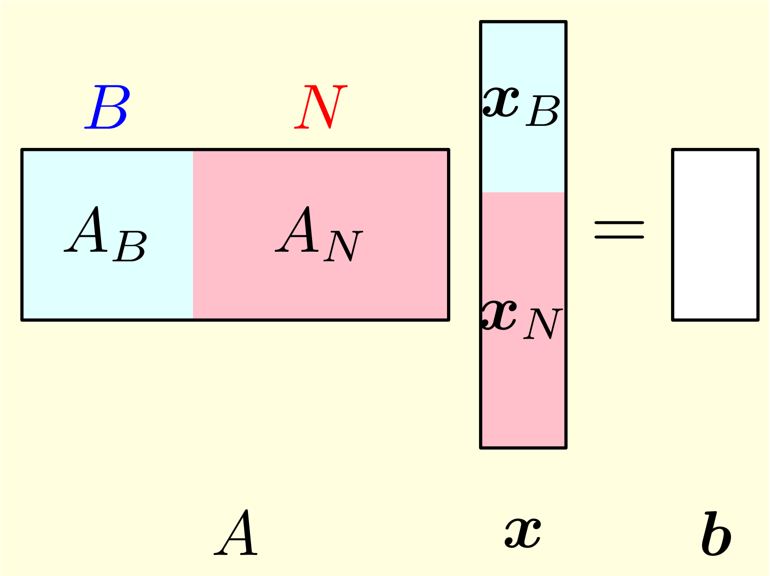
等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合



単体法：一般論 (1)

等式標準形

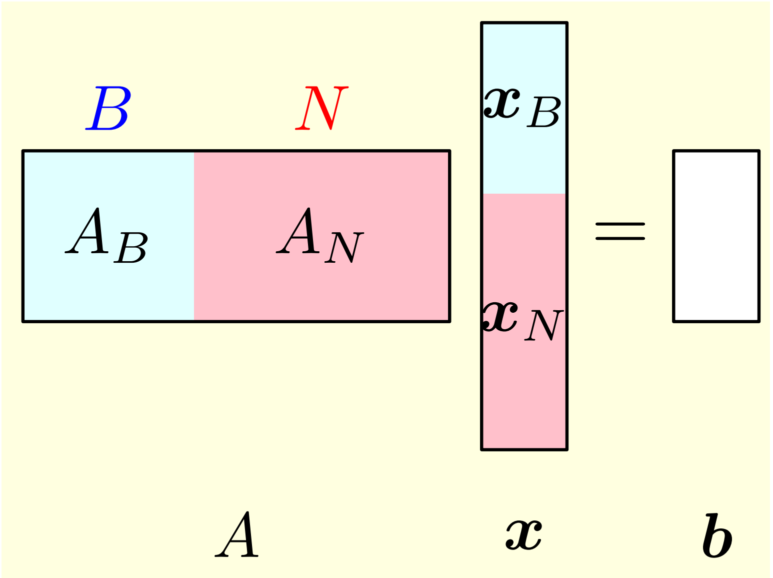
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$



単体法：一般論 (1)

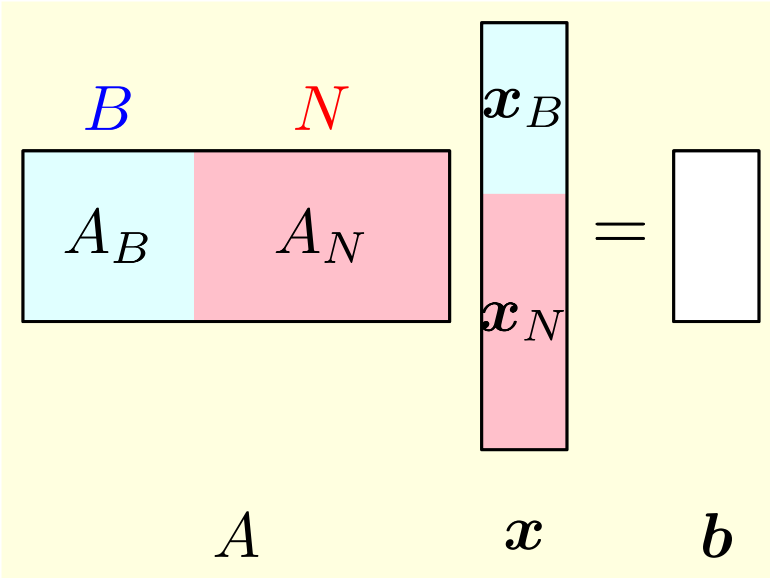
等式標準形

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合



$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

単体法：一般論 (1)

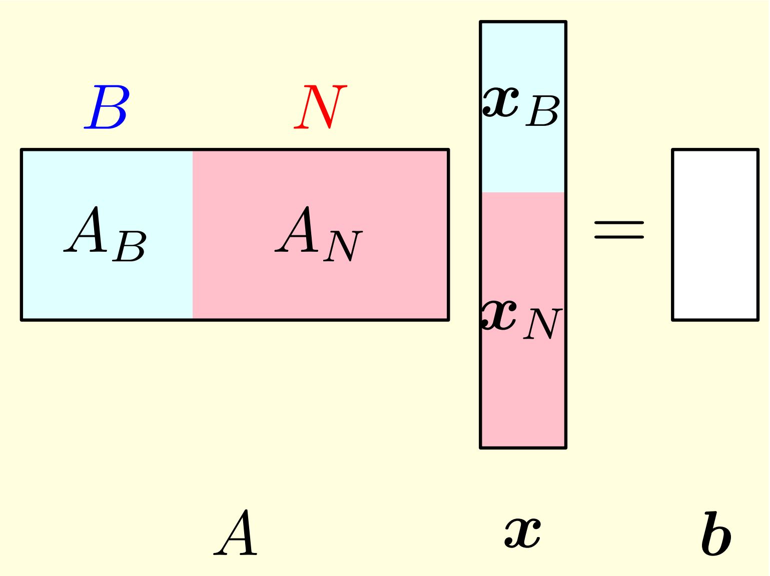
等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合



$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

単体法：一般論 (1)

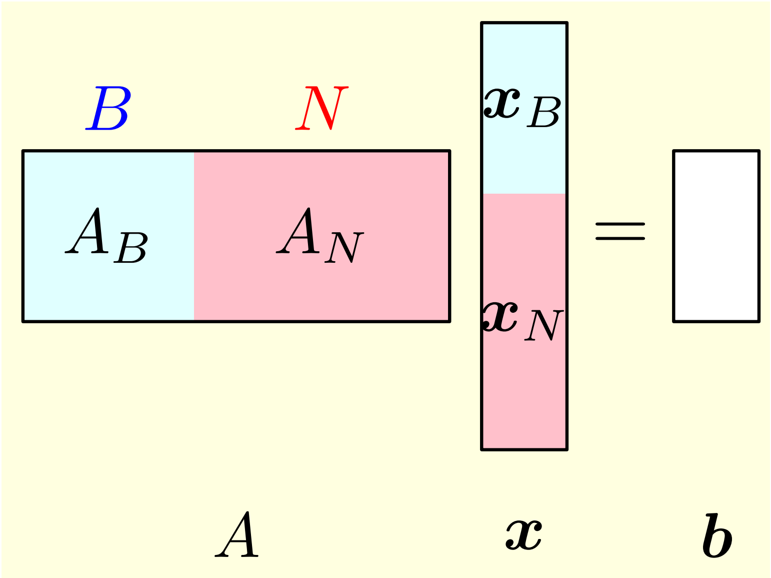
等式標準形

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$N =$ 非基底変数の添字集合

$B =$ 基底変数の添字集合



$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B \boldsymbol{x}_B + A_N \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} (A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)} \boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

負である成分がある $\Rightarrow$ 目的関数値を減らせる

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ とする

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

単体法：一般論 (2)

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y} = (A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B$ と置く

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ とする

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

単体法：一般論 (2)

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ とする

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると $\quad \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{y} = (A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B$ と置く

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} &= A^{\mathrm{T}}(A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \\ &= \begin{bmatrix} A_B^{\mathrm{T}} \\ A_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ A_N^{\mathrm{T}}(A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{y}$ は双対許容解である

単体法：一般論 (3)

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y} = (A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B$ と置く

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(A_B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \\ &= (A_B^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \\ &= \boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B \\ &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \underbrace{\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N}_{=\boldsymbol{0}} \\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

双対定理より，
$\boldsymbol{x}$ は最適解である

単体法：一般論 (4)

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N
\end{aligned}
$$

負である成分がある $\Rightarrow$ 目的関数値を減らせる

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると $\quad \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

どれだけ減らせるか？

単体法：一般論 (4)

$(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)_i < 0$ とする　$(i \in N)$

$x_{i'} = 0 \ (\forall\, i' \in N - \{i\})$ とすると

$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - \underline{(A_B^{-1}A_N)_i} x_i$　　$A_B^{-1}A_N$ の第 i 列

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underline{(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)}\boldsymbol{x}_N
\end{aligned}$$

負である成分がある $\Rightarrow$
目的関数値を減らせる

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると　$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

どれだけ減らせるか？

単体法：一般論 (4)

$(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1} A_N)_i < 0$ とする　$(i \in N)$

$x_{i'} = 0\ (\forall\, i' \in N - \{i\})$ とすると

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - \underline{(A_B^{-1}A_N)_i}\, x_i$$

$A_B^{-1}A_N$ の第 i 列

(1) x_i を増やしたとき，はじめて $x_j = 0$ となる $j \in B$ に対して

- N を $N - \{i\} \cup \{j\}$ に更新

(2) そのような $j \in B$ がない場合

- 問題は非有界
- $x_{i'} = 0\ (i' \in N - \{i\})$ が許容領域の端線 (の 1 つ) を表す

$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} A_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

どれだけ減らせるか？

単体法：非有界な例 (1)

minimize $-x_1 - 3x_2$

subject to $x_1 - x_2 - s_1 = -1,$

$x_1, x_2, s_1 \geq 0$

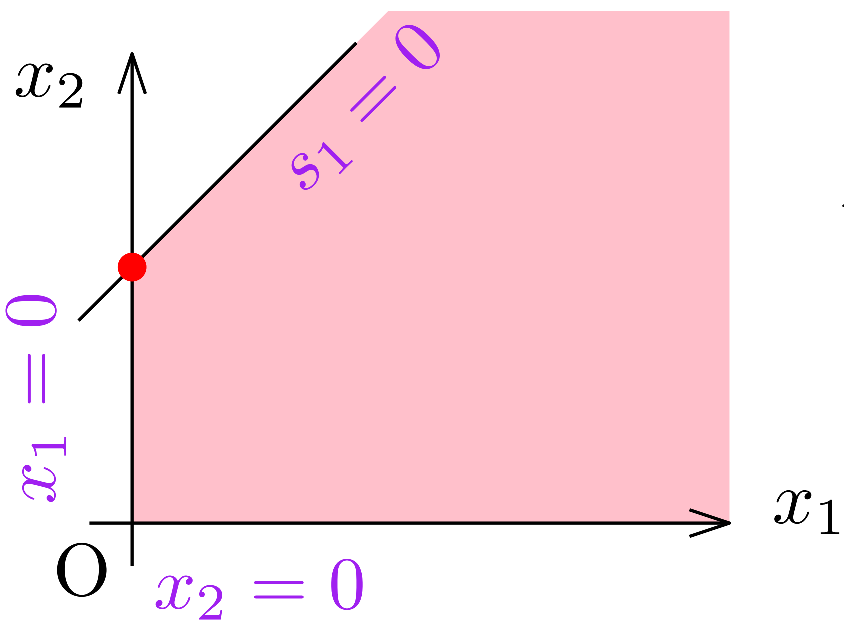
$\underline{x_1 = s_1 = 0}$ と決めると

$$-x_2 = -1$$

$$\therefore \quad \underline{x_2 = 1}$$

基底変数

非基底変数



目的関数から基底変数を消して，
非基底変数だけで書く

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 &= -x_1 - 3(x_1 - s_1 + 1) \\ &= -3 \underline{- 4}x_1 + 3s_1 \end{aligned}$$

x_1 を増やすと，
目的関数値が減る

単体法：非有界な例 (2)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 - s_1 = -1, \\ & \quad x_1, x_2, s_1 \geq 0 \end{array}$$

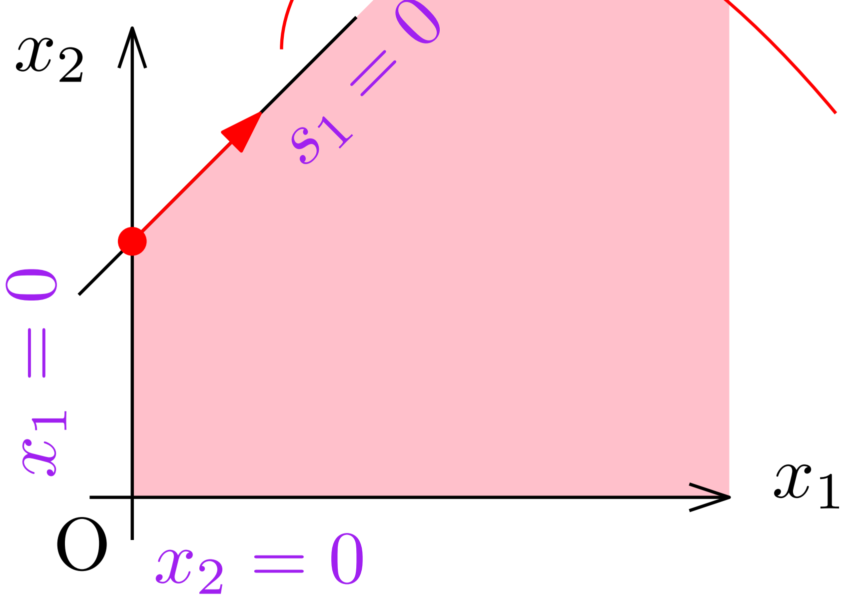
$$s_1 = 0, x_1 > 0$$

$$x_2 = 1 + x_1$$

x_1 を増やしても

x_2 は 0 にならない

$\therefore$ 問題は非有界



端線 $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \mu \geq 0 \right\}$

に沿って，目的関数値が減り続ける

次回の内容

線形計画緩和
- 整数計画法アルゴリズムの基本アイディア