離散最適化基礎論

第 2 回

線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 10 月 11 日

最終更新：2022 年 10 月 11 日　22:23

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

＊ 休み (国内出張) (12/27)

＊ 休み (冬季休業) (1/3)

12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

今日の内容

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- 頂点の特定

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

今日の内容

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- 頂点の特定

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形不等式系

$m, n \geq 1$ は自然数

定義：線形不等式系 (system of linear inequalities)

線形不等式系 とは，次のように書ける不等式

$$A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は定数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数

例：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$

線形不等式系

$m, n \geq 1$ は自然数

定義：線形不等式系 (system of linear inequalities)

線形不等式系 とは，次のように書ける不等式

$$A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は定数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数

例：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} \geq \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

$m, n \geq 1$ は自然数

定義：線形不等式系 (system of linear inequalities)

線形不等式系 とは，次のように書ける不等式

$$A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は定数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数

例：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} \geq \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

$m =$ 不等式の総数

$n =$ 変数の総数

線形不等式系の解

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は定数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数

定義：線形不等式系の解 (solution)

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ が線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ の **解** であるとは,

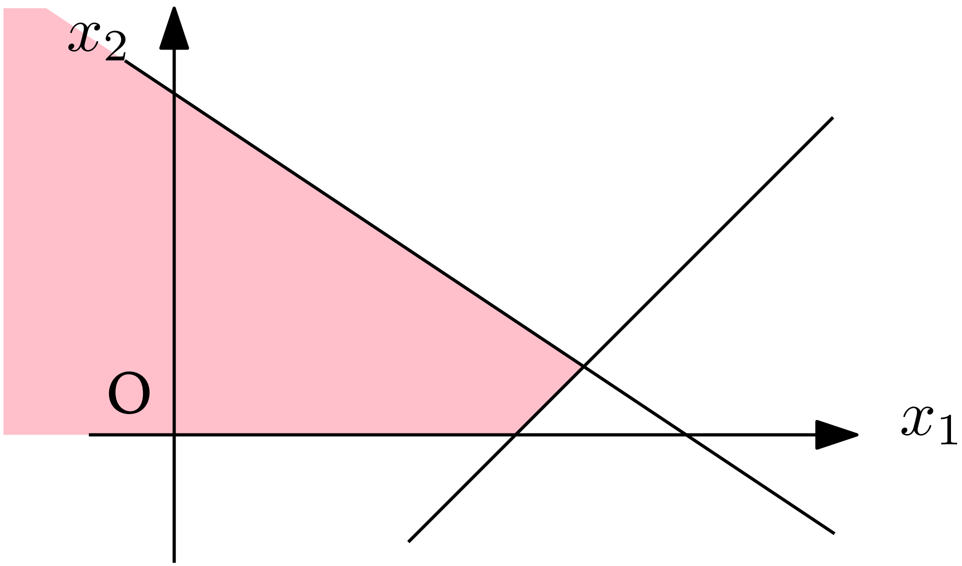
$$A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}$$

を満たすこと

例：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$

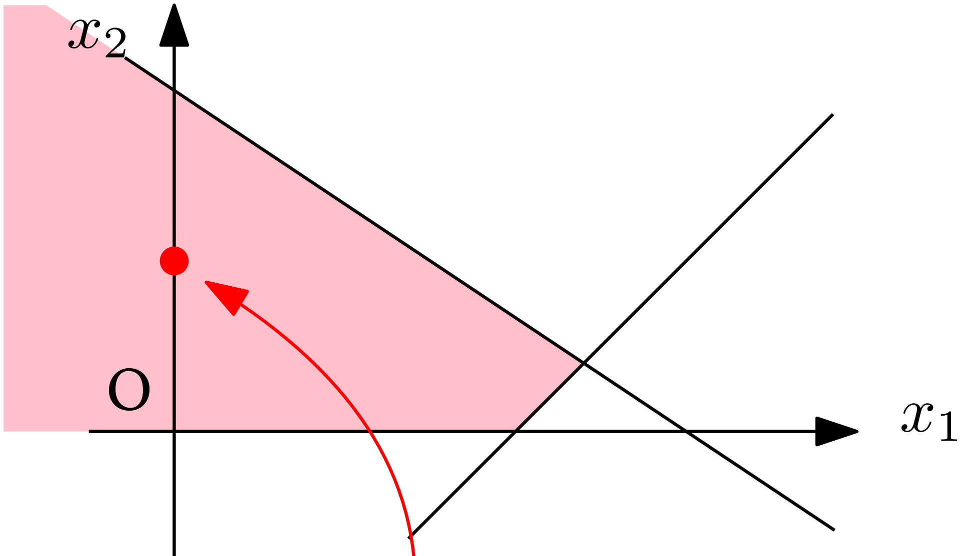
$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は この線形不等式系の解である



$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は この線形不等式系の解である

線形不等式系の解：図示



$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ \qquad\qquad\; x_2 \geq 0, \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{z} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ は この線形不等式系の解である

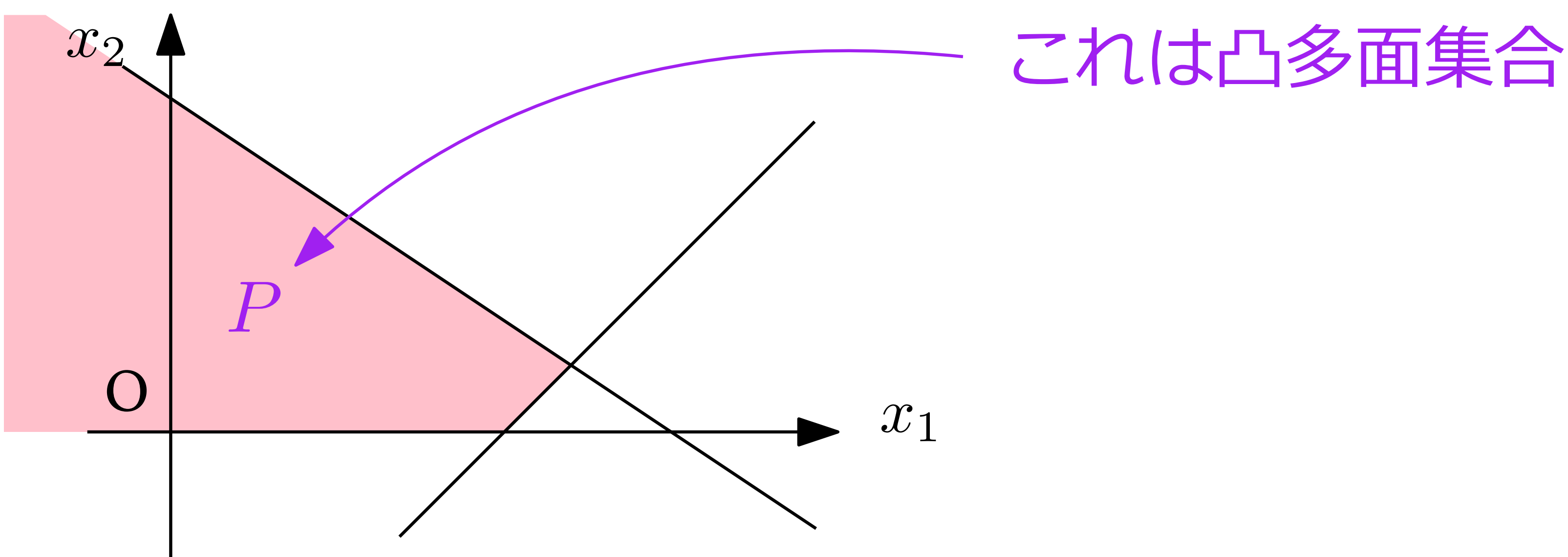
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ は自然数)

定義：凸多面集合 (convex polyhedron)

P が **凸多面集合** であるとは,
ある線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ を用いて

$$P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$$

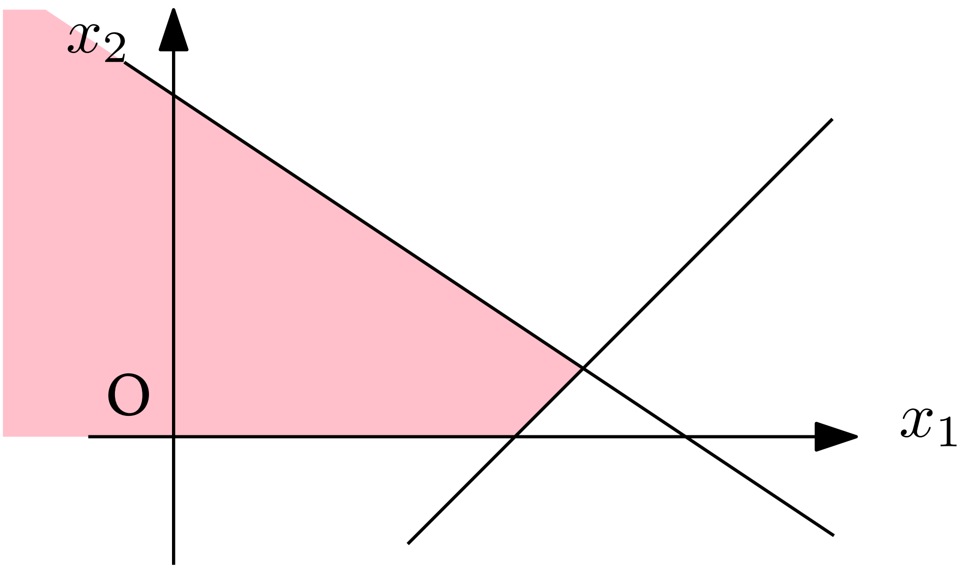
と書けること



線形不等式系と凸多面集合の関係 (1)

線形不等式系 $\longrightarrow$ 凸多面集合

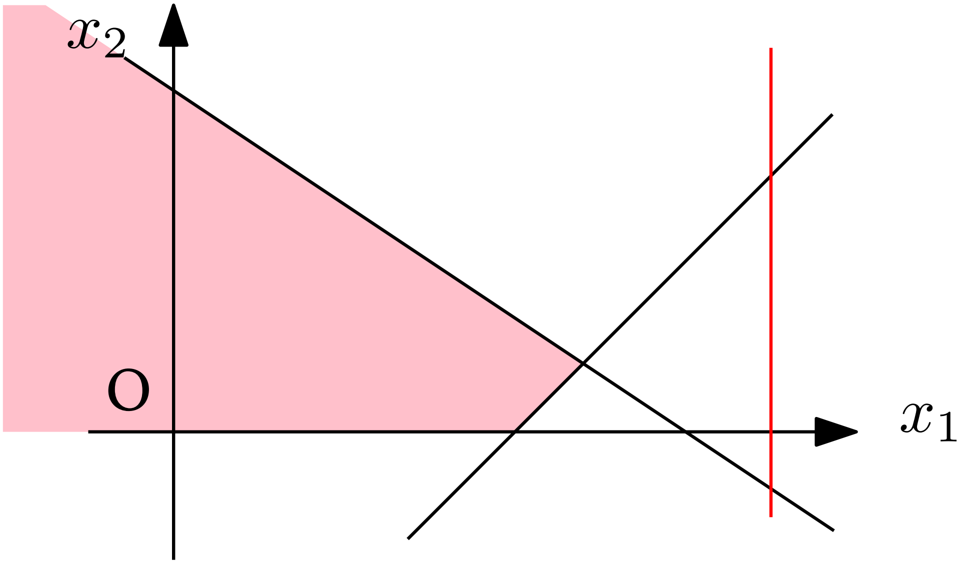
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ \qquad\qquad\; x_2 \geq 0, \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$



線形不等式系と凸多面集合の関係 (1)

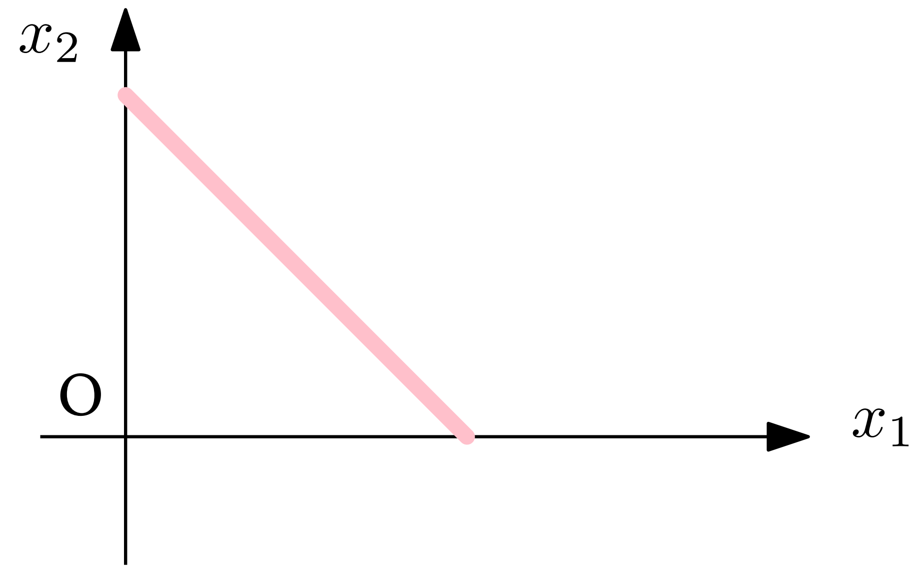
線形不等式系 $\longrightarrow$ 凸多面集合

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$$



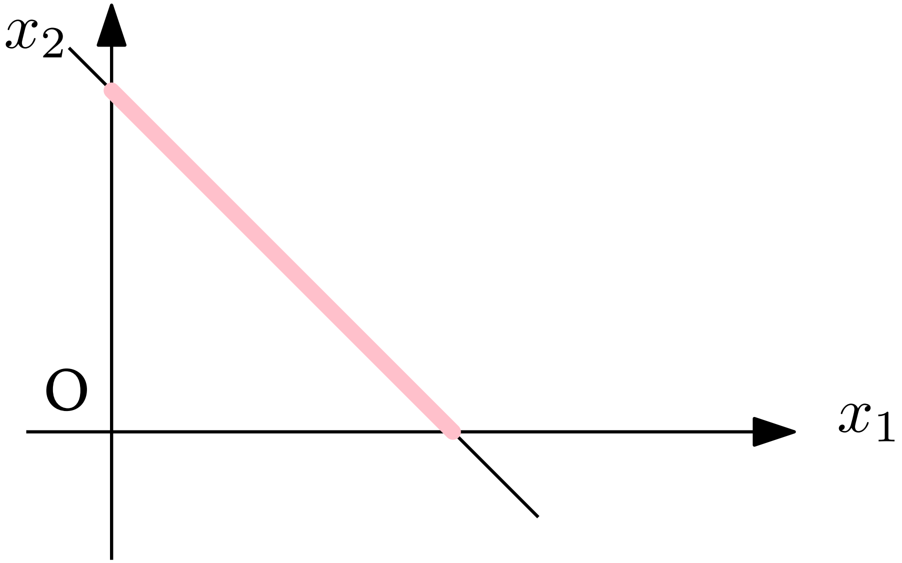
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -2, \\ \color{red}{-2x_1 \geq -7} \end{cases}$$

線形不等式系 $\longrightarrow$ 凸多面集合



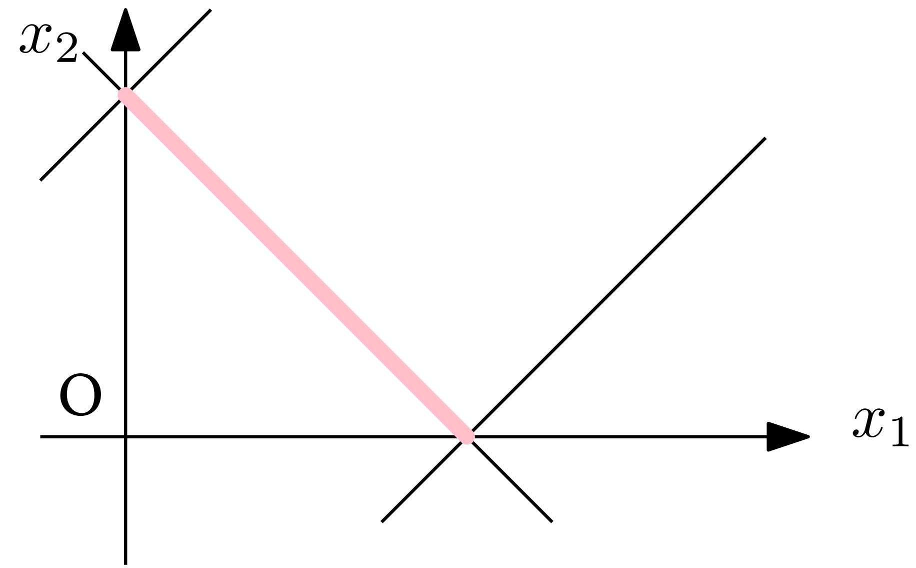
線形不等式系 ⟶ 凸多面集合

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 2, \\
-x_1 - x_2 &\geq -2, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\right.
$$



線形不等式系 ⟶ 凸多面集合

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2, \\ -x_1 - x_2 &\geq -2, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right.$$



$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2, \\ -x_1 - x_2 &\geq -2, \\ -x_1 + x_2 &\geq -2, \\ x_1 - x_2 &\geq -2 \end{aligned}\right.$$

性質

線形計画問題の許容領域 は 凸多面集合

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

不等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$\therefore$ 線形不等式系や凸多面集合の性質を調べることは重要

性質

線形計画問題の許容領域 は 凸多面集合

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 線形不等式系や凸多面集合の性質を調べることは重要

凸多面集合は凸集合

性質

凸多面集合 は 凸集合 である

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **凸** (convex) であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$$

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分上の点

凸である

凸ではない

証明：考える凸多面集合 P が線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ を用いて $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$ と書けるとする.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$，$0 \leq \lambda \leq 1$ とする.
このとき，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in P$ を示す.

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が 凸 (convex) であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$$

凸多面集合は凸集合：証明

証明：考える凸多面集合 P が線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ を用いて $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$ と書けるとする.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$，$0 \leq \lambda \leq 1$ とする.
このとき，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in P$ を示す.

$$\begin{aligned} A(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) &= \lambda\, A\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\, A\boldsymbol{y} \\ &\geq \lambda\, \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\, \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **凸** (convex) であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$$

証明：考える凸多面集合 P が線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ を用いて $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$ と書けるとする．
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$，$0 \leq \lambda \leq 1$ とする．
このとき，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in P$ を示す．

$$
\begin{aligned}
A(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) &= \lambda\, A\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\, A\boldsymbol{y} \\
&\geq \lambda\,\boldsymbol{b} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

したがって，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in P$ が成り立つ． $\square$

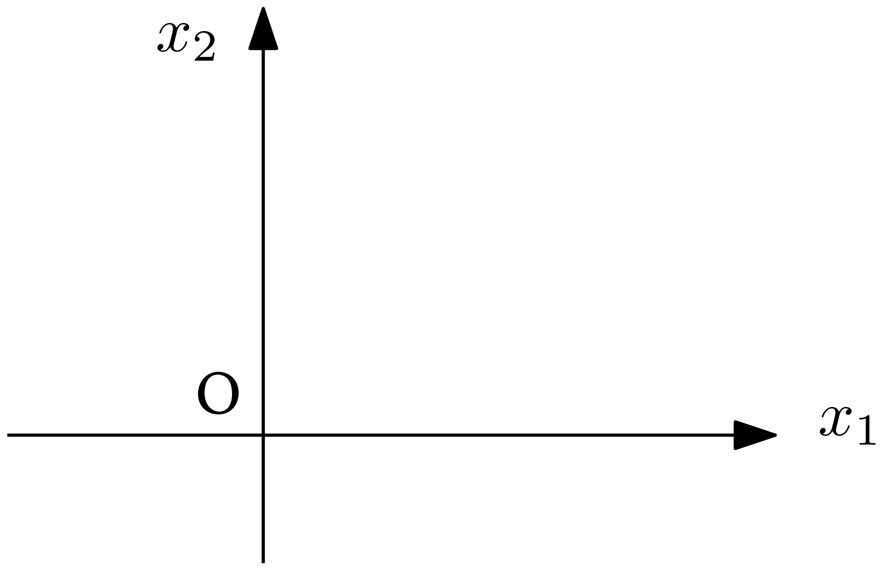
集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **凸** (convex) であるとは，次を満たすこと
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$$

凸多面集合の例：空集合

性質

空集合 $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸多面集合である

$$
\begin{cases} \quad x_1 \geq 1, \\ -x_1 \geq 1 \end{cases}
$$



$n \geq 1$ が何であっても，同じ構成が可能

凸多面集合の例：閉半空間

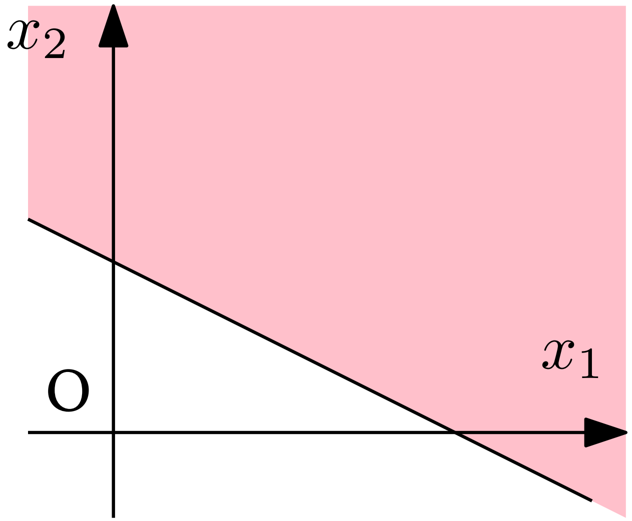
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ は自然数)

定義：閉半空間 (closed halfspace)

P が **閉半空間** であるとは,
あるベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, ある実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} \geq b\}$$

と書けること



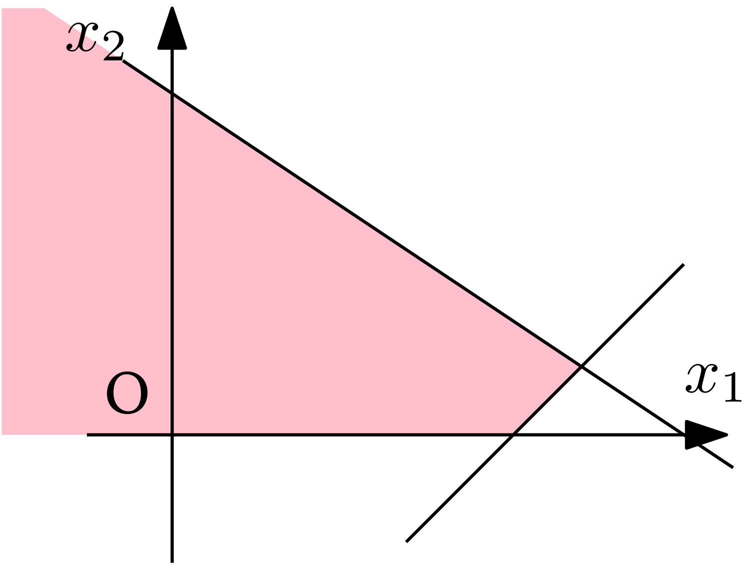
$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| \, 2z_1 + z_2 \geq 2 \right\}$$

凸多面集合と閉半空間

性質

凸多面集合 は 閉半空間の共通部分 である

$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| -2z_1 - 3z_2 \geq -6 \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| z_2 \geq 0 \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| -z_1 + z_2 \geq -2 \right\}$$



この性質で凸多面集合を定義することもある

凸多面集合の例：超平面

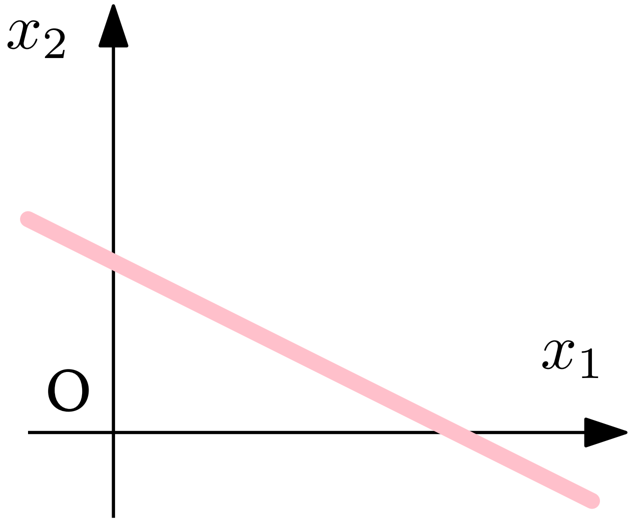
集合 $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ は自然数)

定義：超平面 (hyperplane)

H が **超平面** であるとは,
あるベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, ある実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$H = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = b\}$$

と書けること



$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| \, 2z_1 + z_2 = 2 \right\}$$

注

$$2z_1 + z_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2z_1 + z_2 \geq 2, \\ -2z_1 - z_2 \geq -2 \end{array}$$

凸多面集合の例：凸多面錐

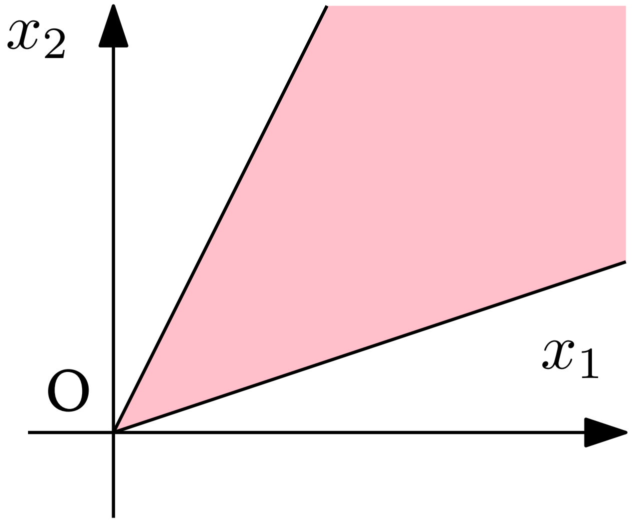
集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ は自然数)

定義：凸多面錐 (convex polyhedral cone)

C が **凸多面錐** であるとは,
ある線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ を用いて

$$C = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}\}$$

と書けること



$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

補足：凸錐

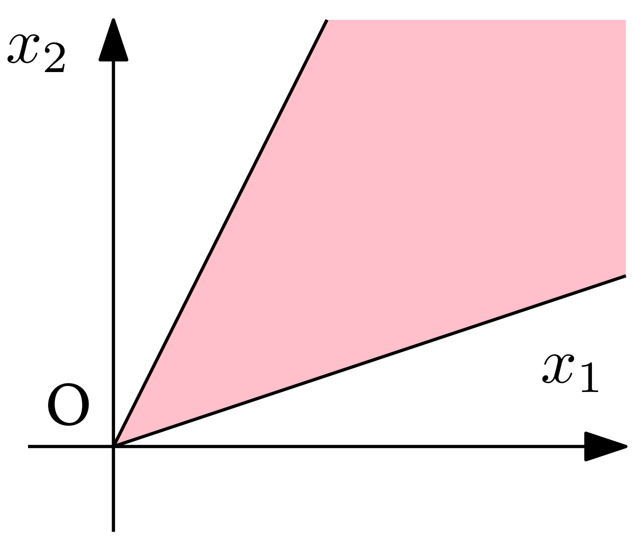
集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ は自然数)

定義：凸錐 (convex cone)

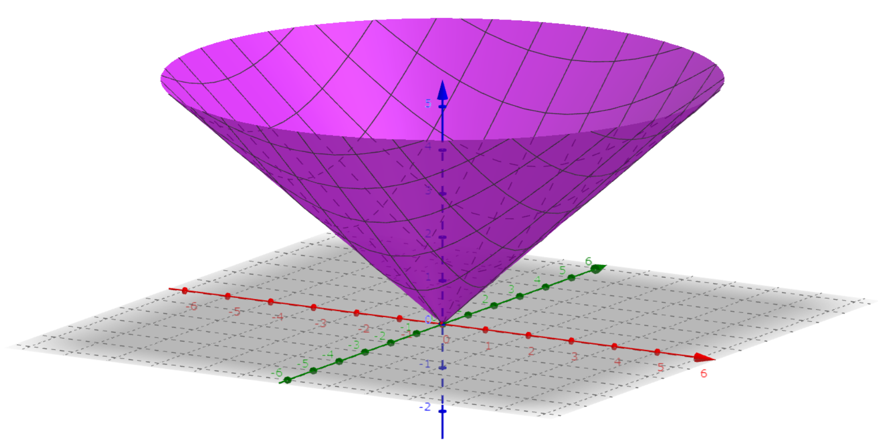
C が **凸錐** であるとは，以下の 2 条件を満たすこと

1. $\boldsymbol{x} \in C, \lambda \geq 0$ ならば，$\lambda \boldsymbol{x} \in C$
2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ ならば，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in C$

性質：凸多面錐は凸錐



凸多面錐ではない凸錐の例



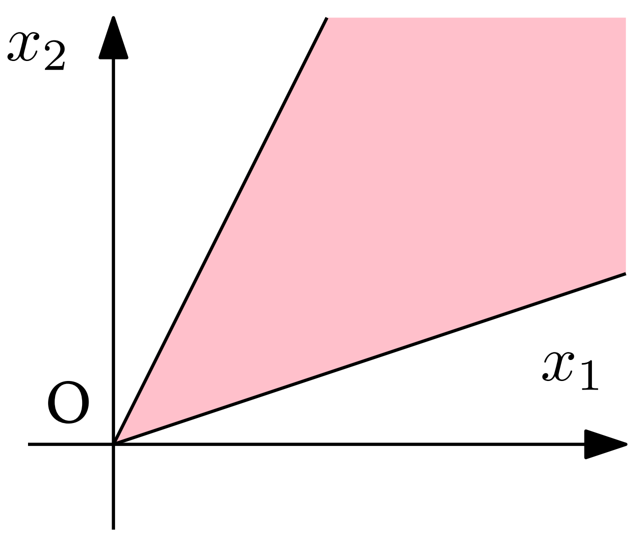
有界な集合と非有界な集合

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **有界** (bounded) であるとは，次を満たすこと

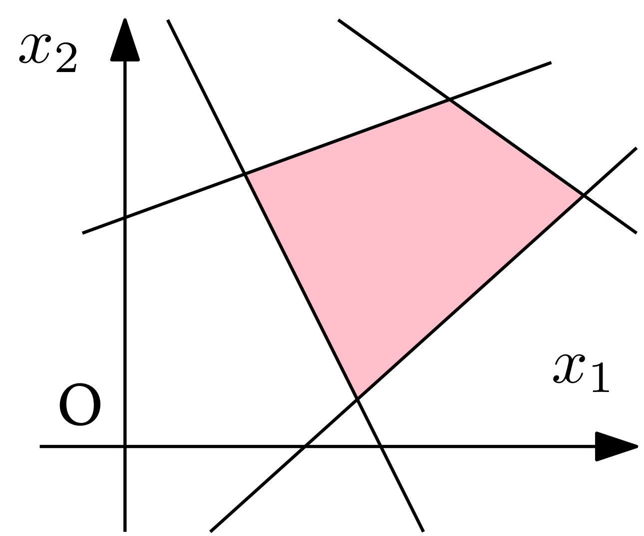
$$\exists d \in \mathbb{R}: \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}_{\boldsymbol{x}\text{ と }\boldsymbol{y}\text{ の間の距離}} \leq d$$

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **非有界** (unbounded) であるとは，
有界ではないこと

性質：非空な凸多面錐は非有界

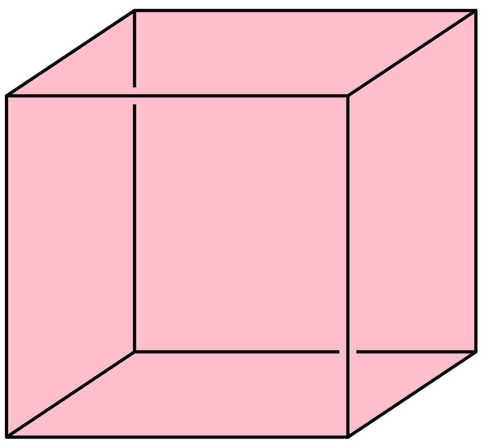


有界な凸多面集合の例

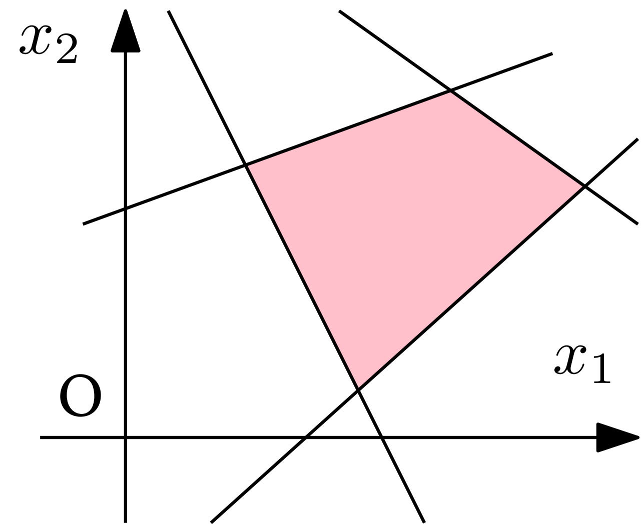


定義：凸多面体 (convex polytope)

凸多面体 とは，有界な凸多面集合のこと



$\subseteq \mathbb{R}^3$

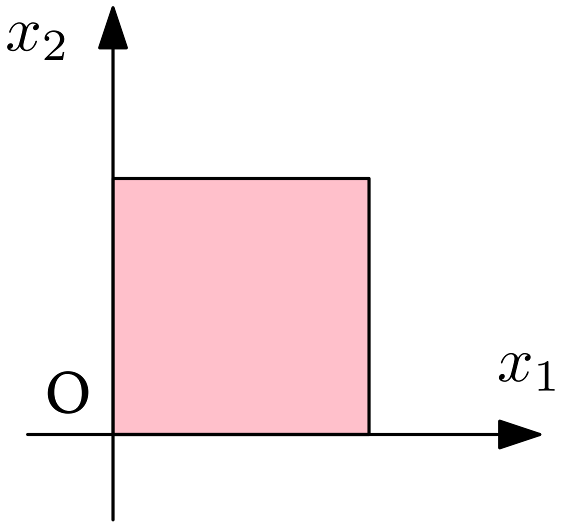


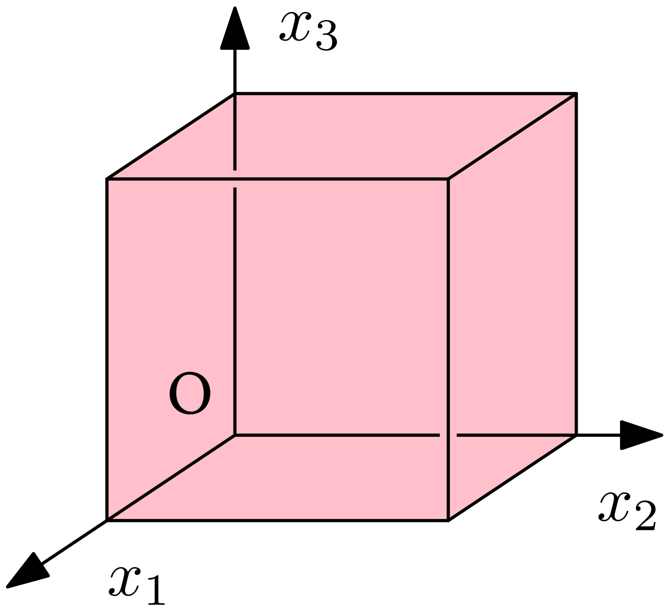
高次元凸多面体の例：立方体

自然数 $n \geq 1$

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$





$n \geq 4$ の場合を 想像できるだろうか？

高次元凸多面体の例：立方体 (続)

自然数 $n \geq 1$

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

有界であることの確認：

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **有界** (bounded) であるとは，次を満たすこと

$$\exists\, d \in \mathbb{R}\text{:} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq d$$

高次元凸多面体の例：立方体 (続)

自然数 $n \geq 1$

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

有界であることの確認： $d = 2\sqrt{n}$ とする

n 次元立方体の任意の要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考えると

$$\|x - y\| \underbrace{\leq}_{\text{三角不等式}} \|x\| + \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i^2}_{\leq 1}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{y_i^2}_{\leq 1}} \leq 2\sqrt{n}$$

□

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が **有界** (bounded) であるとは，次を満たすこと

$$\exists\, d \in \mathbb{R}: \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq d$$

今日の内容

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- 頂点の特定

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

今日の内容

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- 頂点の特定

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

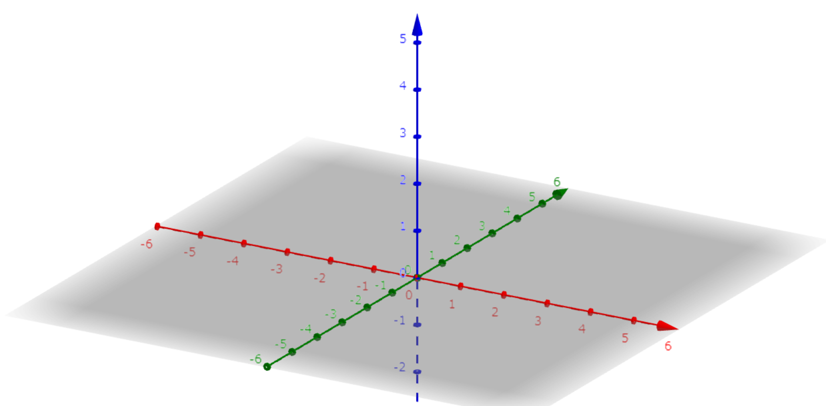
線形部分空間

$L \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：線形部分空間 (linear subspace)

L が $\mathbb{R}^n$ の **線形部分空間** であるとは,
ある行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を用いて次のように書けること

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

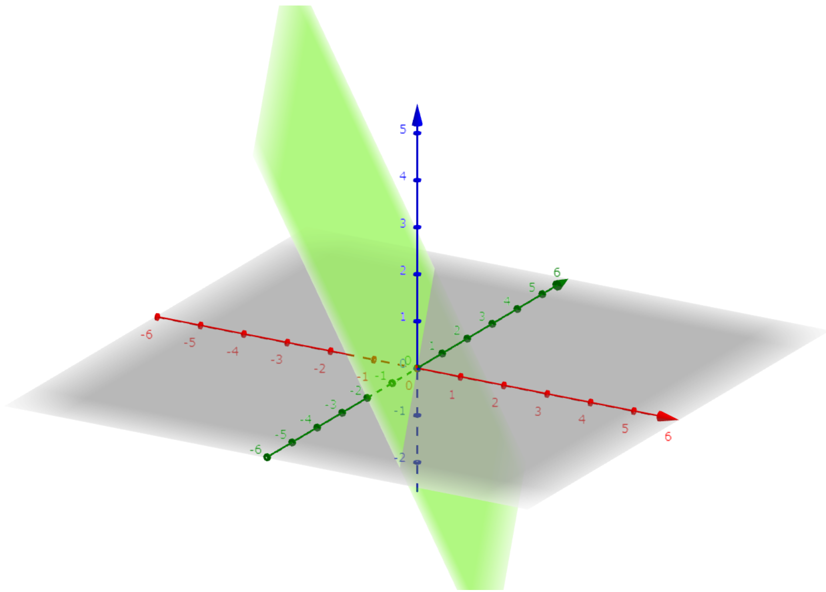
線形部分空間

$L \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：線形部分空間 (linear subspace)

L が $\mathbb{R}^n$ の **線形部分空間** であるとは,
ある行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を用いて次のように書けること

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad 1} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

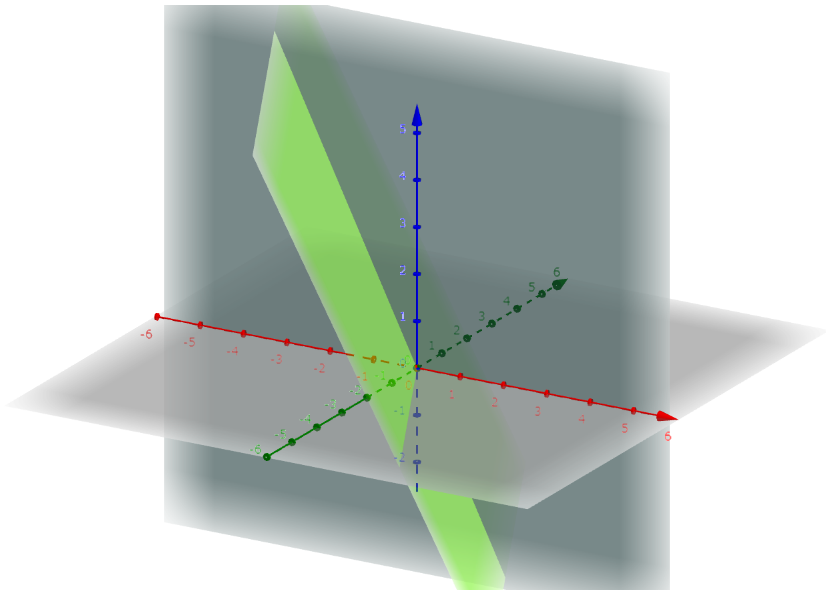
線形部分空間

$L \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：線形部分空間 (linear subspace)

L が $\mathbb{R}^n$ の **線形部分空間** であるとは,
ある行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を用いて次のように書けること

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{0} \end{bmatrix} \right\}$$

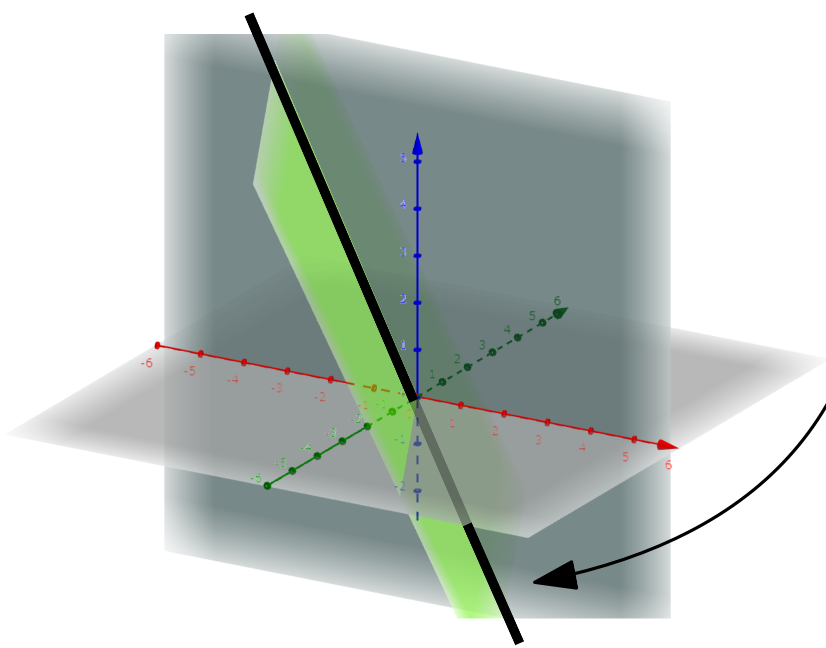
線形部分空間

$L \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：線形部分空間 (linear subspace)

L が $\mathbb{R}^n$ の **線形部分空間** であるとは,
ある行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を用いて次のように書けること

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

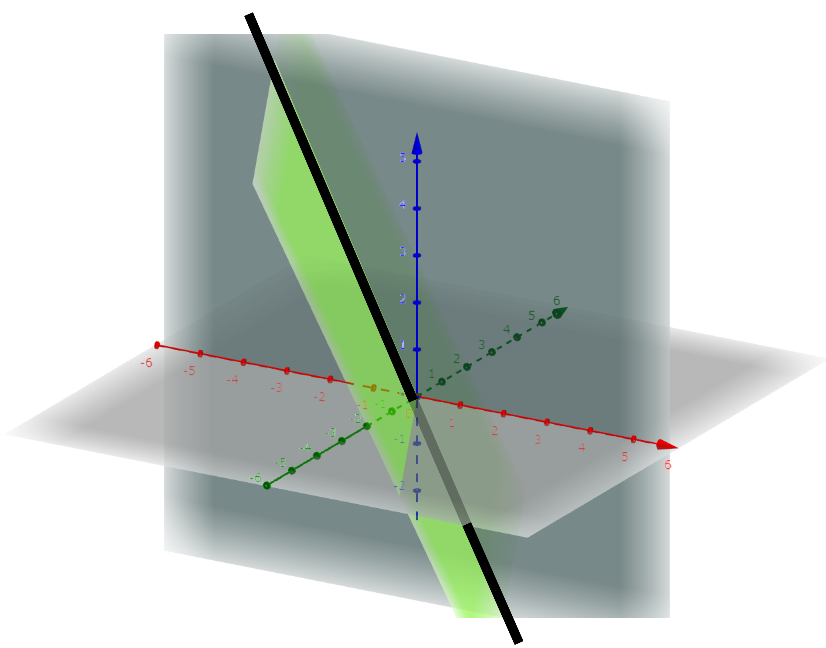
原点と $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ を通る直線

線形部分空間の次元

$L = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：線形部分空間の次元 (dimension)

L の **次元** $\dim L$ とは $n - \operatorname{rank}(A)$ のこと



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$n - \operatorname{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore \quad \dim L = 1$$

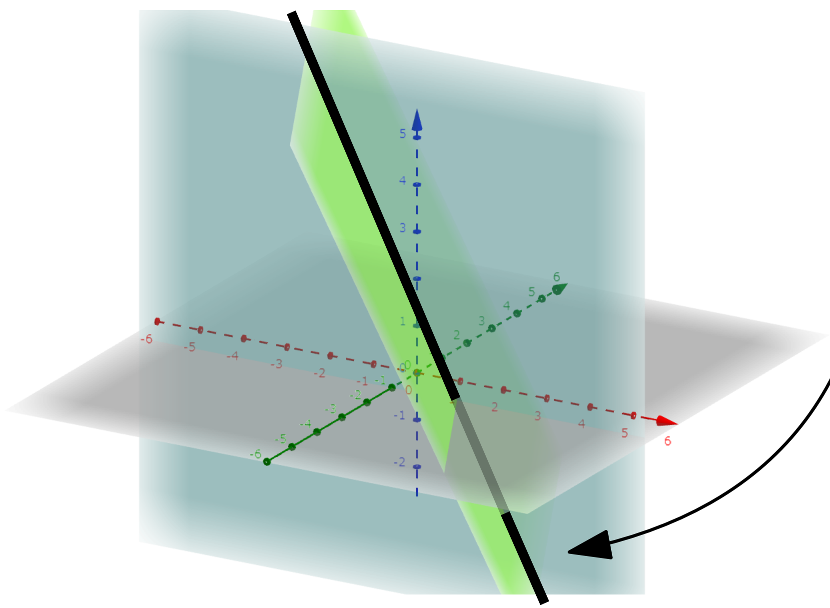
アフィン部分空間

$L \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：アフィン部分空間 (affine subspace)

L が $\mathbb{R}^n$ の **アフィン部分空間** であるとは,
ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を用いて次のように書けること

$$L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

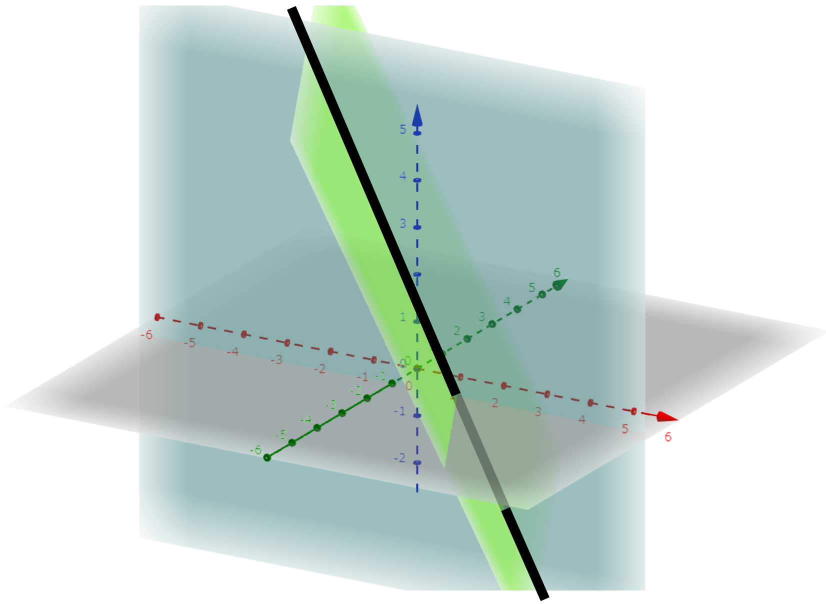
$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通る直線

アフィン部分空間の次元

$L = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：アフィン部分空間の次元 (dimension)

L の **次元** $\dim L$ とは $n - \mathrm{rank}(A)$ のこと



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$n - \mathrm{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

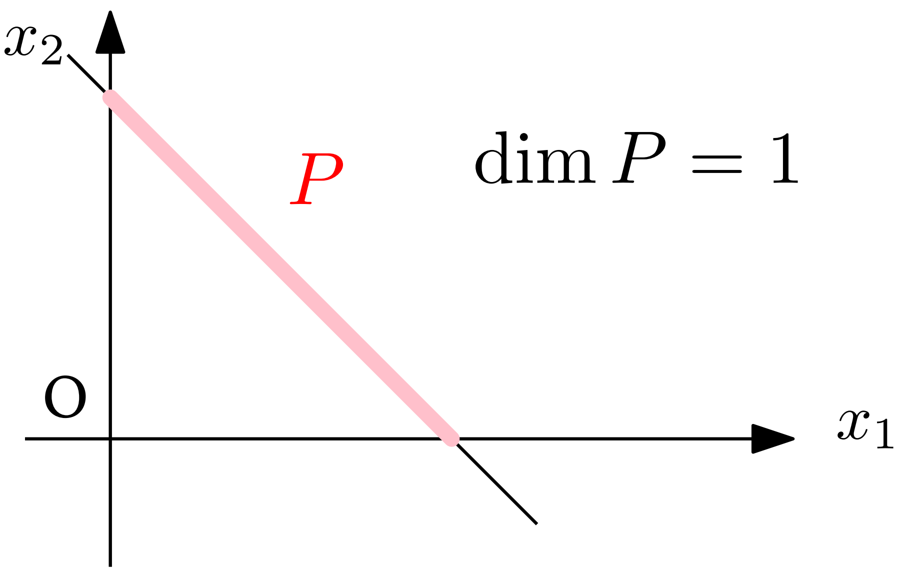
$$\therefore \quad \dim L = 1$$

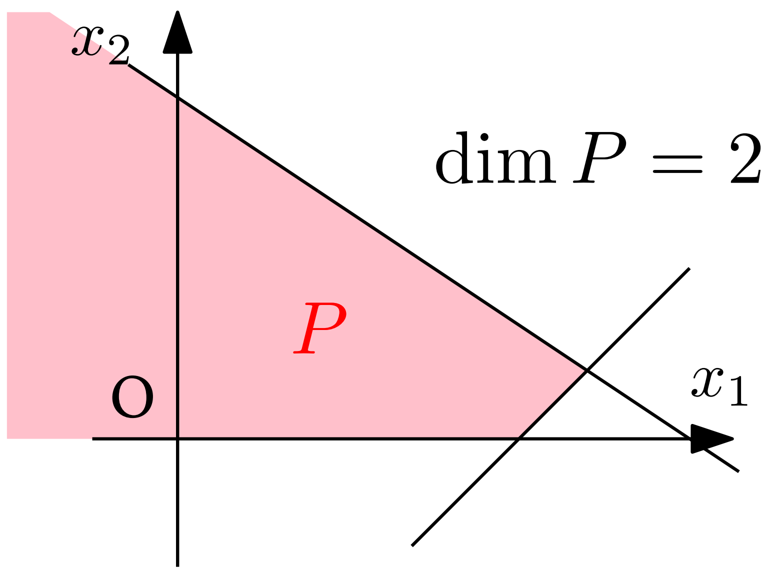
凸多面集合の次元

凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸多面集合の次元 (dimension)

P の **次元** $\dim P$ とは,
P を含むアフィン空間の次元の最小値





注：$\dim P = n$ であるとは限らない

妥当不等式

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$
凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

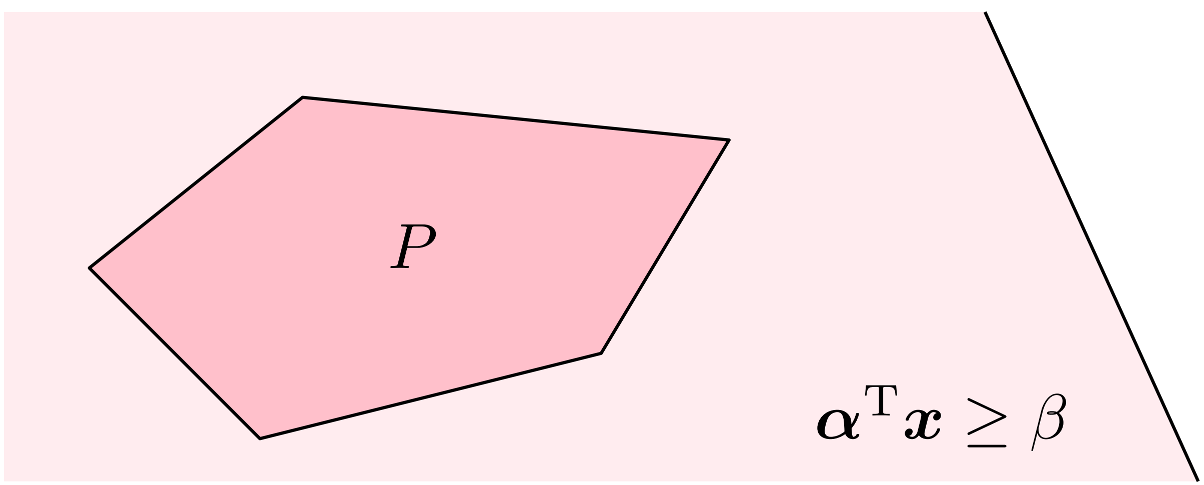
定義：妥当不等式 (valid inequality)

不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ が P に対する **妥当不等式** であるとは，次を満たすこと

$$A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \geq \beta$$

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ の定義する閉半空間が P を含むということ

($\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ のとき)



凸多面集合の面

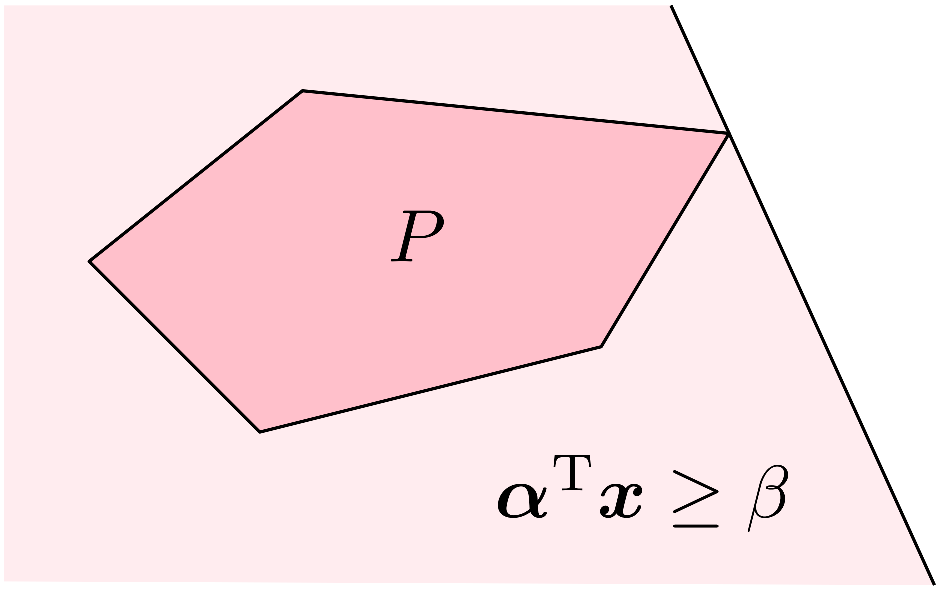
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

定義：面 (face)

P の **面** とは，P に対する妥当不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ を用いて次のように書ける集合のこと

$$P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \beta\}$$



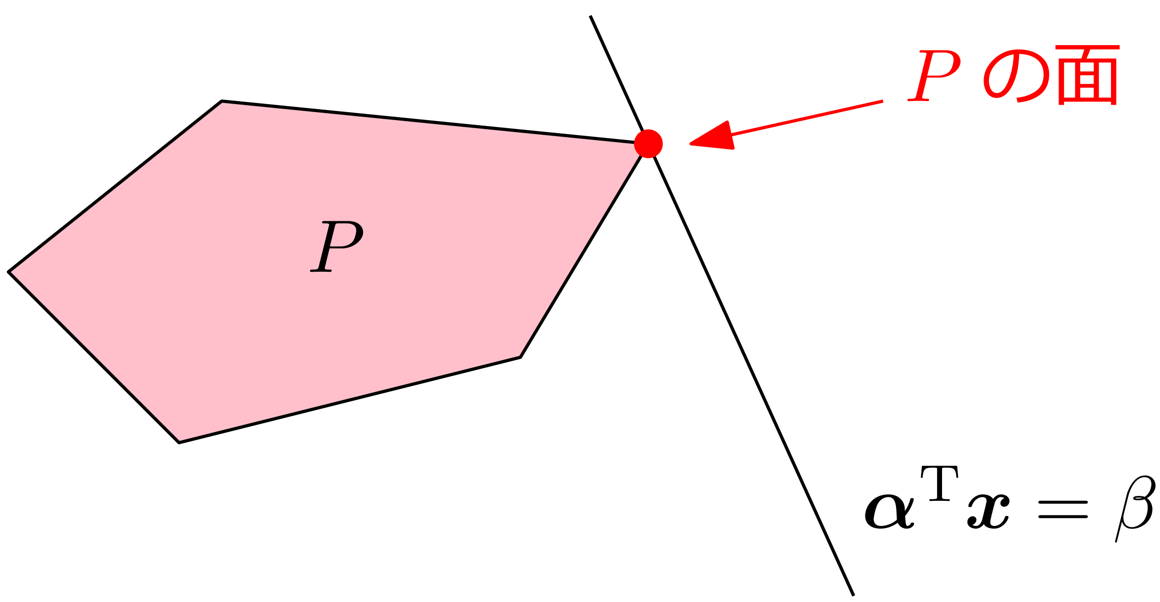
凸多面集合の面

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

定義：面 (face)

P の **面** とは，P に対する妥当不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ を用いて次のように書ける集合のこと

$$P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \beta\}$$



凸多面集合の面：自明な面 (1)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

定義：面 (face)

P の **面** とは，P に対する妥当不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ を用いて次のように書ける集合のこと

$$P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \beta\}$$

例：P は P の面

- $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq 0$ は P に対する妥当不等式
- $P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0\} = P \cap \mathbb{R}^n = P$
- $\therefore P$ は P の面 $\square$

凸多面集合の面：自明な面 (2)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

定義：面 (face)

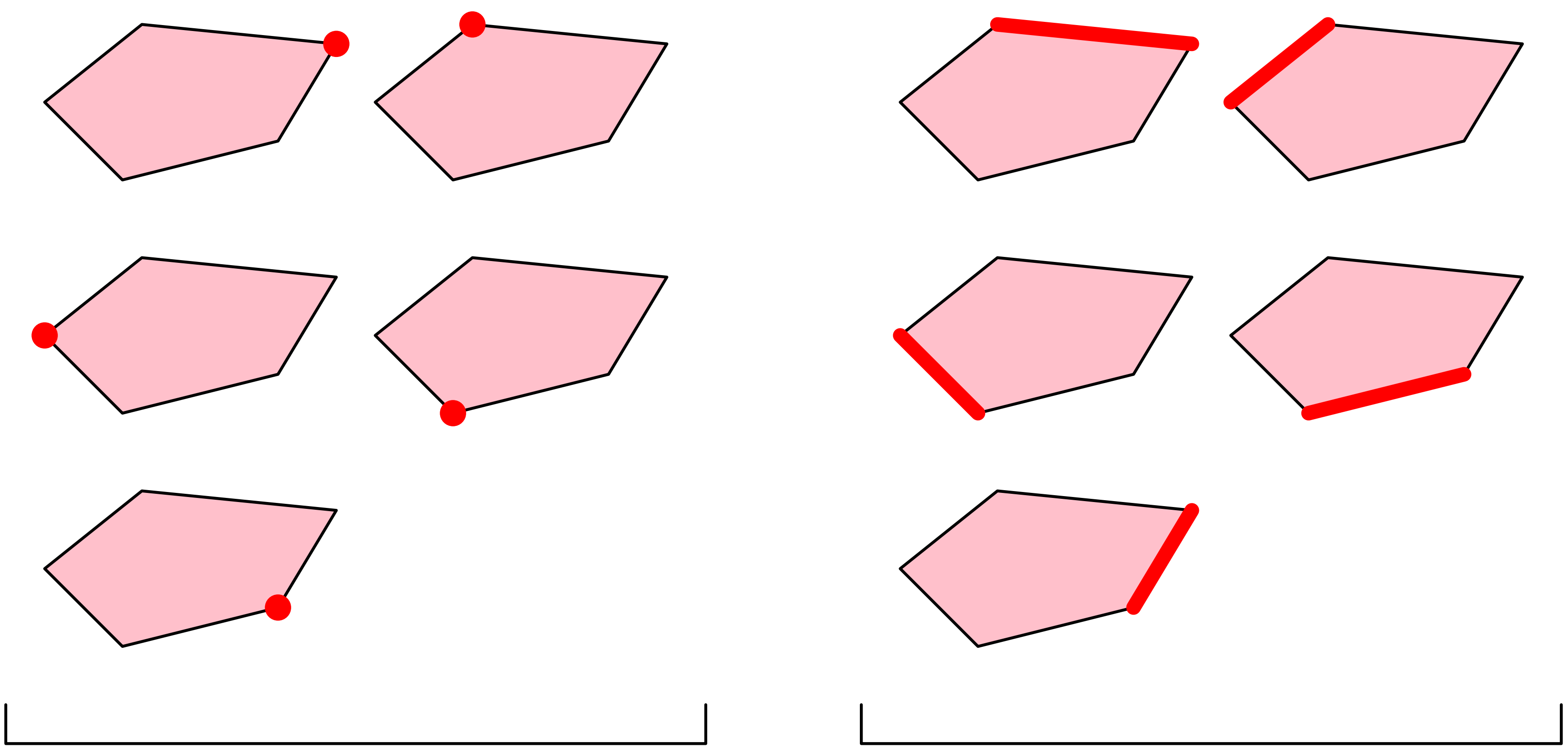
P の **面** とは, P に対する妥当不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ を用いて次のように書ける集合のこと

$$P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \beta\}$$

例：$\emptyset$ は P の面

- $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq -1$ は P に対する妥当不等式
- $P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = -1\} = P \cap \emptyset = \emptyset$
- $\therefore \emptyset$ は P の面 $\square$

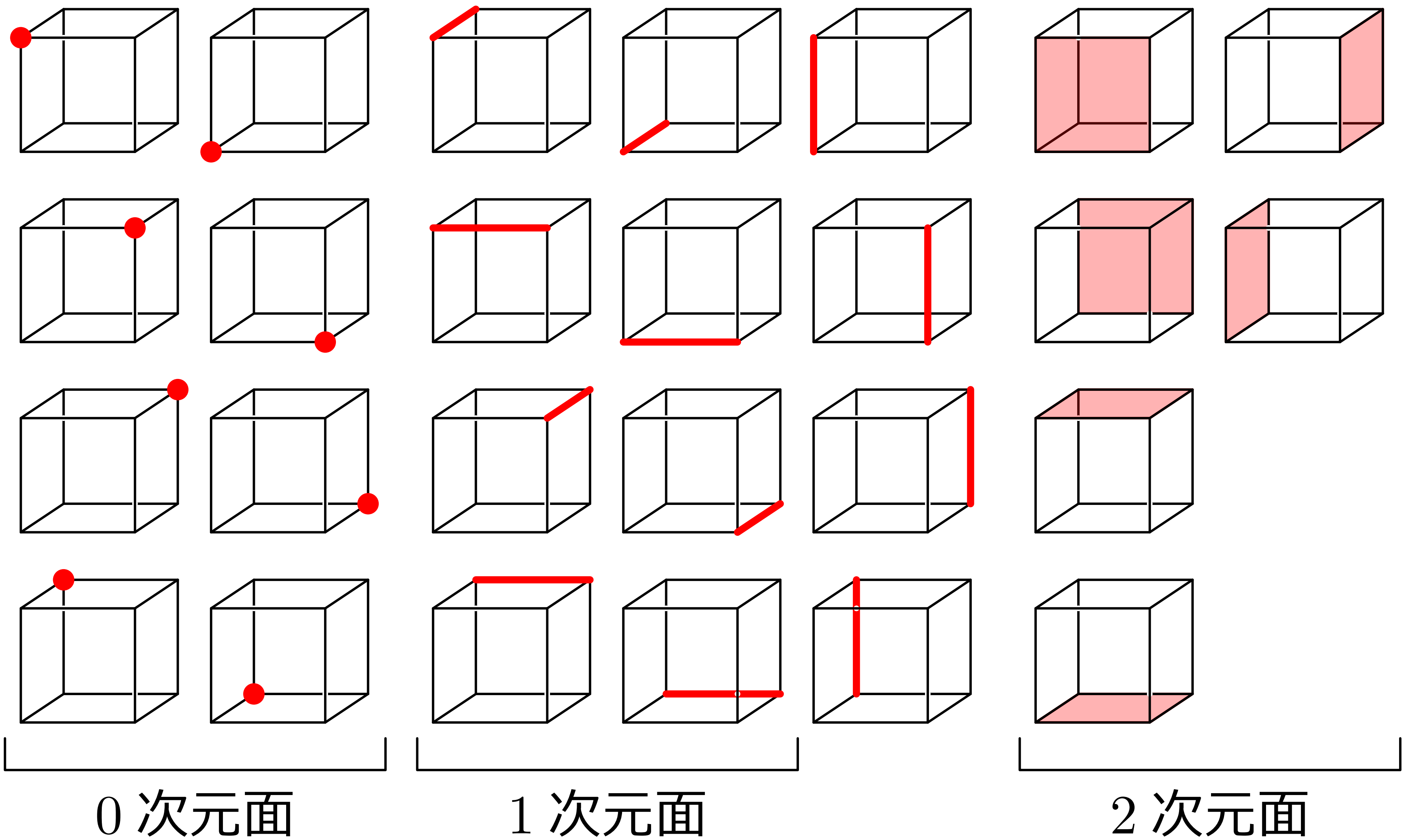
凸多面集合の面：例 (1)



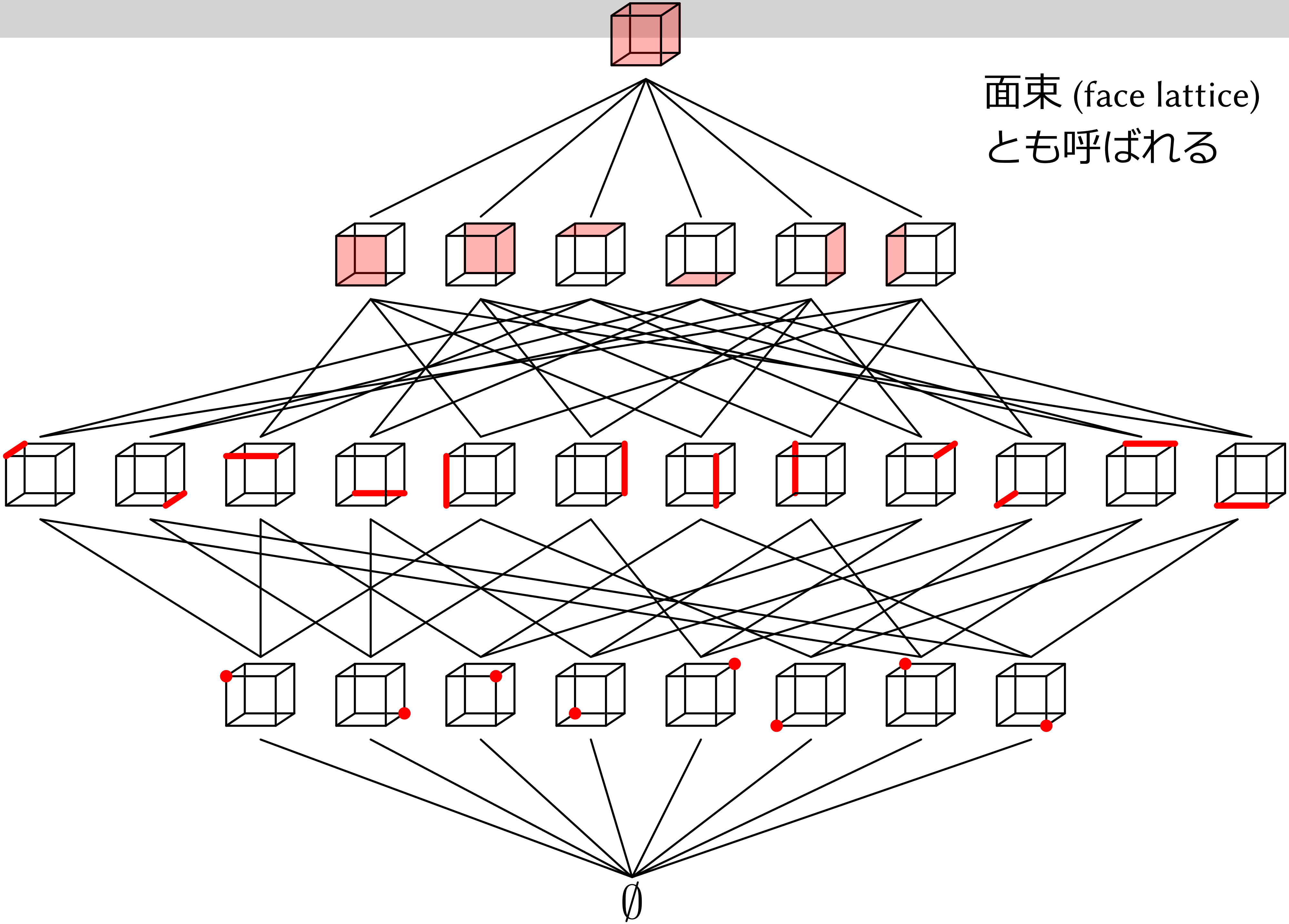
0 次元面

1 次元面

凸多面集合の面：例 (2)



面の包含関係



面束 (face lattice)
とも呼ばれる

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

性質：凸多面集合の面も凸多面集合

P の面は凸多面集合である

証明：F は P の面であるとする

このとき，P に対するある妥当不等式 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \beta$ を用いて，F は次のように書ける

$$F = P \cap \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \beta\}$$

$$= \left\{\boldsymbol{z} \,\middle|\, \begin{array}{l} A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \beta \end{array} \right\} = \left\{\boldsymbol{z} \,\middle|\, \begin{bmatrix} A \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} \right\}$$

$\therefore F$ は凸多面集合である $\square$

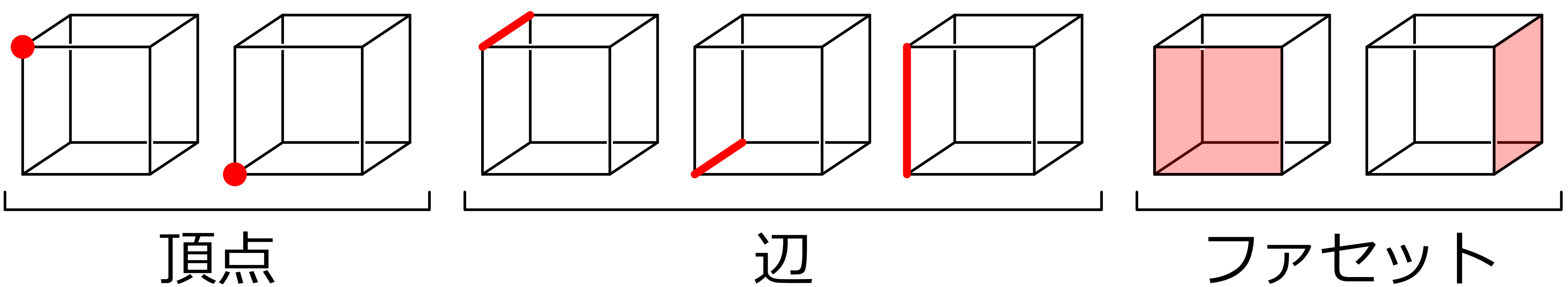
頂点，辺，ファセット

凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：頂点 (vertex)，辺 (edge)，ファセット (facet)

P の面 F が，P の

- **頂点** であるとは，$\dim F = 0$ のこと
- **辺** であるとは，$\dim F = 1$ のこと
- **ファセット** であるとは，$\dim F = \dim P - 1$ のこと

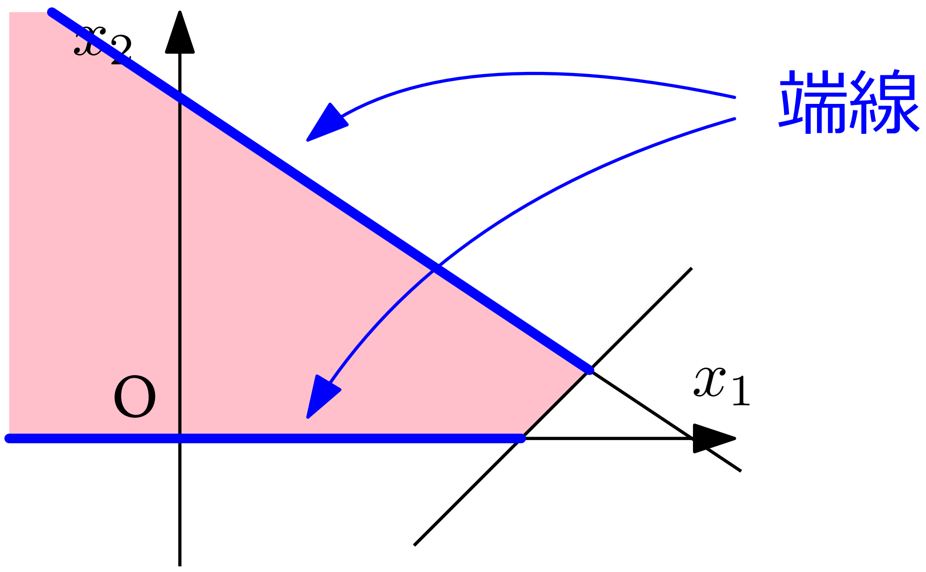


端線

凸多面集合 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：端線 (extreme ray)

P の **辺** F が半直線 (片側非有界) であるとき，
F は P の **端線** であるという



凸多面集合の構造を理解するとき

頂点 と 端線 が 重要な役割を果たす　$\rightarrow$ 次回

今日の内容

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- 頂点の特定

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

- 線形不等式系と凸多面集合
- 凸多面集合の面
- $\boxed{\text{頂点の特定}}$

線形計画問題

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

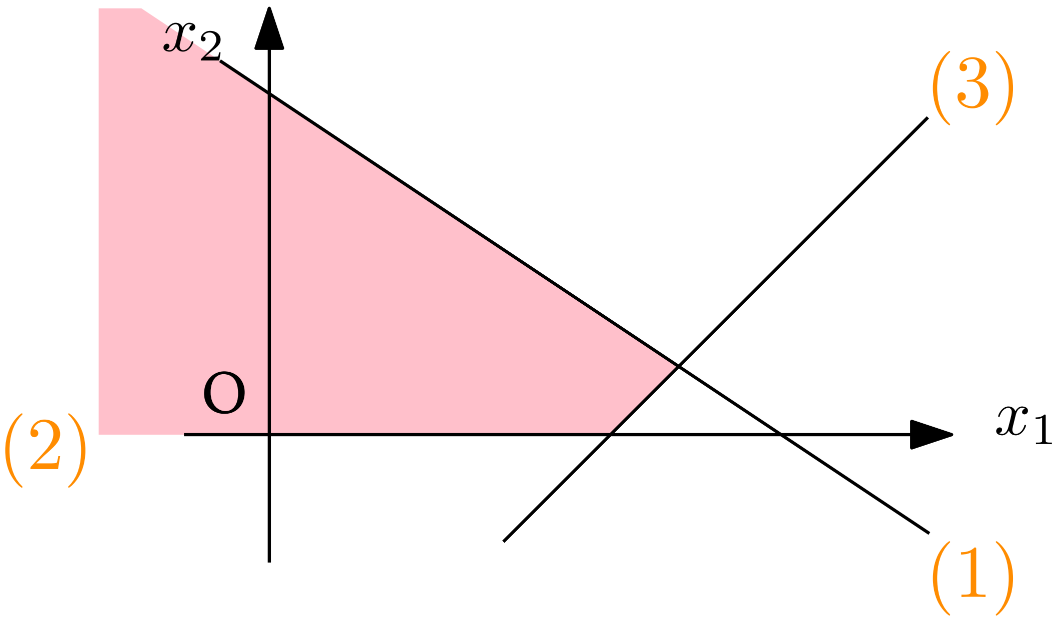
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

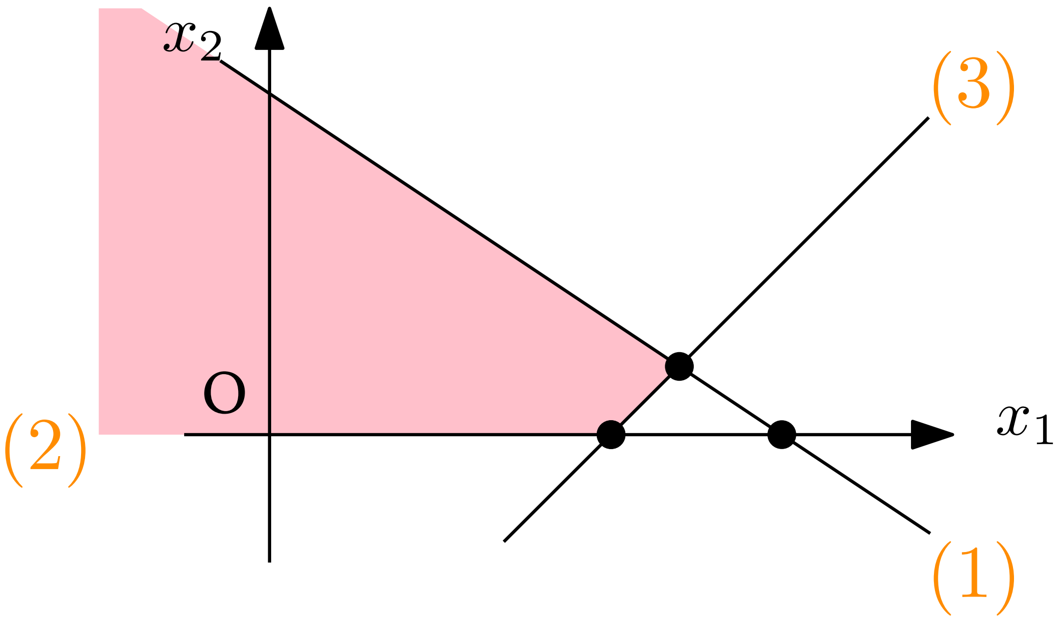
頂点の特定：例 1

$$
\begin{cases}
-2x_1 - 3x_2 \geq -6, & (1) \\
x_2 \geq 0, & (2) \\
-x_1 + x_2 \geq -2 & (3)
\end{cases}
$$



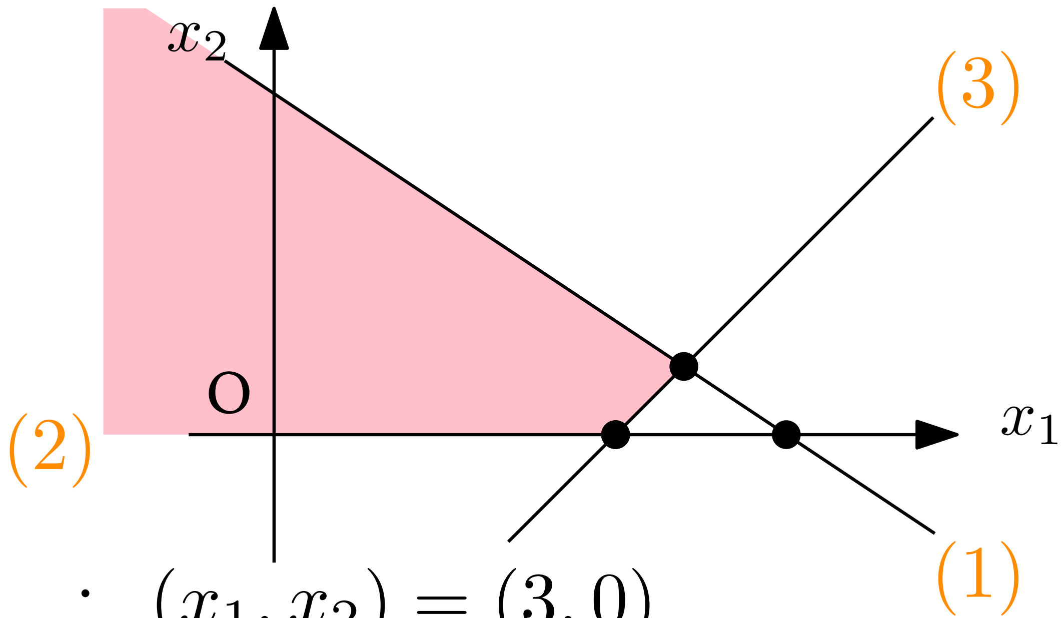
頂点の特定：例 1

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, & (1) \\ x_2 \geq 0, & (2) \\ -x_1 + x_2 \geq -2 & (3) \end{cases}$$



頂点の特定：例 1

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, & (1) \\ x_2 \geq 0, & (2) \\ -x_1 + x_2 \geq -2 & (3) \end{cases}$$



(1) と (2) の交点：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = -6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (3, 0)$

線形不等式系の解ではない

(1) と (3) の交点：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = -6 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (12/5, 2/5)$

線形不等式系の解である

(2) と (3) の交点：

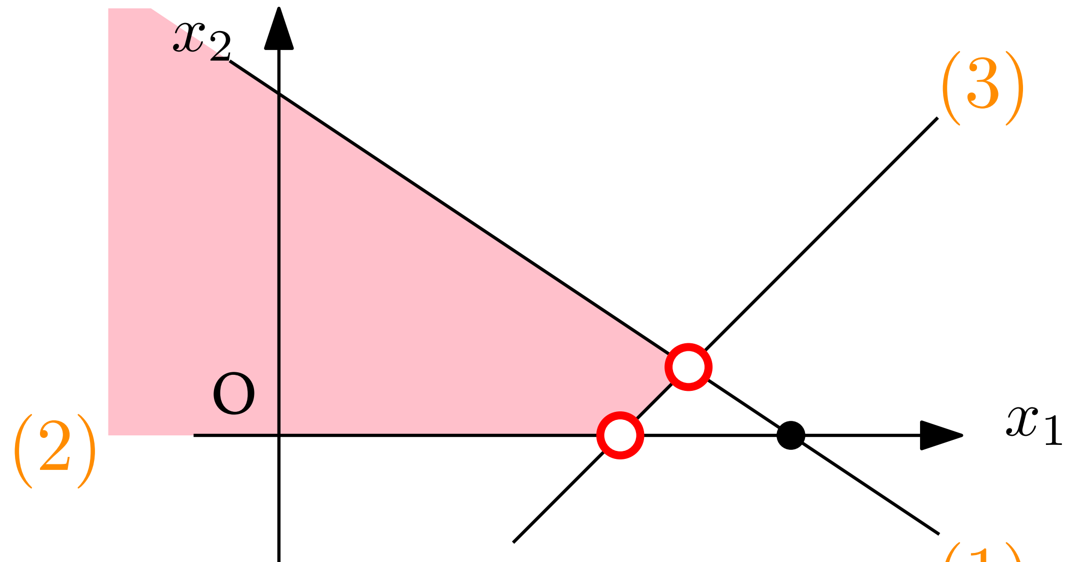
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (2, 0)$

線形不等式系の解である

頂点の特定：例 1

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, & (1) \\ x_2 \geq 0, & (2) \\ -x_1 + x_2 \geq -2 & (3) \end{cases}$$



(1) と (2) の交点：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = -6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (3, 0)$

線形不等式系の解ではない

(1) と (3) の交点：

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = -6 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (12/5, 2/5)$ 頂点

線形不等式系の解である

(2) と (3) の交点：

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x_1, x_2) = (2, 0)$ 頂点

線形不等式系の解である

頂点の特定：一般論

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
凸多面集合 $P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}\}$

性質：頂点の必要十分条件

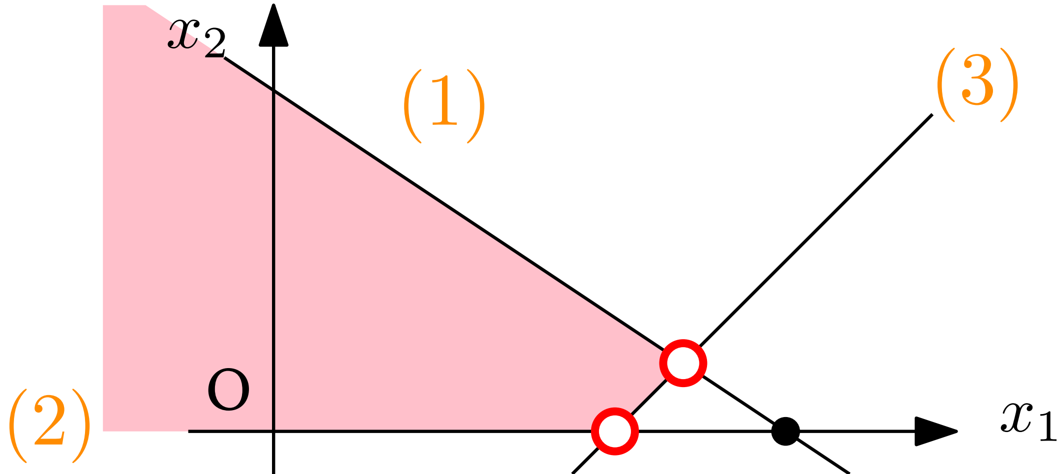
$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ が P の頂点 $\Leftrightarrow$ 次の 2 つを満たす

1. $\overline{\boldsymbol{x}} \in P$
2. 行添字集合 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ で，$|S| = n$ かつ $\underline{A_S}$ が正則 かつ $A_S\overline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}_S}$ を満たすものが存在

S に属する添字の行だけから成る A の小行列

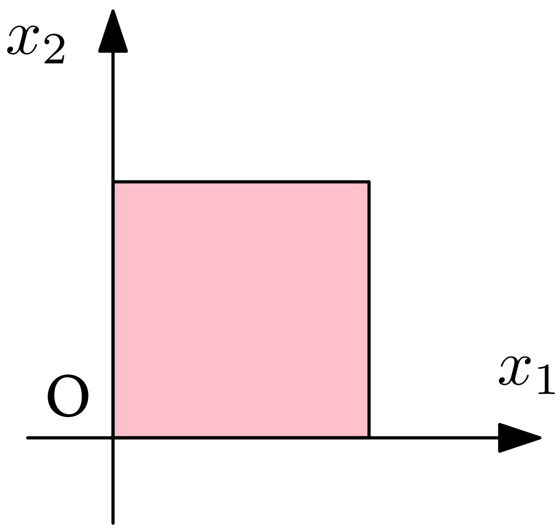
S に属する添字の成分から成る $\boldsymbol{b}$ の小ベクトル

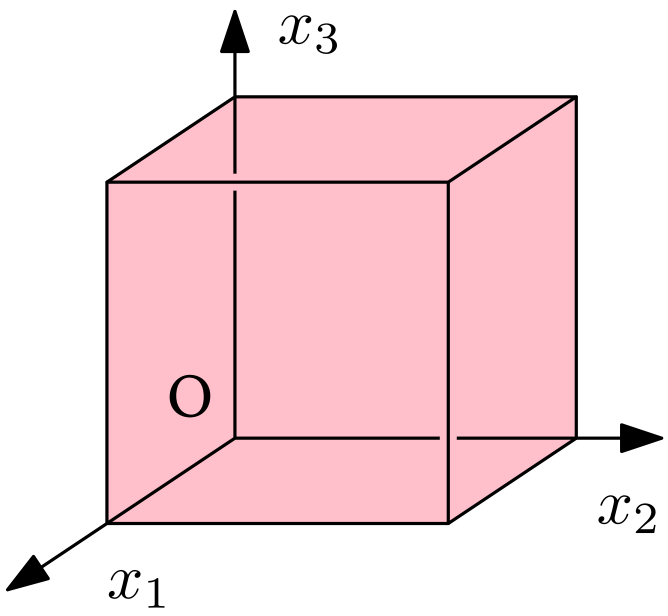
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -6, & (1) \\ \qquad\qquad x_2 \geq 0, & (2) \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 & (3) \end{cases}$$



次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$





頂点の特定：例 2

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$C_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

頂点の特定：例 2

次の線形不等式系で定義される凸多面体は n **次元立方体**

$$0 \le x_i \le 1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$C_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ が C_n の頂点 $\quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

特に，C_n の頂点の総数 $= 2^n$

頂点の特定：等式標準形の場合

等式標準形 (standard form)　$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

許容領域

$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\}$$

$\overline{\boldsymbol{x}}$ が P の頂点 $\Rightarrow A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$　$(\mathrm{rank}(A)$ 個の行が線形独立)

性質：頂点の必要十分条件

$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ が P の頂点 $\Leftrightarrow$ 次の 2 つを満たす

1. $\overline{\boldsymbol{x}} \in P$
2. 行添字集合 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ で，$|S| = n$ かつ A_S が正則 かつ $A_S\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_S$ を満たすものが存在

等式標準形 (standard form)　　$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

許容領域

$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\}$$

$\overline{\boldsymbol{x}}$ が P の頂点 $\Rightarrow A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$　($\mathrm{rank}(A)$ 個の行が線形独立)

$\Rightarrow n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添字 i に対して，$\overline{x}_i = 0$

性質：頂点の必要十分条件

$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ が P の頂点 $\Leftrightarrow$ 次の 2 つを満たす

1. $\overline{\boldsymbol{x}} \in P$
2. 行添字集合 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ で，$|S| = n$ かつ A_S が正則 かつ $A_S \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_S$ を満たすものが存在

頂点の特定：等式標準形の場合

等式標準形 (standard form)　　$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

許容領域

$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\}$$

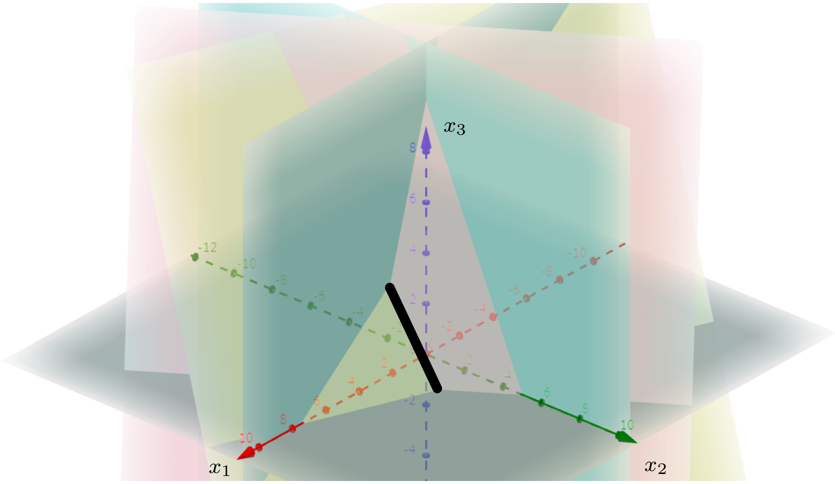
$\overline{\boldsymbol{x}}$ が P の頂点 $\Rightarrow A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$　(rank(A) 個の行が線形独立)

$\Rightarrow n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添字 i に対して，$\overline{x}_i = 0$

したがって，次のように頂点を特定できる

1. $\overline{x}_i = 0$ とする $n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添字 i を決める
2. 残りの添字 i について，$\overline{x}_i$ は $A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ を解いて決める
3. 構成できた $\overline{\boldsymbol{x}}$ が $\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}$ を満たすか確認する

$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 15, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

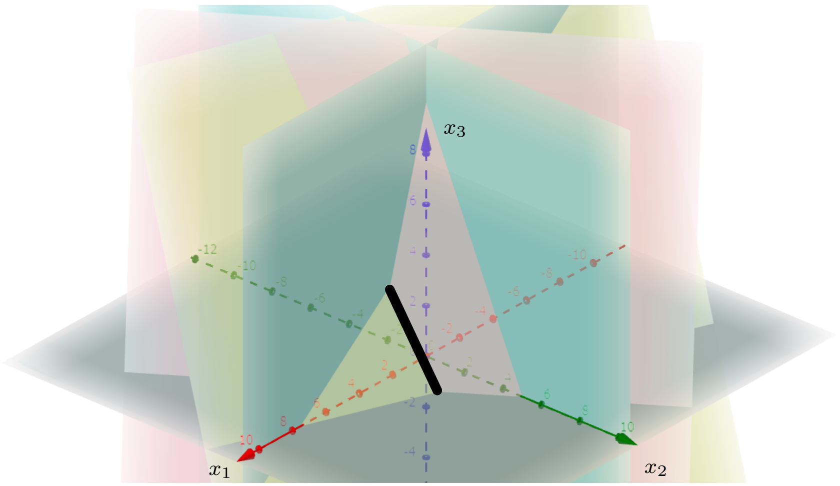


頂点の特定：等式標準形の場合 (例)

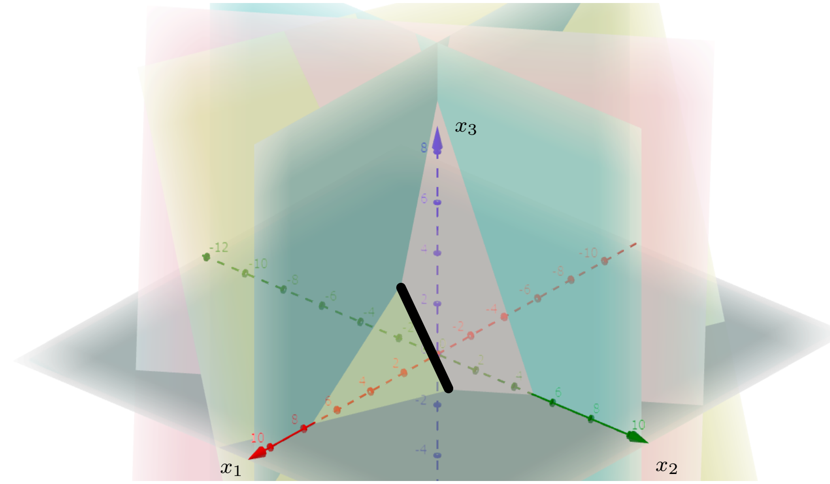
$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{array}{rl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = 15, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\therefore \quad n - \mathrm{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$



頂点の特定：等式標準形の場合 (例)



$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 15, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{rank}(A) = 2$$

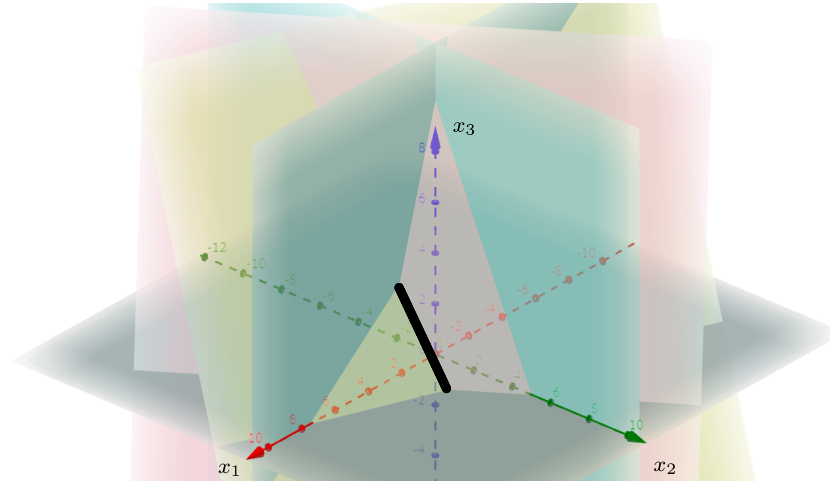
$$\therefore \quad n - \mathrm{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

(1) $x_1 = 0$ とする

(2) $x_2 = 0$ とする

(3) $x_3 = 0$ とする

頂点の特定：等式標準形の場合 (例)



$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 15, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\therefore \quad n - \mathrm{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

(1) $x_1 = 0$ とする

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \therefore (x_1, x_2, x_3) = (0, 15, -20)$$

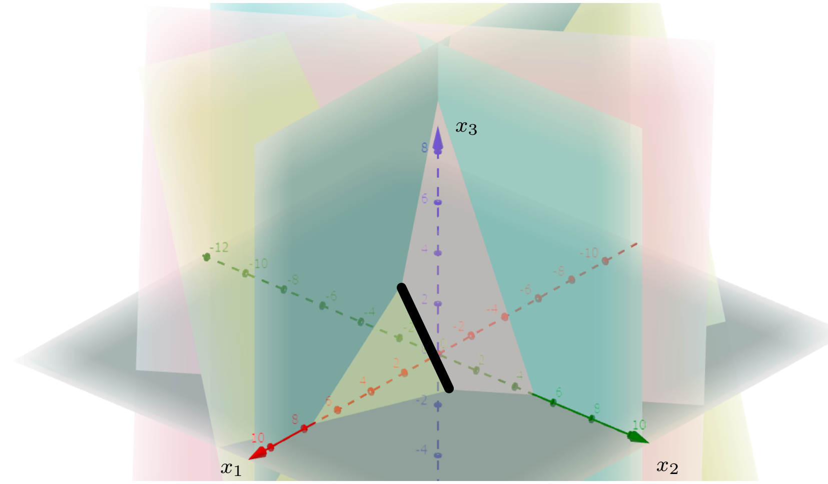
頂点ではない

(2) $x_2 = 0$ とする

(3) $x_3 = 0$ とする

頂点の特定：等式標準形の場合 (例)

$$P = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\therefore \quad n - \mathrm{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

(1) $x_1 = 0$ とする

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \therefore (x_1, x_2, x_3) = (0, 15, -20)$$

頂点ではない

(2) $x_2 = 0$ とする

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \therefore (x_1, x_2, x_3) = (15/7, 0, 25/7)$$

頂点

(3) $x_3 = 0$ とする

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \therefore (x_1, x_2, x_3) = (20/11, 25/11, 0)$$

頂点

次回の内容

線形計画法の復習 (2)

- 単体法と双対定理