離散最適化基礎論

第 1 回

整数計画法と線形計画法

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2022 年 10 月 4 日

最終更新：2022 年 10 月 3 日　14:12

講義概要

主題

離散最適化における 1 つのトピックを集中的に学ぶ
今年度は「**整数計画法**」を題材とする

講義概要

主題

離散最適化における 1 つのトピックを集中的に学ぶ
今年度は「**整数計画法**」を題材とする

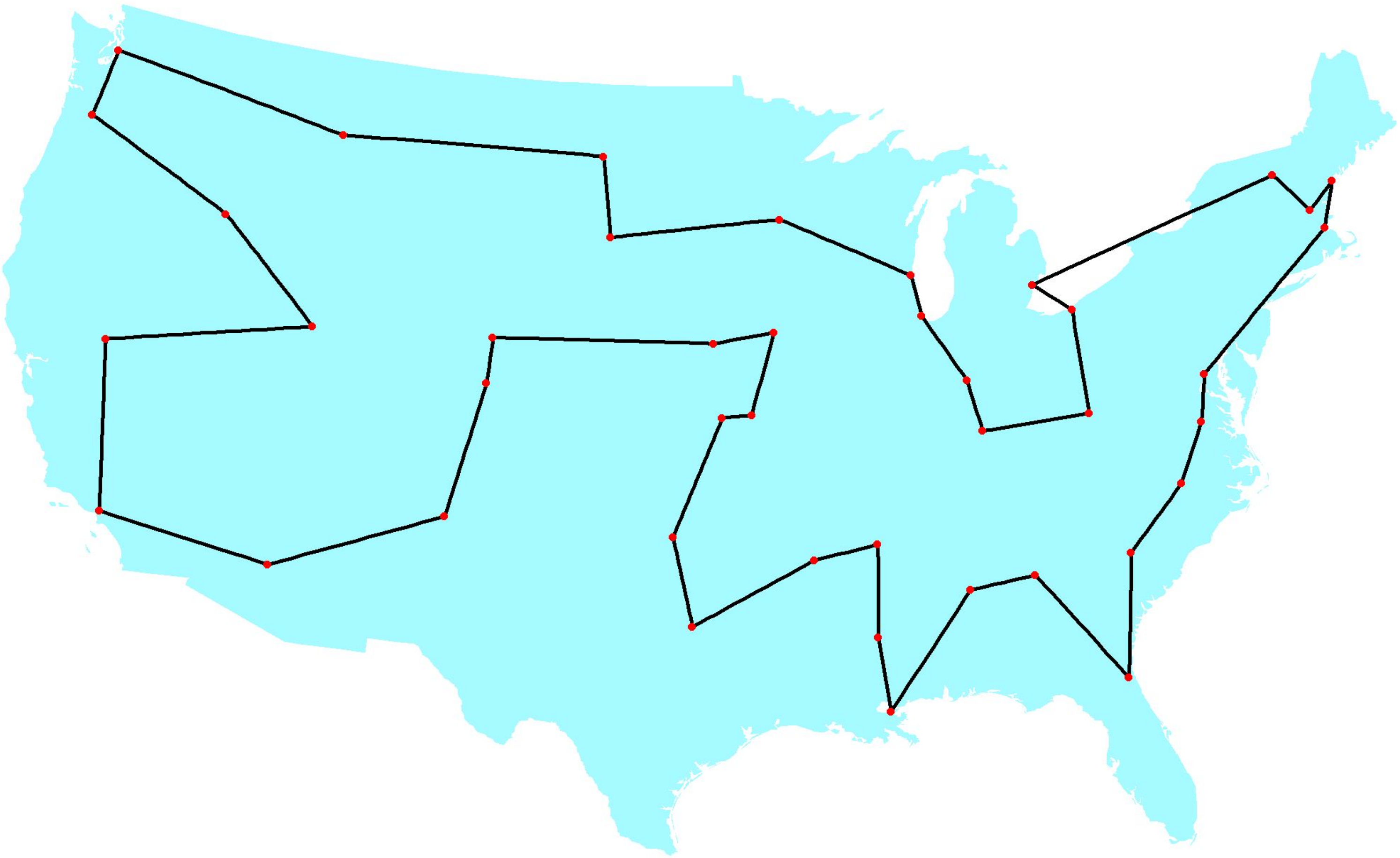
なぜ 整数計画法？

- 離散最適化における重要な手法である
- 実務上，多くの問題が整数計画法で解かれている

- おそらく，今後も多くの問題が整数計画法で解かれる
- そうでなくても，整数計画法で培われた技法は
  未来においても役立つ (はずである)

整数計画法で解ける問題の例 (1)

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)



アメリカ 49 都市インスタンス (Dantzig, Fulkerson, Johnson 1954)

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/pictorial/dfj.html

整数計画法で解ける問題の例 (2)

ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい

(森，松井 2004 より)

整数計画法で解ける問題の例 (2)

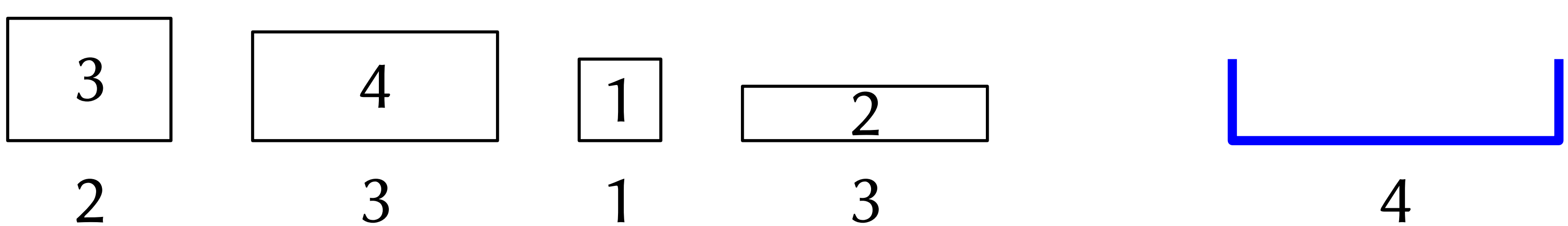
ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい



幅：　重さ
面積：収入

(森，松井 2004 より)

整数計画法で解ける問題の例 (2)

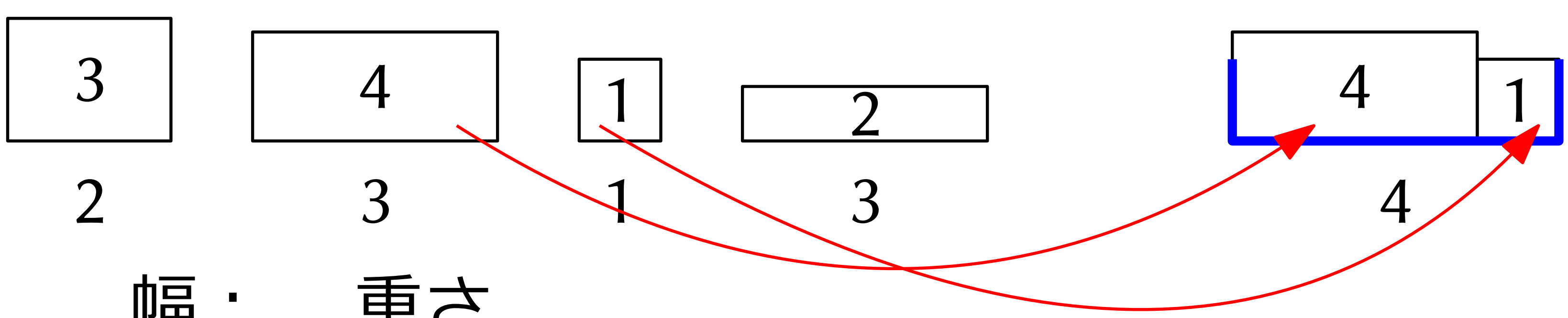
ナップサック問題 (knapsack problem)

4 つの商品

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

ナップサックの重量制限を守って，総収入を最大化したい



幅： 重さ
面積： 収入

(森，松井 2004 より)

整数計画法で解ける問題の例 (3)

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

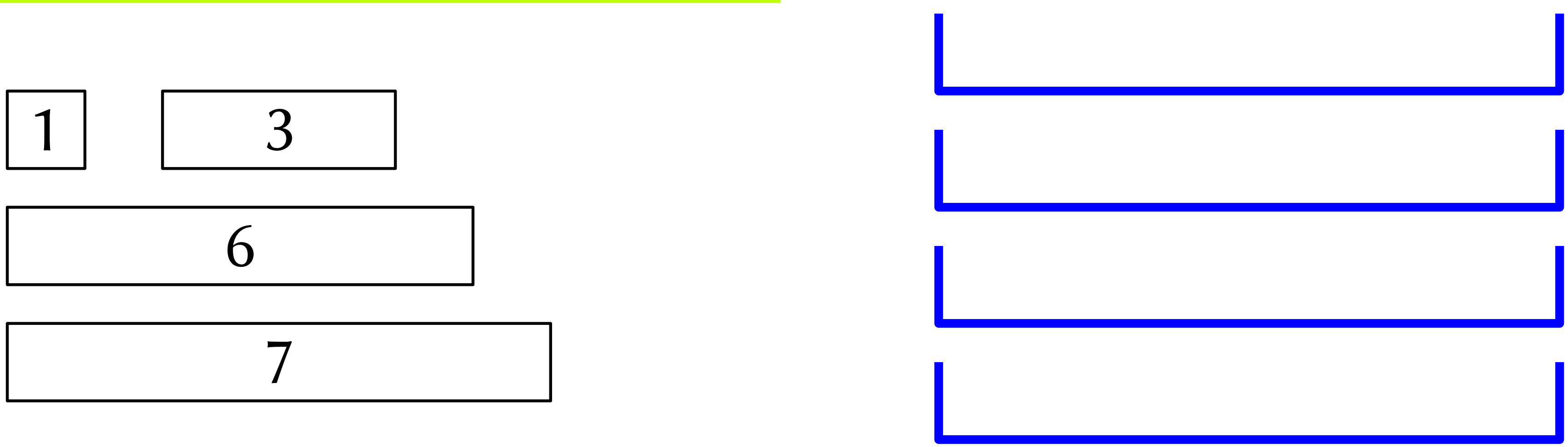
bin ≠ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

整数計画法で解ける問題の例 (3)

ビンパッキング問題 (bin packing problem)

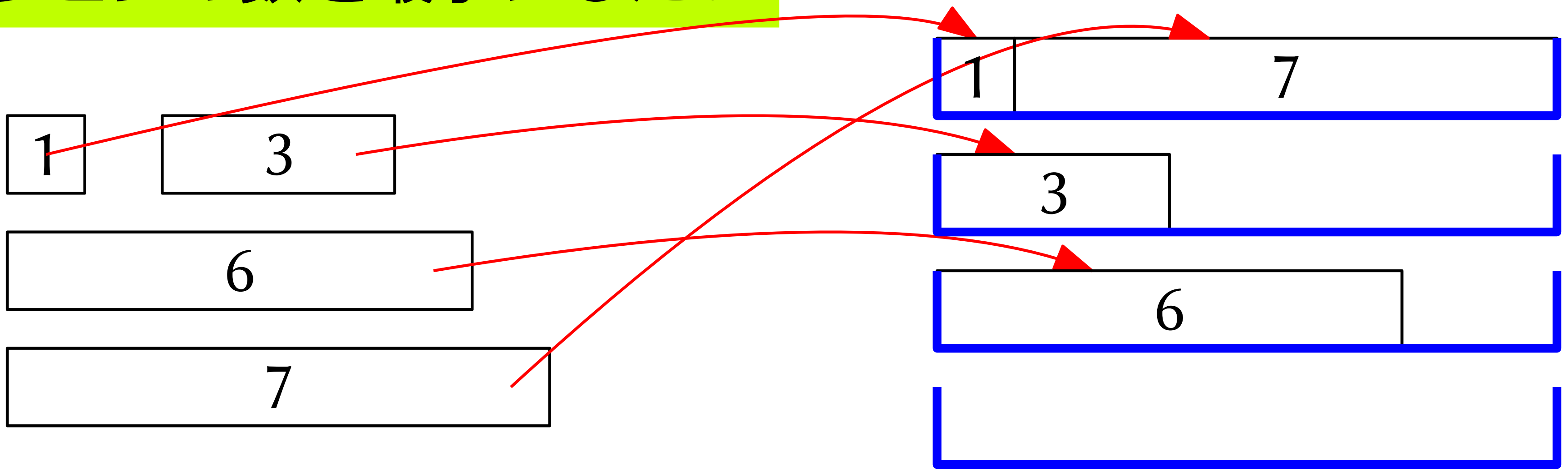
bin ≠ 瓶

4 つのアイテム

アイテム	1	2	3	4
大きさ	1	3	6	7

ビンの容量：8

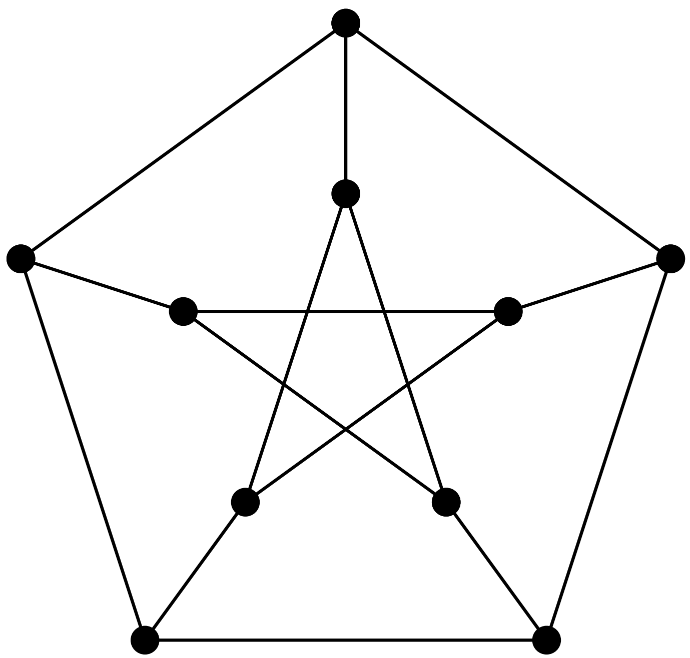
ビンの容量を守りながら，アイテムをすべて詰めるために，
使うビンの数を最小にしたい



(宮本 2012 より)

整数計画法で解ける問題の例 (4)

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)



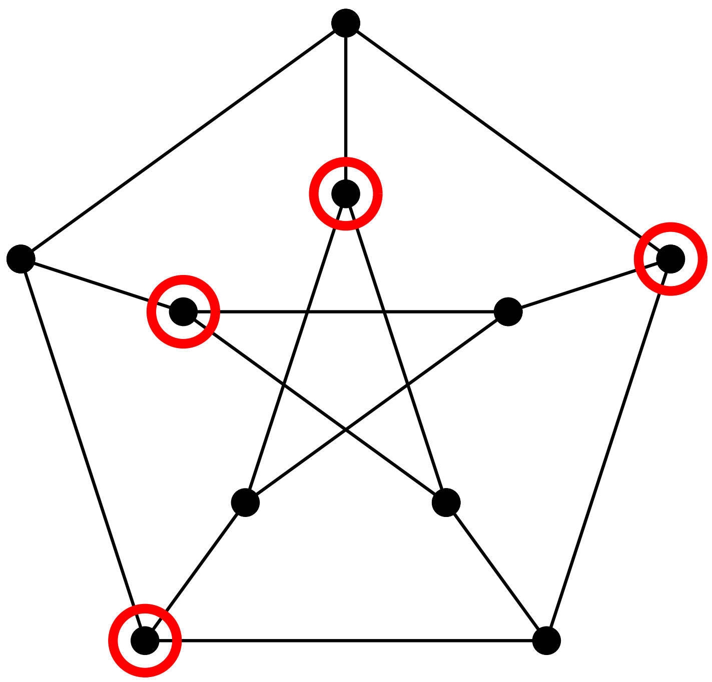
無向グラフ

互いに隣接しない頂点を
できるだけ多く選びたい

独立集合 = 互いに隣接しない頂点からなる集合

整数計画法で解ける問題の例 (4)

最大独立集合問題 (maximum independent set problem)



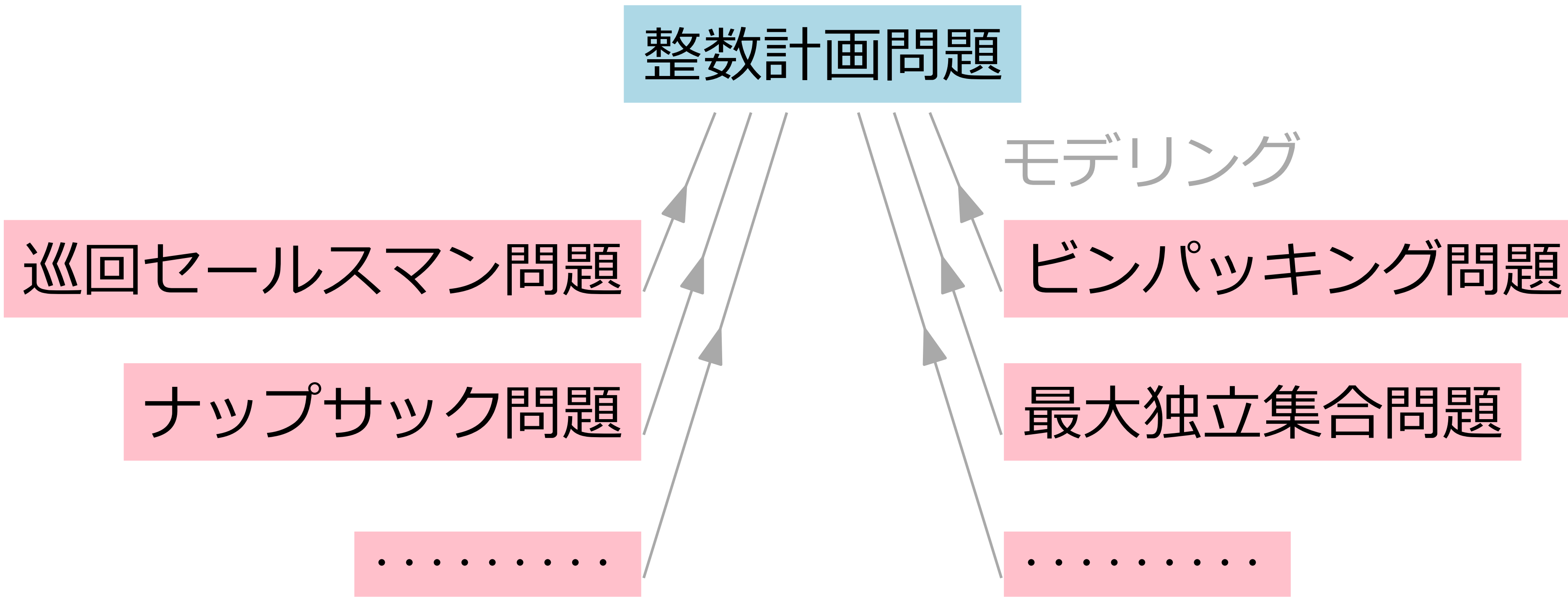
無向グラフ

互いに隣接しない頂点を

できるだけ多く選びたい

独立集合 = 互いに隣接しない頂点からなる集合

整数計画法：モデリング

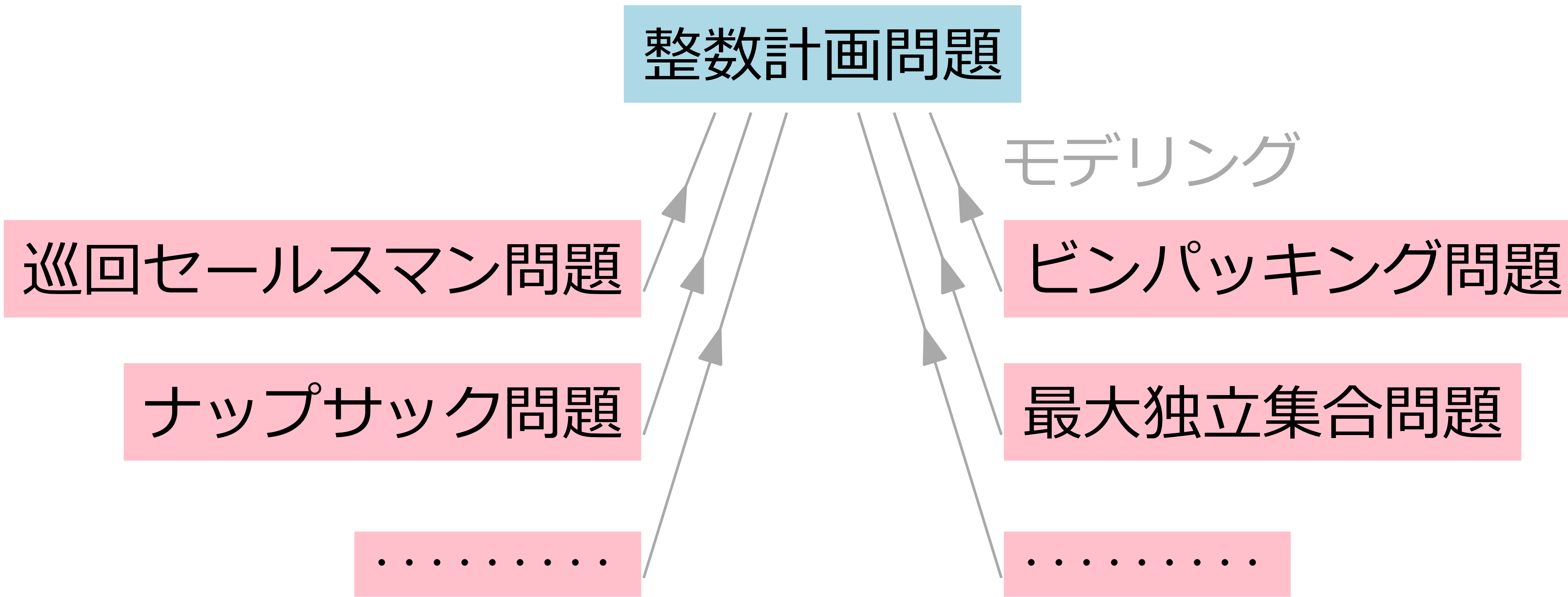


考えるべき課題 (1)

整数計画問題として どのようにモデリングするか？

モデリング $=$ モデル化 (modeling)，定式化 (formulation)

整数計画法：アルゴリズム



考えるべき課題 (2)

整数計画問題を どのように解くか？

アルゴリズム

- 一般的 な枠組み
- 個別問題 の性質

アルゴリズムをなぜ勉強するか？

考えるべき課題 (2)

整数計画問題を どのように解くか？

アルゴリズム

一般的 な枠組み

個別問題 の性質

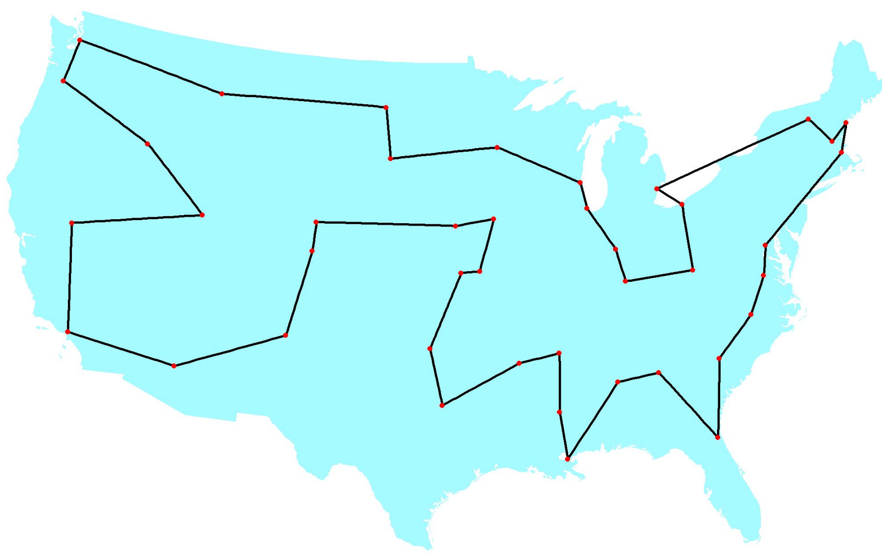
ソルバーをうまく使う

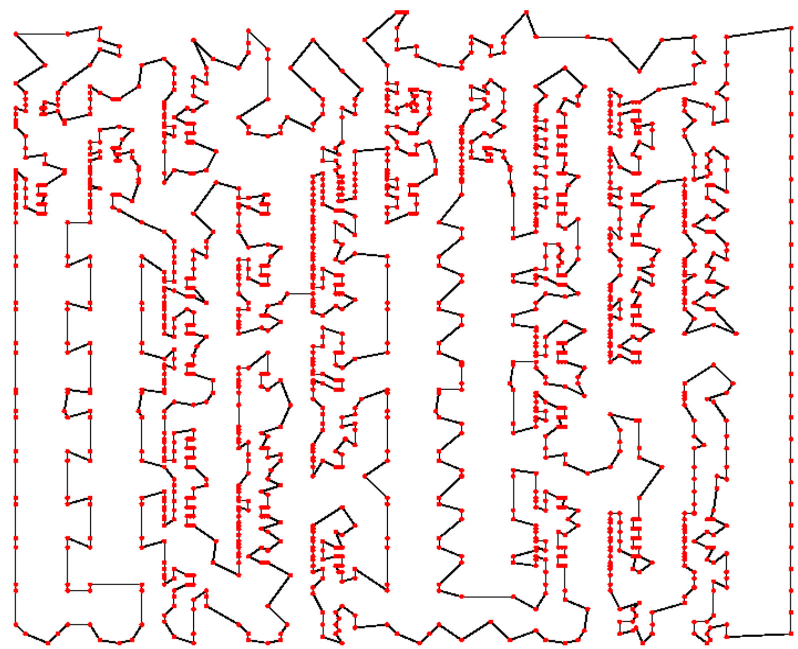
自分で用意する

ポイント

大規模な問題を解くためには，どちらも重要

なぜ気にするのか？





アメリカ 49 都市インスタンス

(Dantzig, Fulkerson, Johnson 1954)

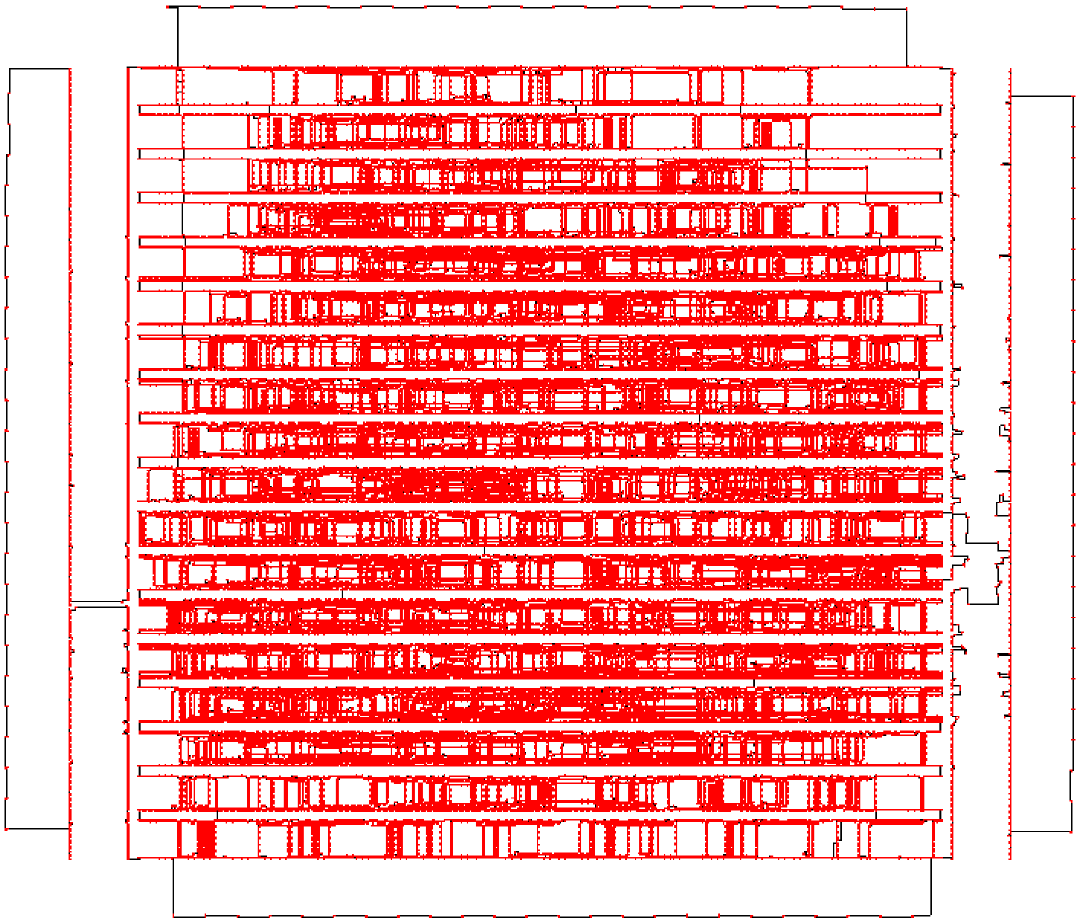
VLSI インスタンス RBY1599

整数計画問題 ← 巡回セールスマン問題 ← VLSI 製造のある問題

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/pictorial/dfj.html

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/vlsi/rby1599.tour.html

なぜ気にするのか (続)



VLSI インスタンス pla85900
(Applegate et al. 2006)

TSPLIB の最大インスタンス

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/pla85900/index.html

重要な事実

これらの解は
整数計画法 によって **最適性** が **保証** されている

解きやすい問題と解きにくい問題

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題
- $\cdots$

＝ 多項式時間で解ける

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- ナップサック問題
- ビンパッキング問題
- 最大独立集合問題
- $\cdots$

＝ NP 困難

本講義の対象

解きやすい問題と解きにくい問題

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題
- $\cdots$

= 多項式時間で解ける

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- ナップサック問題
- ビンパッキング問題
- 最大独立集合問題
- $\cdots$

= NP 困難

本講義の対象

ポイント

NP 困難だからといって

- 解けないわけではない
- 解くのをあきらめてよいわけではない

アルゴリズム開発の重要性

Bixby (2021) の講演 https://www.youtube.com/watch?v=_R8-nt5NyiE

整数計画ソルバーの性能向上

1991 年 → 2021 年

CPLEX 1.2 Gurobi Optimizer 9.1

1 年 3,730,625 倍の高速化を達成 0.1 秒

(マシンの性能向上は含まない)

Robert Bixby

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robert_Bixby.jpg

解きやすい問題と解きにくい問題

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題
- ・・・

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- ナップサック問題
- ビンパッキング問題
- 最大独立集合問題
- ・・・

ポイント

- 解きにくい問題が 等しく 解きにくいわけではない
- 解きやすい問題が 等しく 解きやすいわけではない

そもそも「**解く**」とは どういうことなのか？

講義計画 (前半)

<準備>

1. 整数計画法と線形計画法 (10/4)
2. 線形計画法の復習 (1)：線形不等式系と凸多面集合 (10/11)

∗ 休み (体育祭) (10/18)

3. 線形計画法の復習 (2)：単体法と双対定理 (10/25)
4. 線形計画緩和 (11/1)

<モデリング>

5. 整数計画モデリング (1)：組合せ最適化問題 (11/8)
6. 整数計画モデリング (2)：より複雑な問題 (11/15)
7. 整数計画モデリング (3)：離接計画 (11/22)

講義計画 (後半)

<アルゴリズム>

8. 分枝限定法 (11/29)
9. 切除平面法 (12/6)
10. 妥当不等式の追加 (12/13)
11. 列生成法 (12/20)

∗ 休み (国内出張) (12/27)

∗ 休み (冬季休業) (1/3)

12. ラグランジュ緩和 (1)：原理 (1/10)
13. ラグランジュ緩和 (2)：最適ラグランジュ緩和 (1/17)

<まとめ・予備>

14. まとめ (1/24)
15. 予備日 (1/31)

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

線形計画問題：小さな例

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題：小さな例

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \leq 1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

変数は x_1 と x_2

線形計画問題：小さな例

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boxed{2x_1 - 3x_2} \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0
\end{array}
$$

目的関数

変数は x_1 と x_2

線形計画問題：小さな例

minimize	$2x_1 - 3x_2$	目的関数
subject to	$x_1 + 2x_2 \leq 2,\quad x_1 \leq 1,\quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$	制約

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

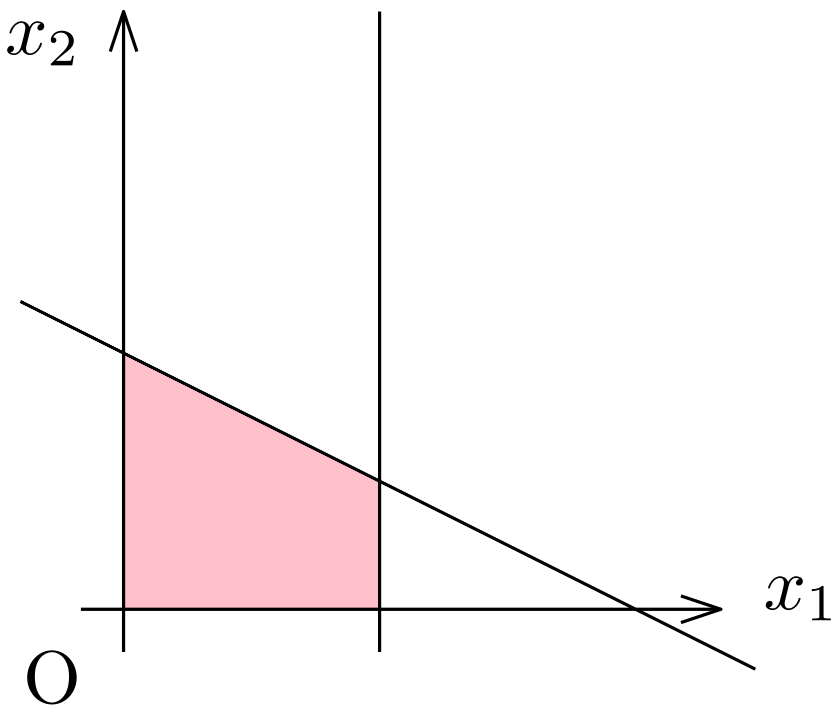
変数は x_1 と x_2

線形計画問題：小さな例

minimize $2x_1 - 3x_2$ 目的関数

subject to
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ x_1 &\le 1, \\ x_1 &\ge 0, \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$
制約

変数は x_1 と x_2



線形計画問題：小さな例

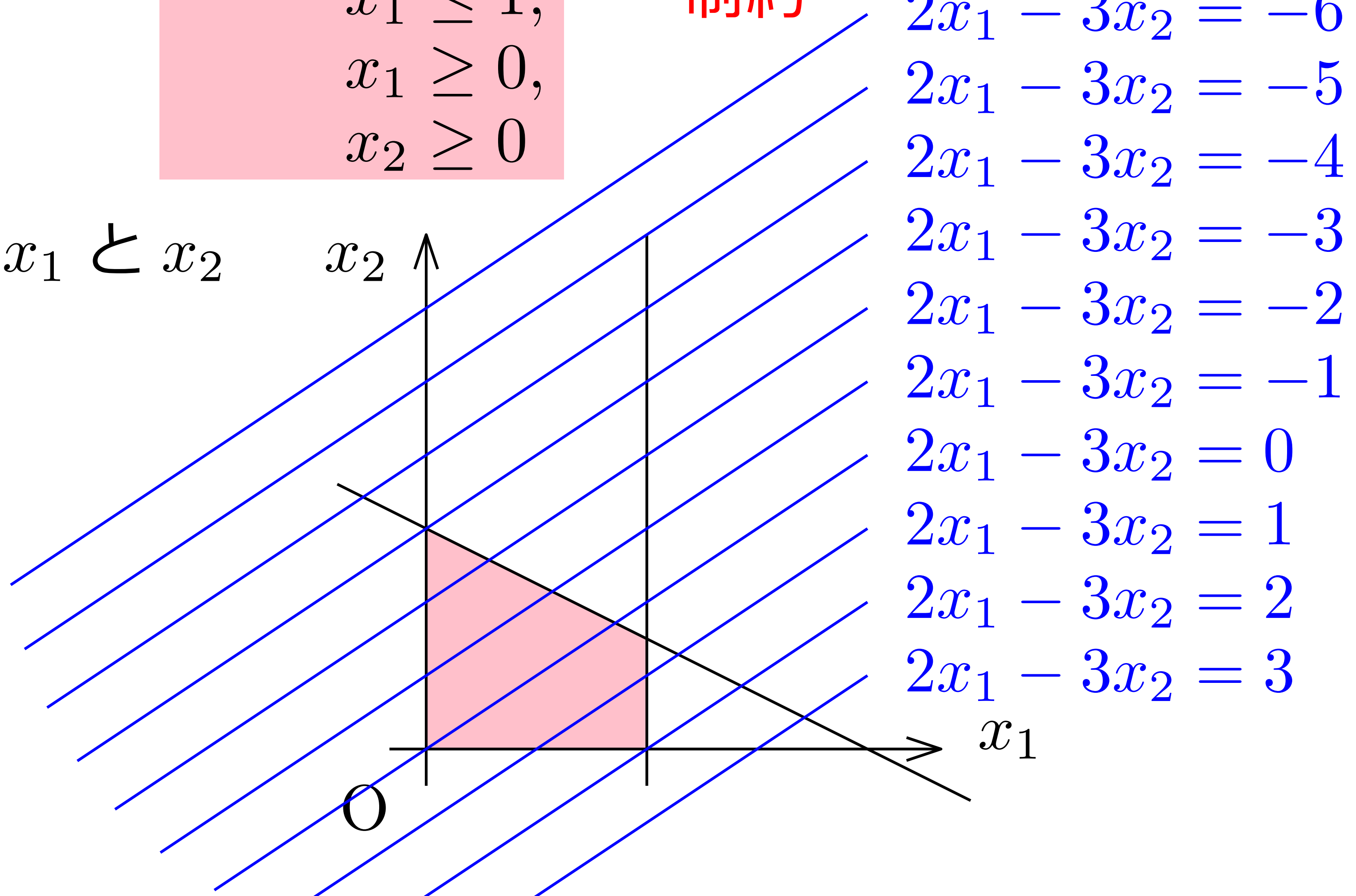
minimize $2x_1 - 3x_2$ 目的関数

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

制約

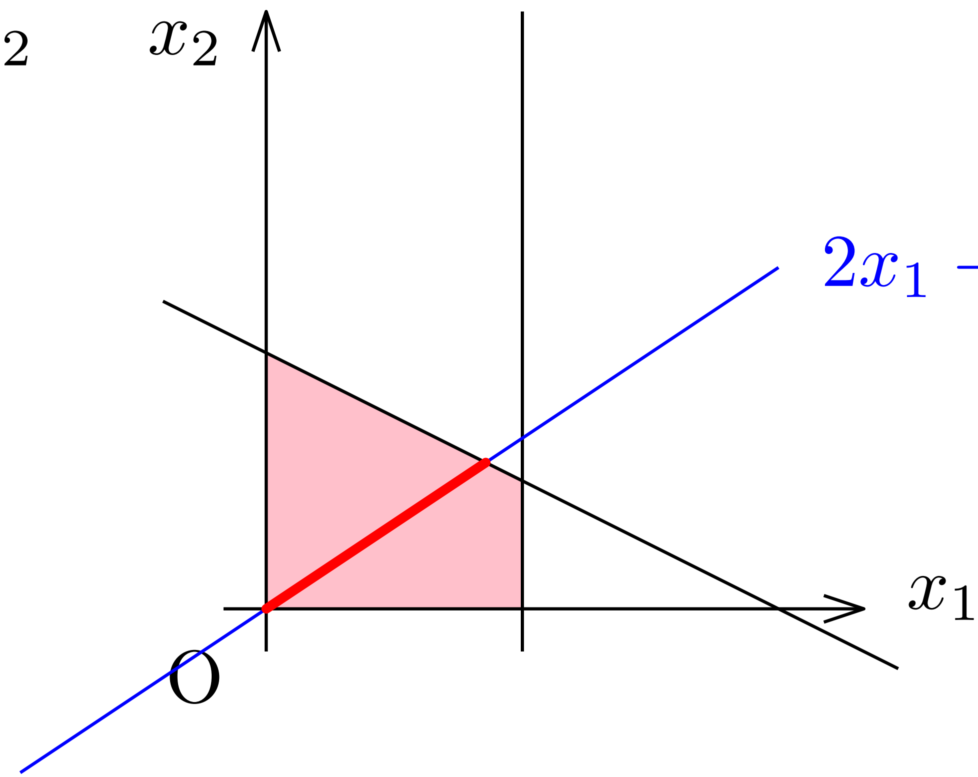
変数は x_1 と x_2



線形計画問題：小さな例

minimize	$2x_1 - 3x_2$	目的関数
subject to	$x_1 + 2x_2 \leq 2,\quad x_1 \leq 1,\quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$	制約

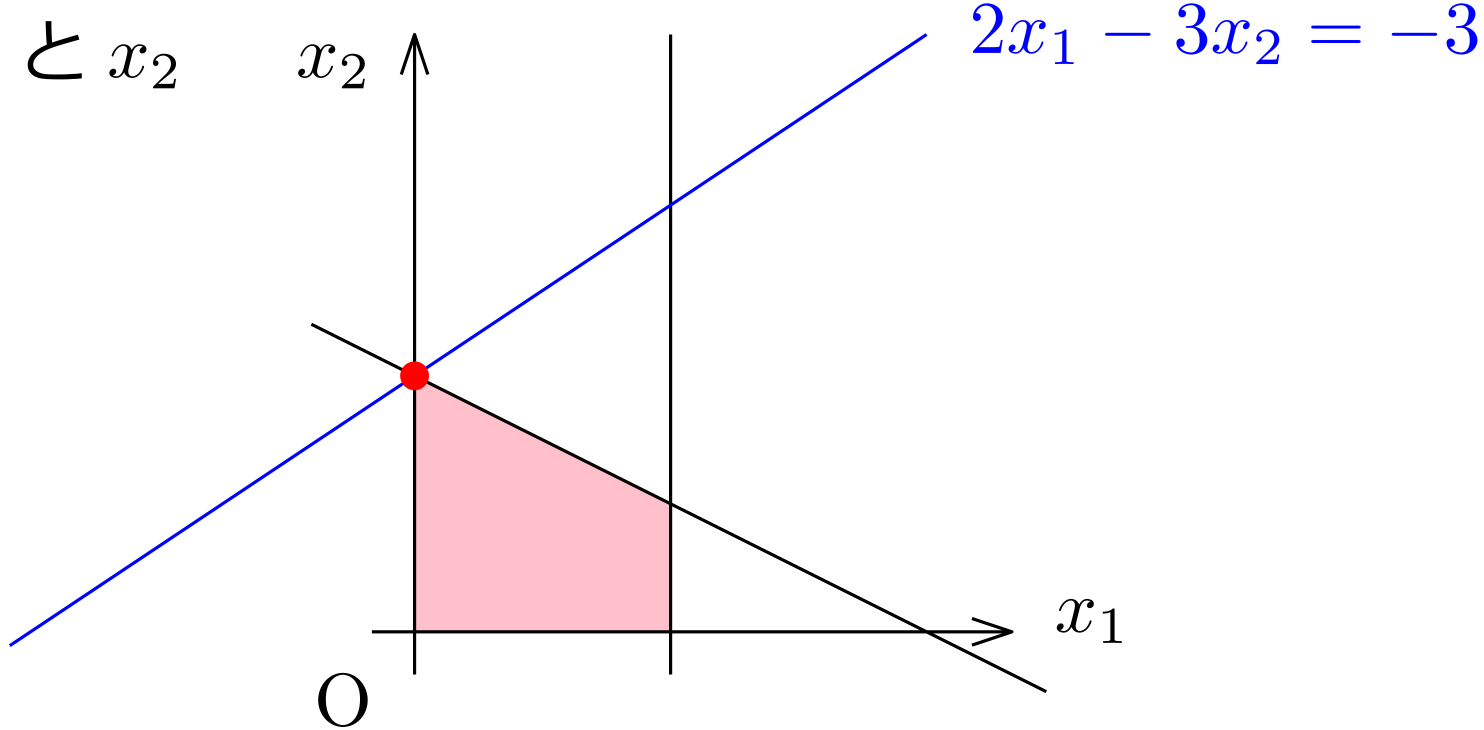
変数は x_1 と x_2



線形計画問題：小さな例

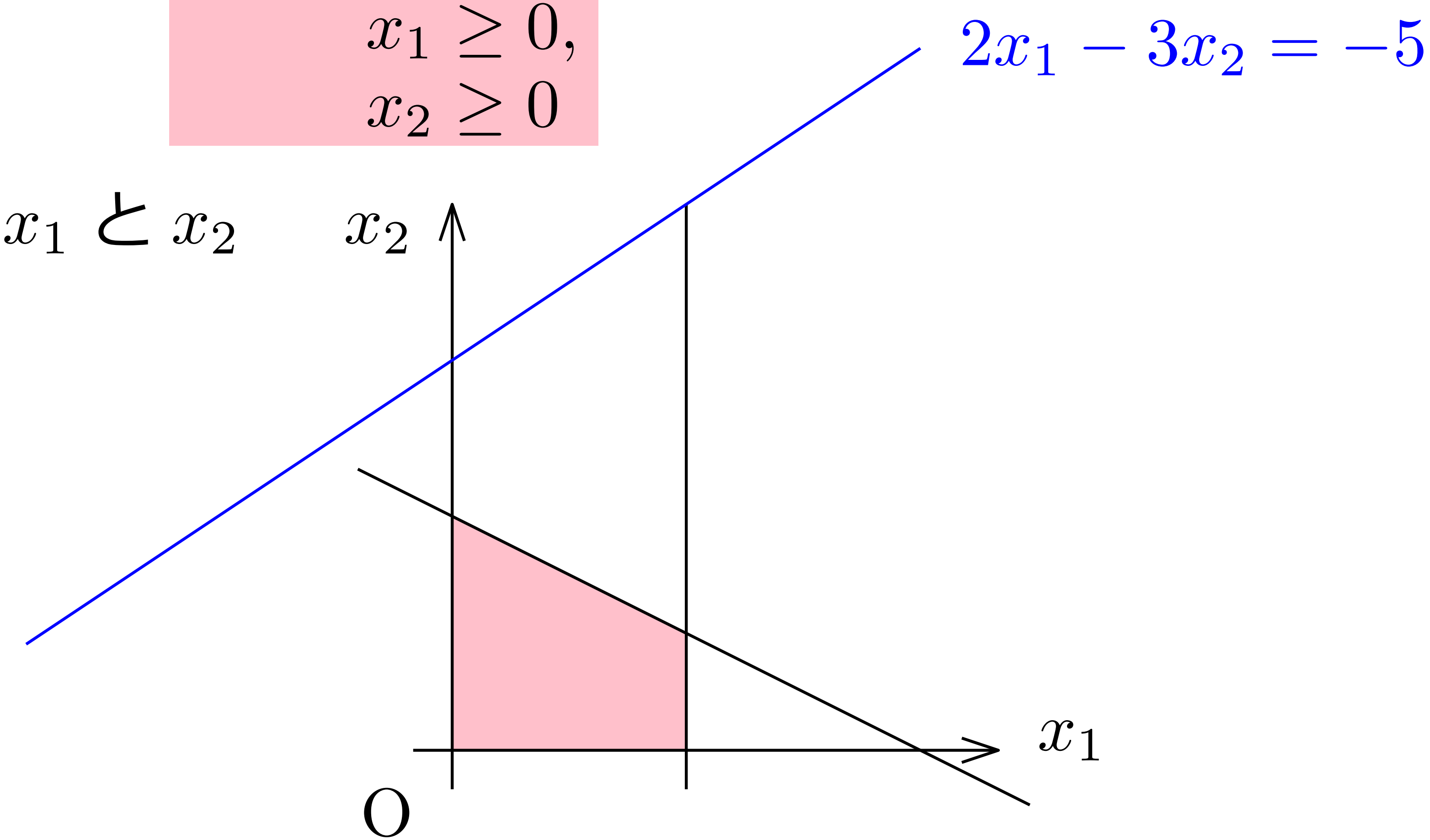
minimize	$2x_1 - 3x_2$	目的関数
subject to	$x_1 + 2x_2 \le 2,\quad x_1 \le 1,\quad x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$	制約

変数は x_1 と x_2



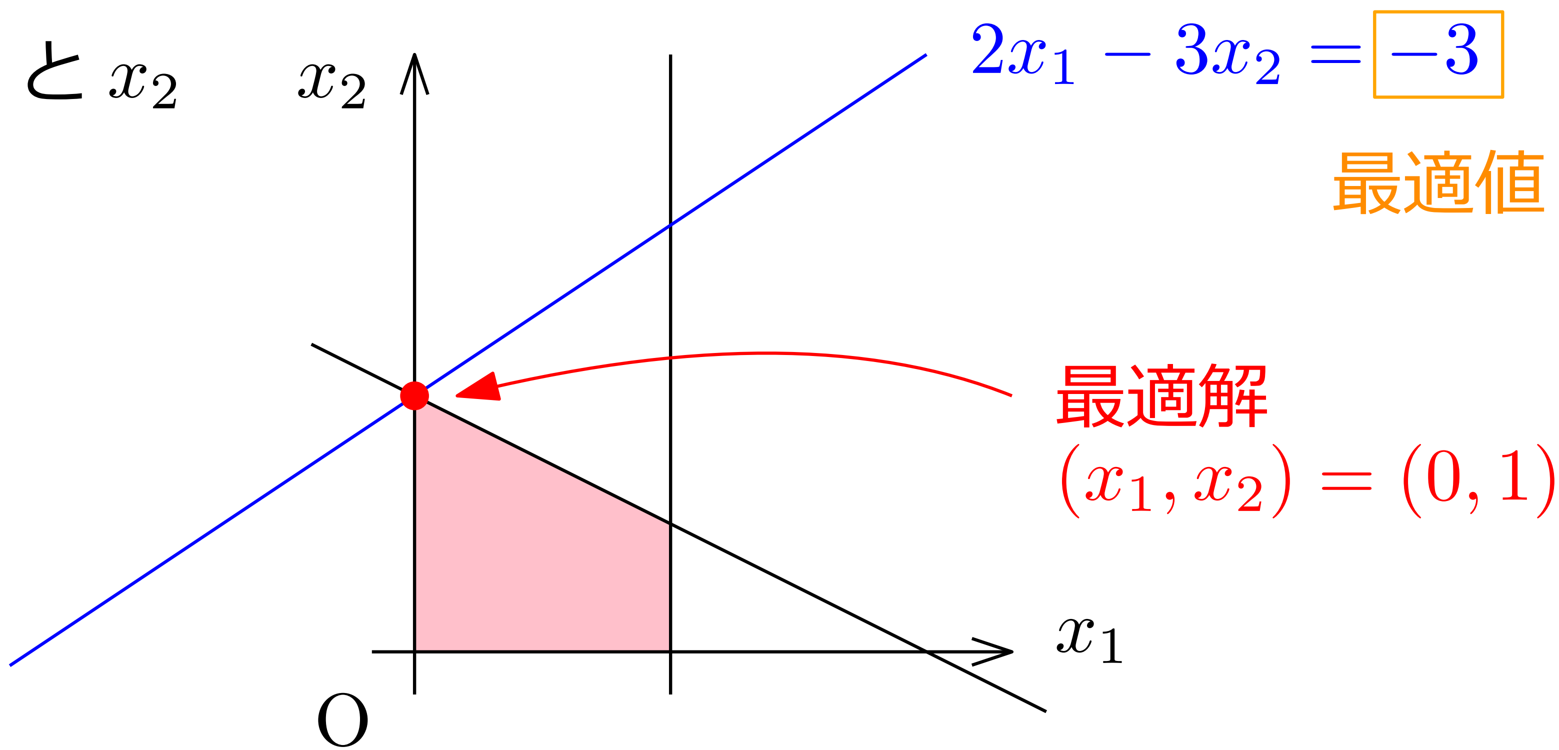
minimize	$2x_1 - 3x_2$	目的関数
subject to	$x_1 + 2x_2 \leq 2,$ $x_1 \leq 1,$ $x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0$	制約

変数は x_1 と x_2



minimize	$2x_1 - 3x_2$	目的関数
subject to	$x_1 + 2x_2 \leq 2,$ $x_1 \leq 1,$ $x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0$	制約

変数は x_1 と x_2



線形計画問題：定義に向けて

線形計画問題の構成要素

変数	実数値をとる
制約	変数に関する線形の等式 または 変数に関する等号付きの不等式
目的関数	変数に関する線形関数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題：定義 (不等式標準形)

線形計画問題 (linear program) とは，次のように書かれる問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0
\end{aligned}
\end{array}
$$

ここで，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は変数，

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n$ は定数

線形計画問題：定義 (不等式標準形)

線形計画問題 (linear program) とは，次のように書かれる問題

minimize	$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$	目的関数
subject to	$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$	制約

ここで，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は変数，

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n$ は定数

線形計画問題：定義 (不等式標準形)

線形計画問題 (linear program) とは，次のように書かれる問題

minimize $\quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 　目的関数

subject to

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

制約

不等式標準形

ここで，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は変数，

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n$ は定数

線形計画問題：定義 (等式標準形)

線形計画問題 (linear program) とは，次のように書かれる問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \text{目的関数} \\
\text{subject to} & \begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0
\end{aligned} \quad \text{制約}
\end{array}
$$

等式標準形

ここで，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は変数，

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n$ は定数

線形計画問題：行列表現 (準備)

次のように，ベクトルと行列を導入

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ここで，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は変数，

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ は定数}$$

線形計画問題：行列表現 (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

線形計画問題：行列表現 (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boxed{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n} \\
\text{subject to} & \begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0, \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0
\end{aligned}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

線形計画問題：行列表現 (等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ &\ \vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}
$$

線形計画問題：行列表現 (等式標準形)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \\
\text{subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\
& & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \\
& x_1 & \geq 0, \\
& x_2 & \geq 0, \\
& & \vdots \\
& x_n & \geq 0
\end{array}
$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

定義：ベクトルの大小関係

ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i \geq y_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

線形計画問題：行列表現 (等式標準形)

minimize $\quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\ \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,\\
x_1 &\geq 0,\\
x_2 &\geq 0,\\
&\ \vdots\\
x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

つまり，等式標準形の線形計画問題は次のように書ける

minimize $\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to $\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

線形計画問題：行列表現 (不等式標準形)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

不等式標準形の線形計画問題は次のように書ける

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

線形計画問題：定義のまとめ

等式標準形 (standard form)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ただし，

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

注

- 違うものを等式標準形や不等式標準形と呼ぶこともある

線形計画問題：最大化→最小化

性質：問題の変換 (最大化と最小化)

線形計画問題では，最大化も可能である

この最大化を解きたければ → この最小化を解けばよい

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

線形計画問題：不等式制約→等式制約

性質：問題の変換 (不等式から等式へ)

不等式制約は等式制約に書き換えられる

この制約を
満たしたければ

→

この制約を
満たせばよい

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 - s = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& s \geq 0
\end{aligned}
$$

ただし，変数の数は
不等式の数だけ増加

線形計画問題：不等式制約→等式制約

性質：問題の変換 (不等式から等式へ)

不等式制約は等式制約に書き換えられる

この制約を満たしたければ → この制約を満たせばよい　スラック変数 (slack variable)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 - s = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

ただし，変数の数は不等式の数だけ増加

線形計画問題：等式制約→不等式制約

性質：問題の変換 (等式から不等式へ)

等式制約は不等式制約に書き換えられる

この制約を
満たしたければ

→

この制約を
満たせばよい

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ただし，不等式の数は
等式の数の 2 倍

線形計画問題：等式制約 $\leftrightarrow$ 不等式制約

性質：問題の変換

- 不等式制約は等式制約に書き換えられる
- 等式制約は不等式制約に書き換えられる

線形計画問題：等式制約 $\leftrightarrow$ 不等式制約

性質：問題の変換

- 不等式制約は等式制約に書き換えられる
- 等式制約は不等式制約に書き換えられる

つまり

- どんな線形計画問題も 等式標準形で 書ける
- どんな線形計画問題も 不等式標準形で 書ける

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

許容解と許容領域

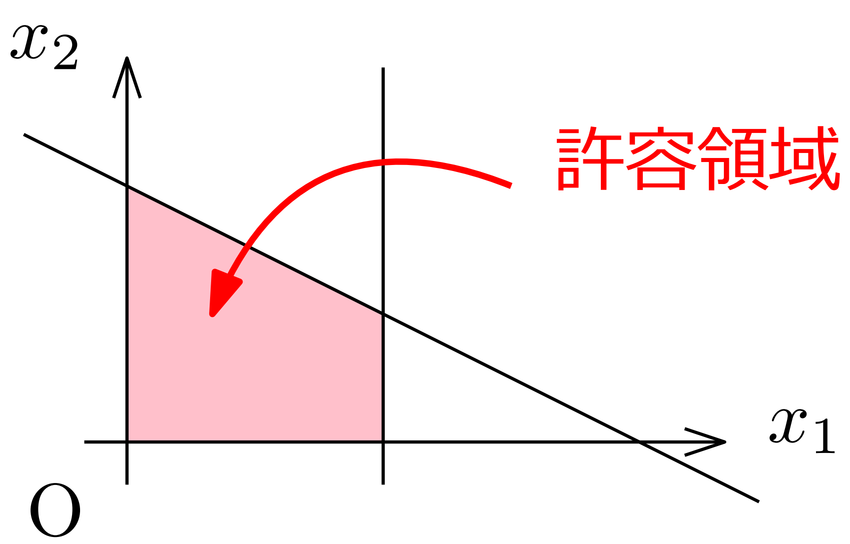
定義：許容解 (feasible solution)

制約をすべて満たす変数の値 (のベクトル)

定義：許容領域 (feasible region)

許容解全体の集合

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \leq 1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



最適解と最適値

定義：最適解 (optimal solution)：最小化問題の場合

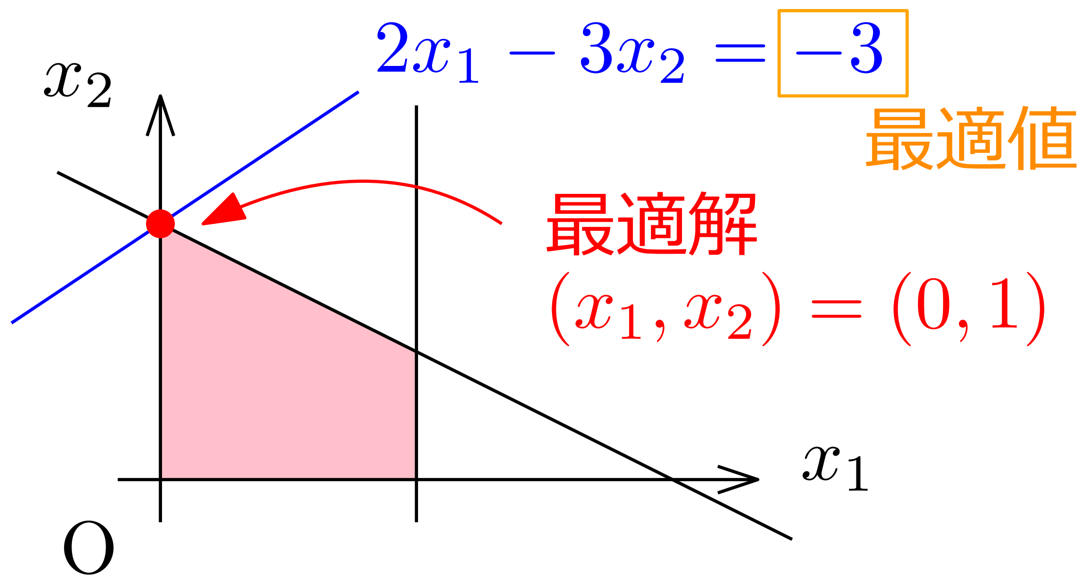
最適解とは，許容解 $\boldsymbol{x}^*$ で次を満たすもの

$$\text{任意の許容解 } \boldsymbol{x} \text{ に対して，} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

定義：最適値 (optimal value)

最適値とは，最適解における目的関数の値

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



線形計画問題を解く とは？

線形計画問題を解く とは？ (不正確な定義)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n}$ を与えて,
それらが定める線形計画問題の**最適解**を **1 つ**求めること

正確な定義 は 第 3 回講義

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

整数計画問題：定義に向けて

整数計画問題の構成要素

変数	整数値をとる
制約	変数に関する線形の等式 または 変数に関する等号付きの不等式
目的関数	変数に関する線形関数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\
& x_1 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

整数全体の集合

整数計画問題：小さな例

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1 \leq 1, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

整数計画問題：小さな例

$$\begin{array}{lr} \text{minimize} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ \text{整数制約} & \boxed{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

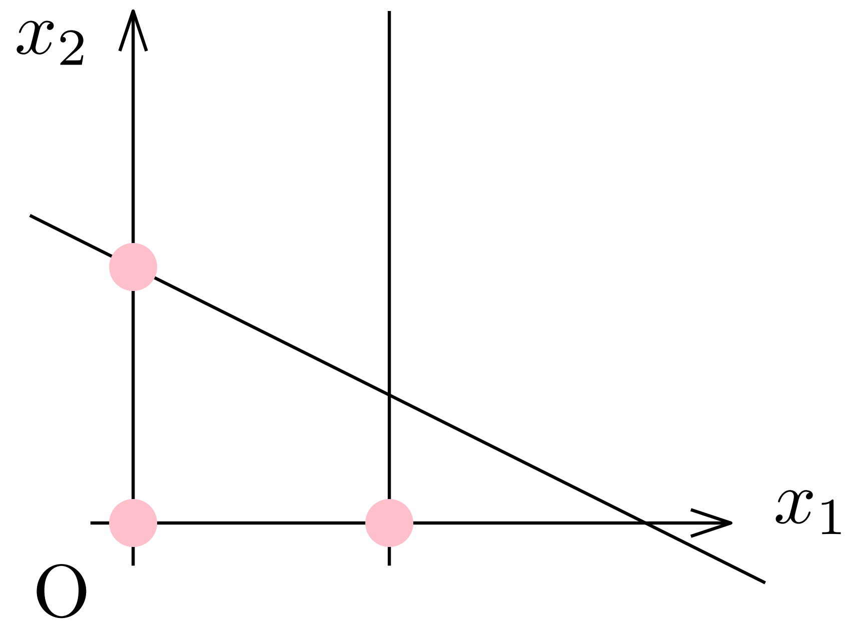
変数は x_1 と x_2

整数計画問題：小さな例

minimize $\quad 2x_1 - 3x_2$ 　変数は x_1 と x_2

subject to
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 2, \\
x_1 &\le 1, \\
x_1 &\ge 0, \\
x_2 &\ge 0,
\end{aligned}
$$

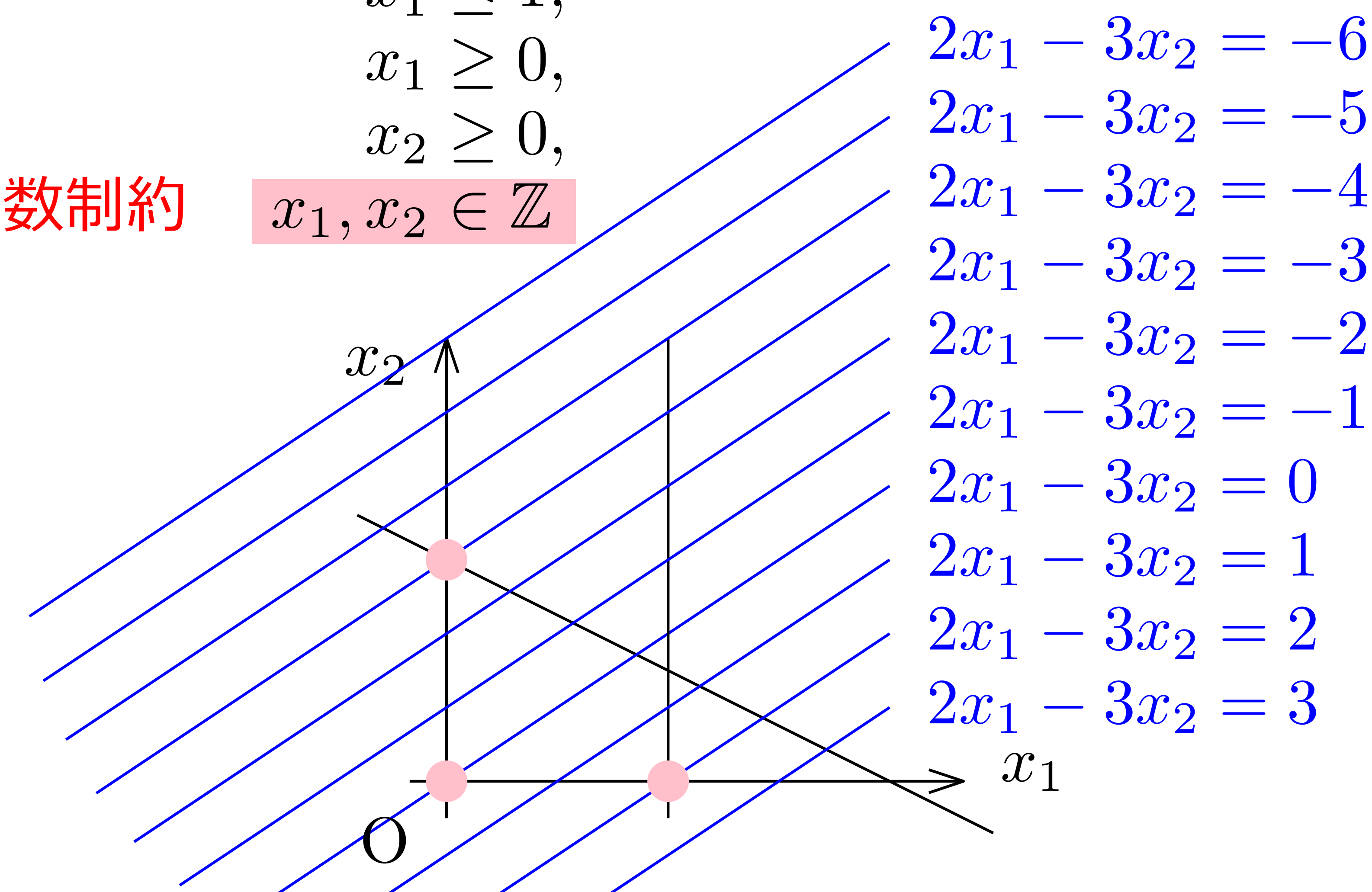
整数制約 $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



整数計画問題：小さな例

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ \text{整数制約} \quad & \boxed{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

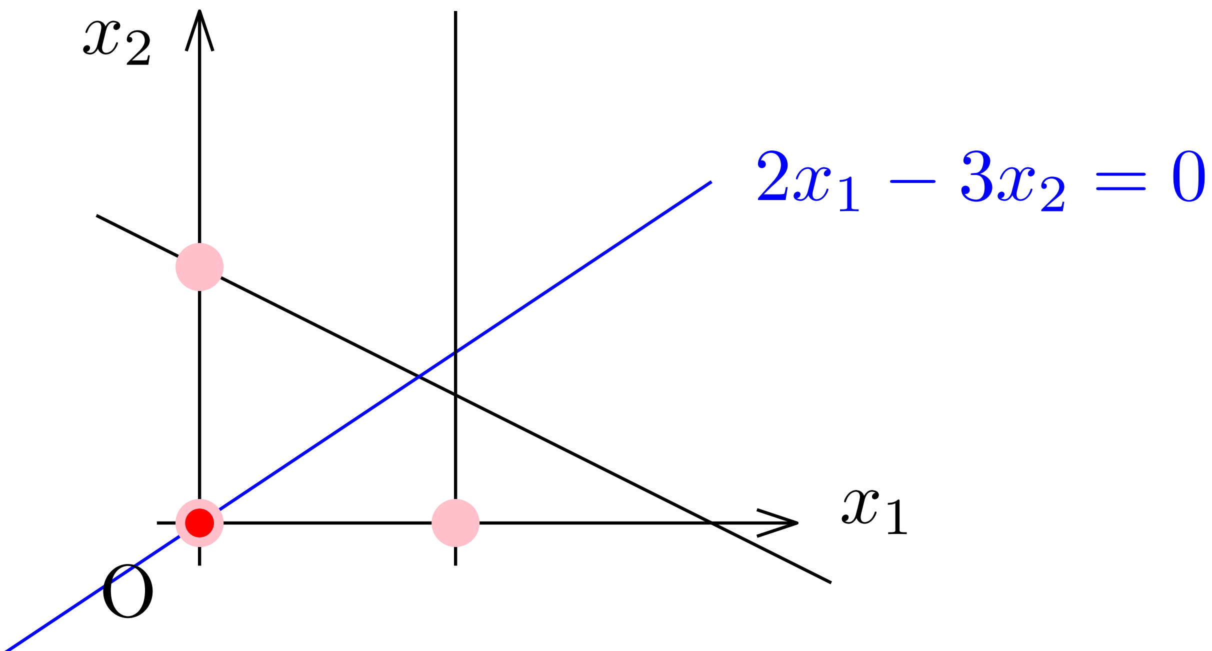
変数は x_1 と x_2



整数計画問題：小さな例

$$\begin{array}{lr} \text{minimize} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ \text{整数制約} & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

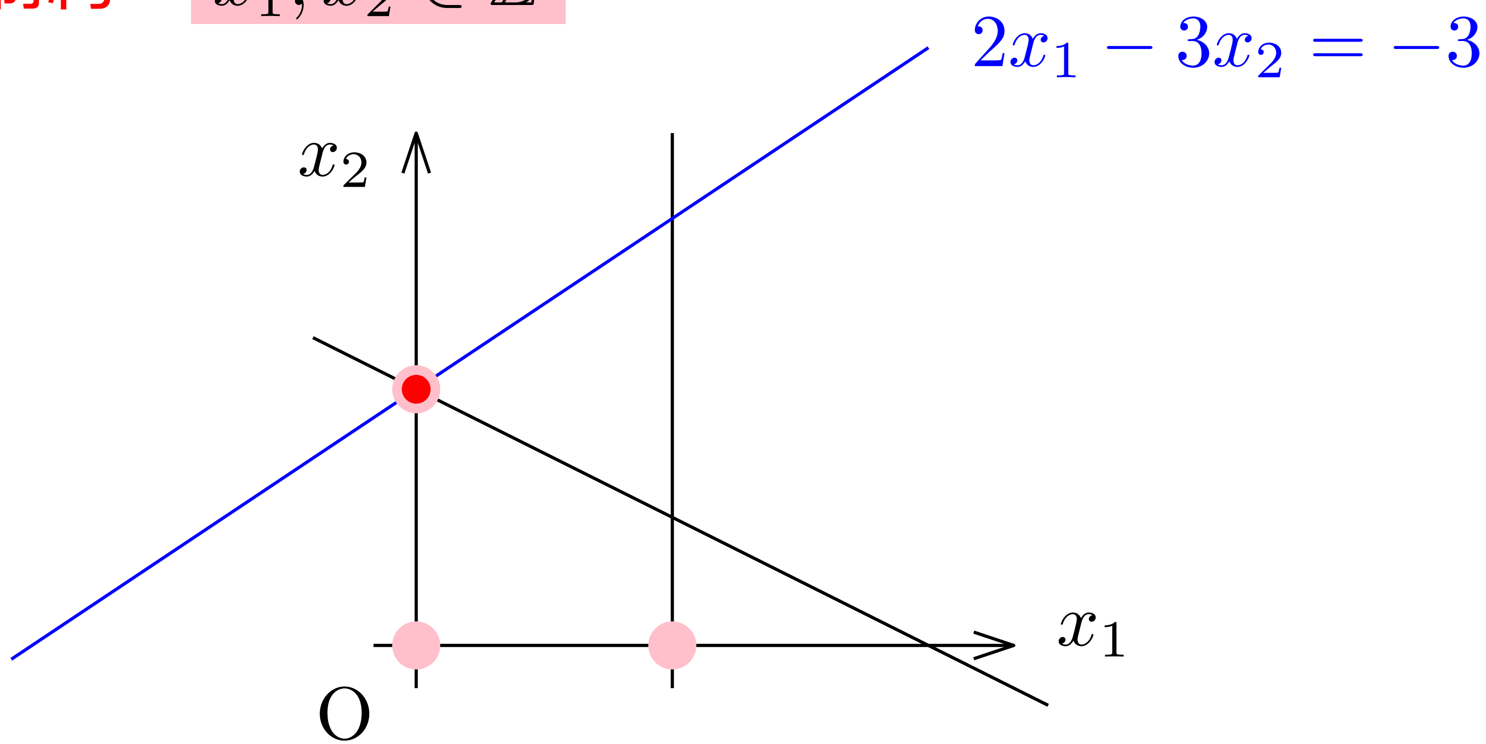
変数は x_1 と x_2



整数計画問題：小さな例

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \\ \text{整数制約} & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

変数は x_1 と x_2



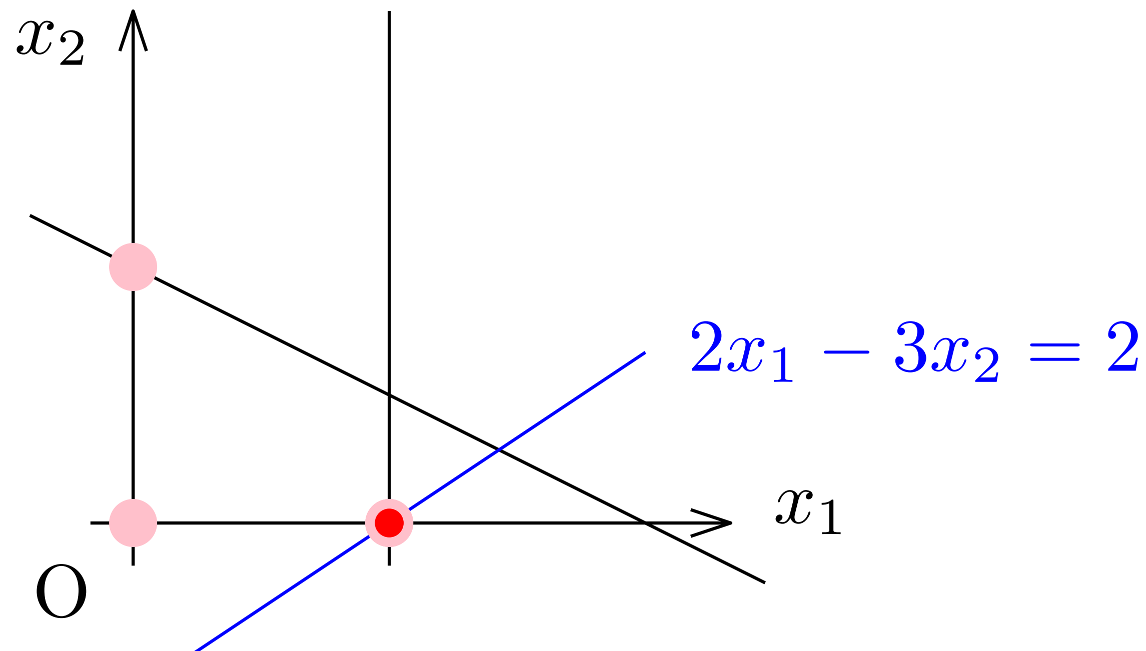
整数計画問題：小さな例

minimize $\quad 2x_1 - 3x_2$ 変数は x_1 と x_2

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 2, \\
x_1 &\le 1, \\
x_1 &\ge 0, \\
x_2 &\ge 0, \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

整数制約



整数計画問題：小さな例

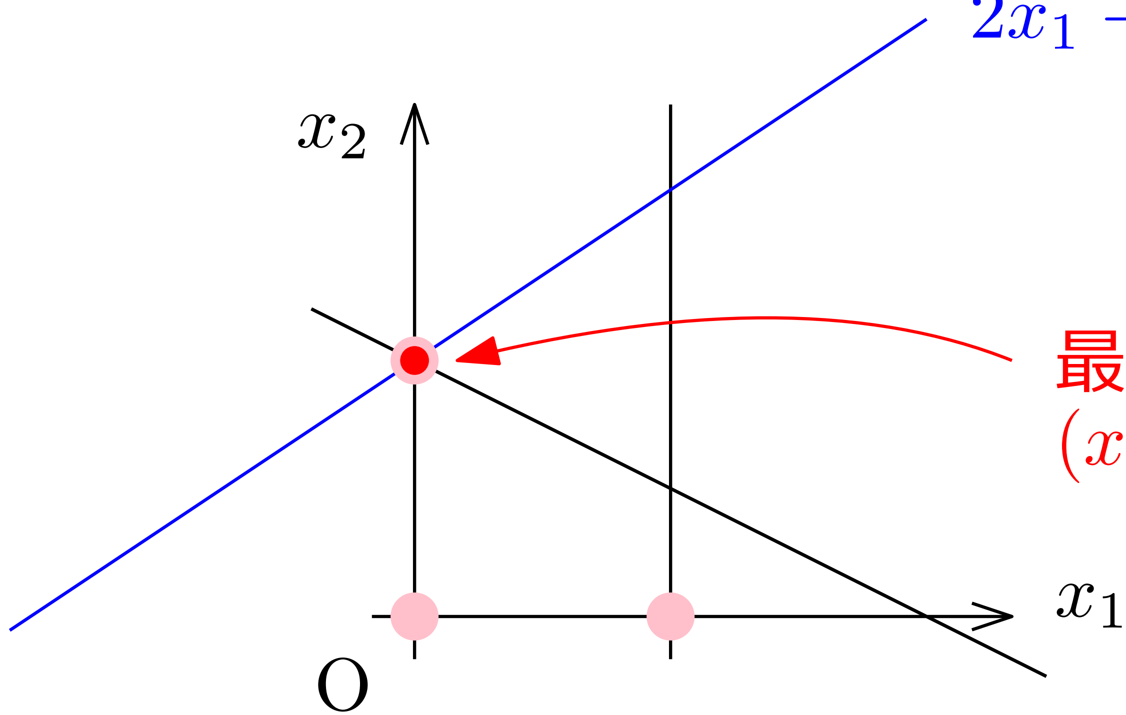
minimize $\quad 2x_1 - 3x_2 \qquad$ 変数は x_1 と x_2

subject to
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ x_1 &\le 1, \\ x_1 &\ge 0, \\ x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

整数制約 $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$2x_1 - 3x_2 = \boxed{-3}$

最適値



最適解
$(x_1, x_2) = (0, 1)$

整数計画問題 (integer program)：定義

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

ただし，

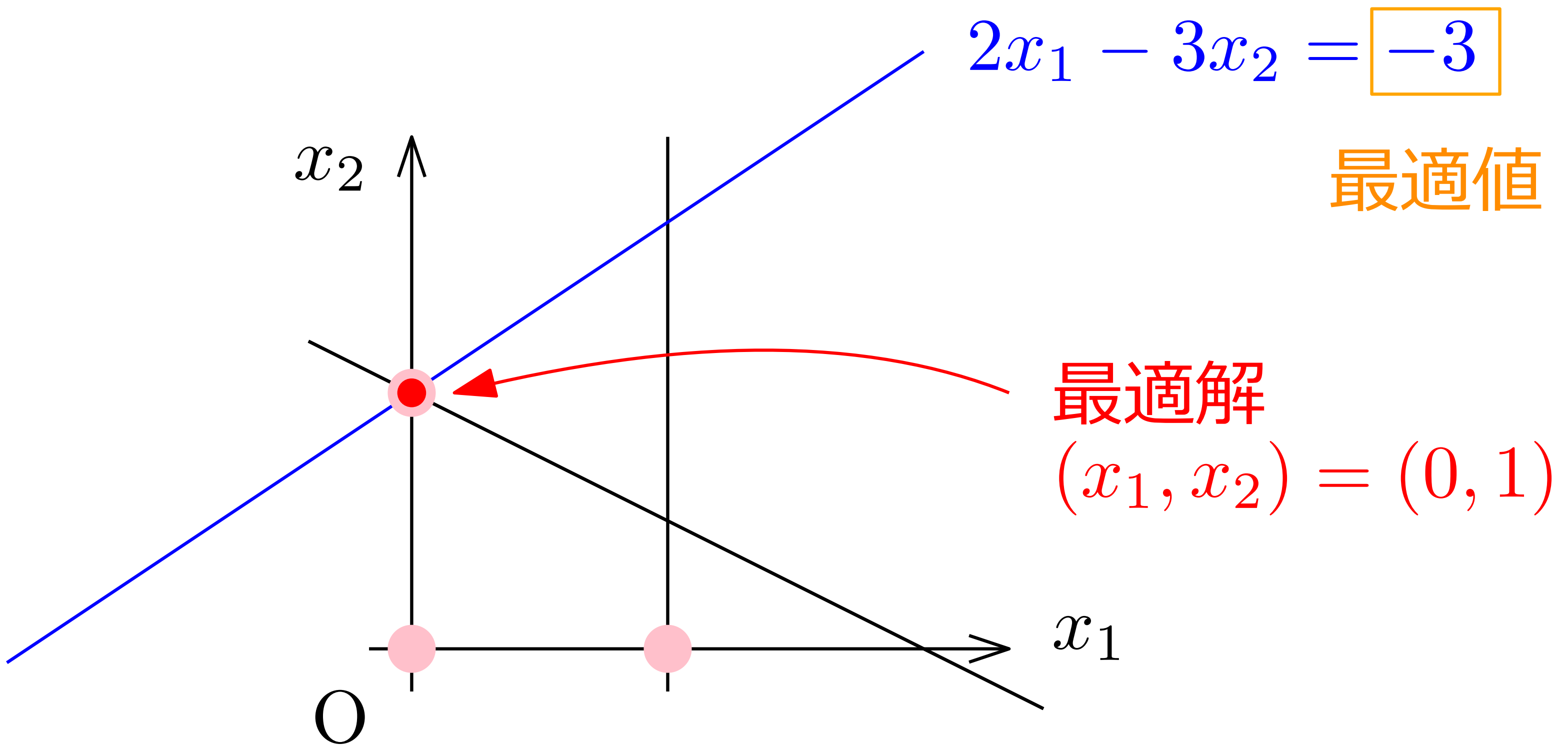
- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数

注

- 違うものを等式標準形や不等式標準形と呼ぶこともある

許容解，許容領域，最適解，最適値

許容解，許容領域，最適解，最適値の定義は
線形計画問題と同様



$$\text{許容領域} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

整数計画問題を解く とは？

整数計画問題を解く とは？ (不正確な定義)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を与えて,
それらが定める整数計画問題の**最適解**を **1 つ**求めること

正確な定義 は 第 4 回講義

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

不等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

線形計画問題と整数計画問題 (1)

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

線形計画問題と整数計画問題 (1)

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

知られていること

多項式時間で解ける

(解きやすい問題)

Khachiyan (1979)

NP 困難である

(解きにくい問題)

Karp (1972)

線形計画問題と整数計画問題 (1)

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

知られていること

多項式時間で解ける

(解きやすい問題)

NP 困難である

(解きにくい問題)

教訓

ちょっと制約を変えるだけで, 解きにくくなることがある

線形計画問題と整数計画問題 (2)

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

アルゴリズムの考え方 (予告)

整数計画問題を解くために,
線形計画問題を繰り返し解く

今後のはなし

- どのような線形計画問題を解くのか？
- どのように線形計画問題を使うのか？

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

今日の内容

- 線形計画問題，線形計画法の定義
- 整数計画問題，整数計画法の定義
- 変数が少ない場合を解く

注意

この講義で扱う「整数計画問題」は
正確に書くと「整数線形計画問題」と呼ばれるもの

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

等式標準形

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \text{等式制約} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, & \text{非負制約} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n & \text{整数制約}
\end{array}
$$

不等式標準形

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, & \text{不等式制約} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, & \text{非負制約} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n & \text{整数制約}
\end{array}
$$

n と m

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$　変数は n 個
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

等式制約
非負制約
整数制約

不等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

不等式制約
非負制約
整数制約

n と m

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 変数は n 個
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \text{等式制約} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, & \text{非負制約} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n & \text{整数制約} \end{array}$$

等式制約は m 個

不等式標準形

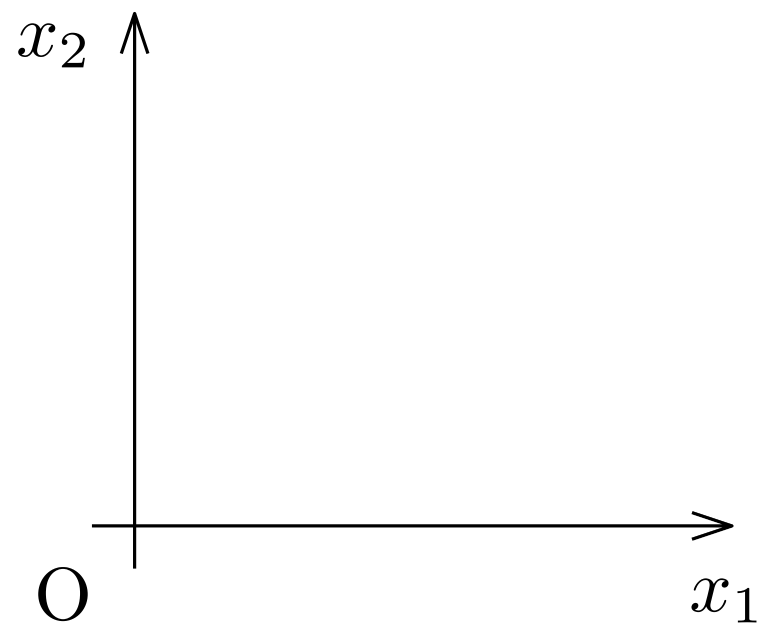
$$\begin{array}{lrl} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, & \text{不等式制約} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, & \text{非負制約} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n & \text{整数制約} \end{array}$$

不等式制約は m 個

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

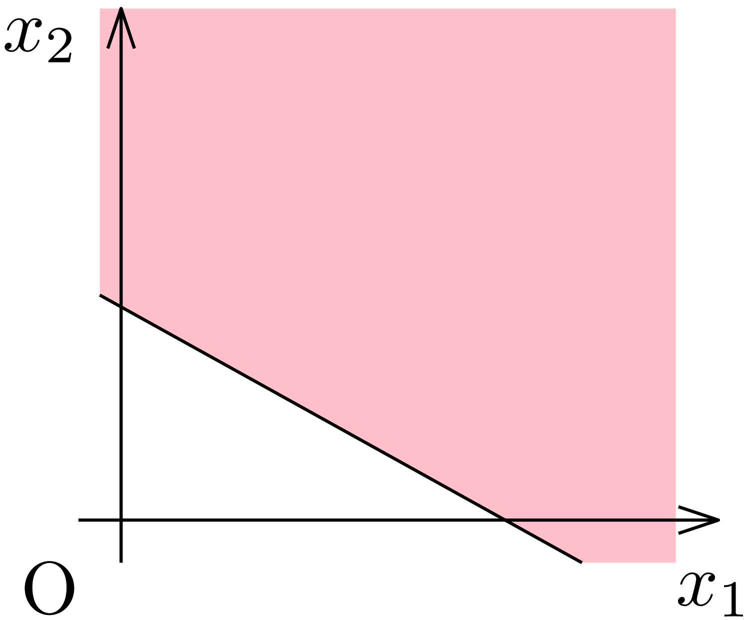


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

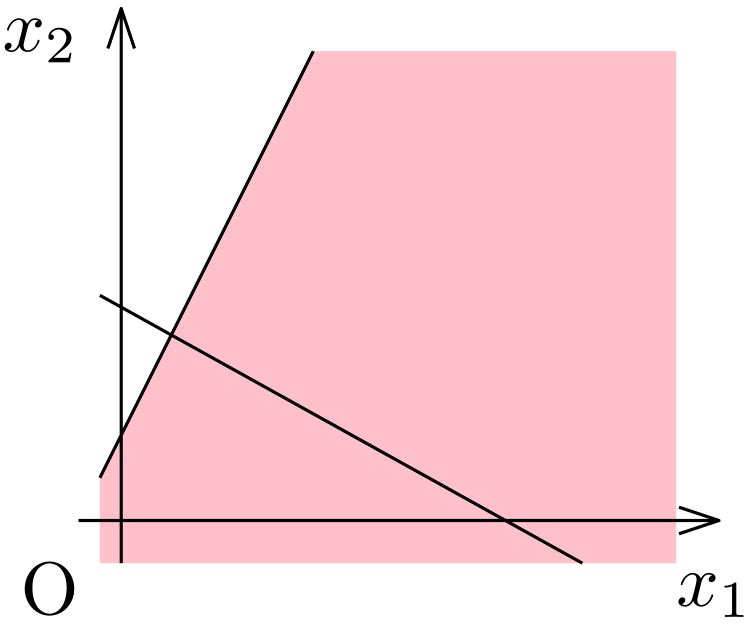


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

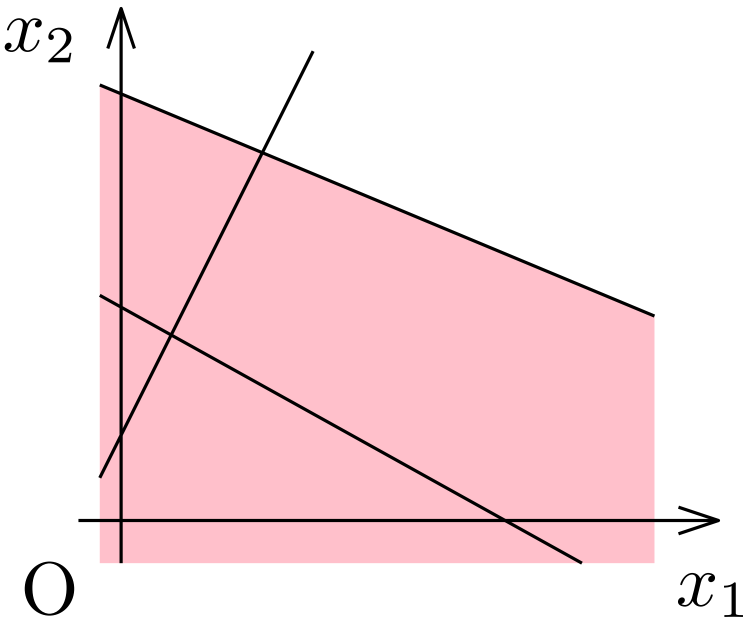


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

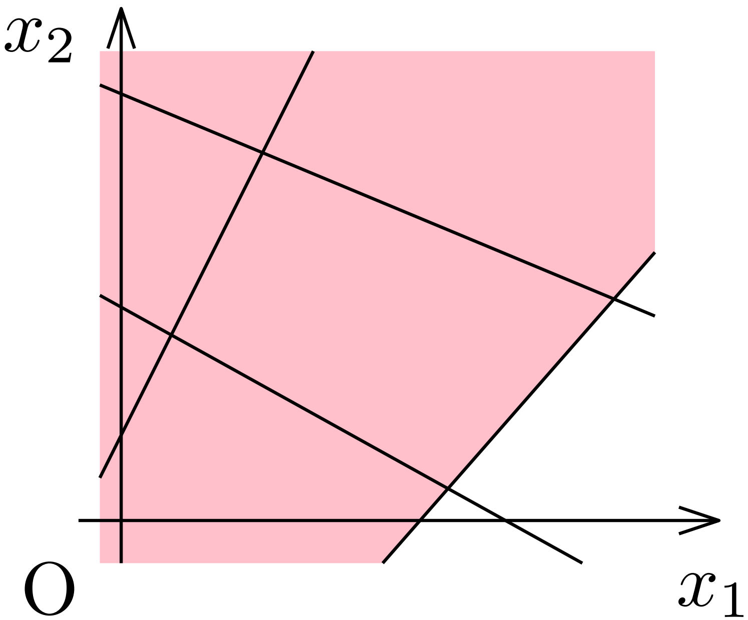


$n=2$ のとき

$n=2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $=2$

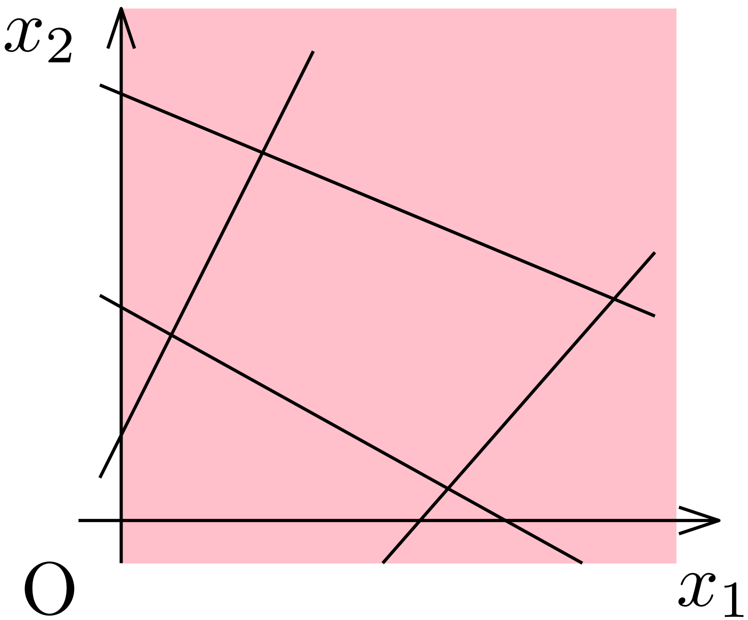
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
 & 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
 & -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
 & -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

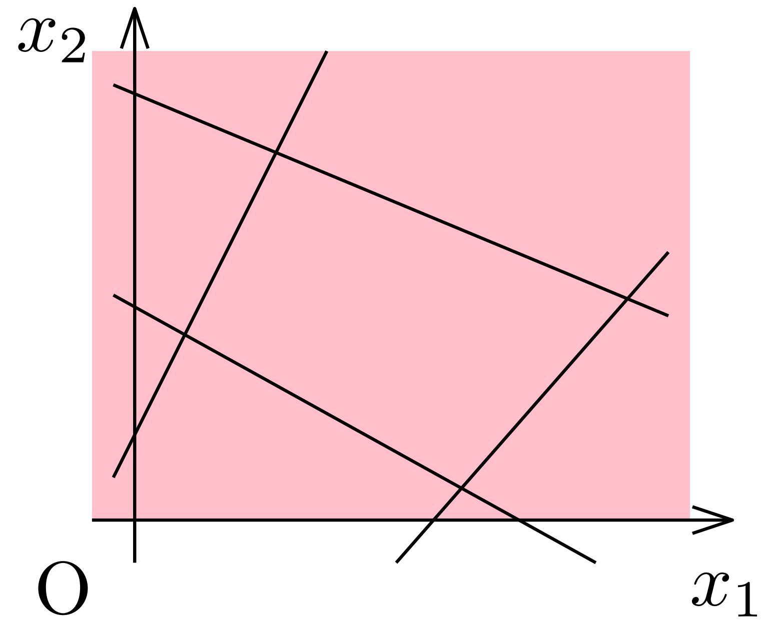
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

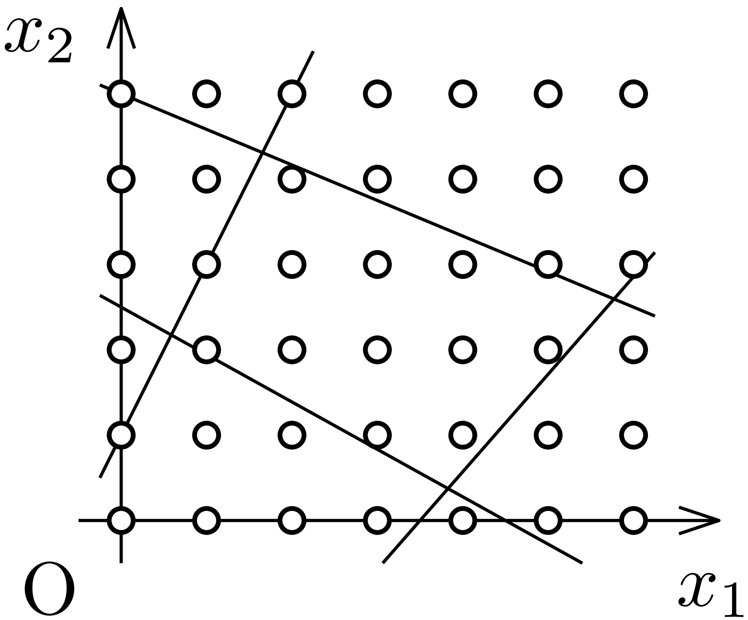


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

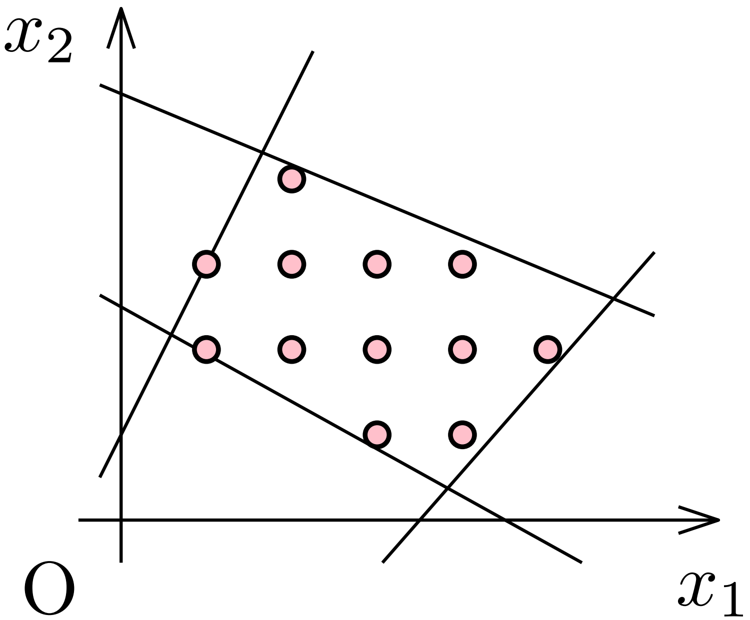
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

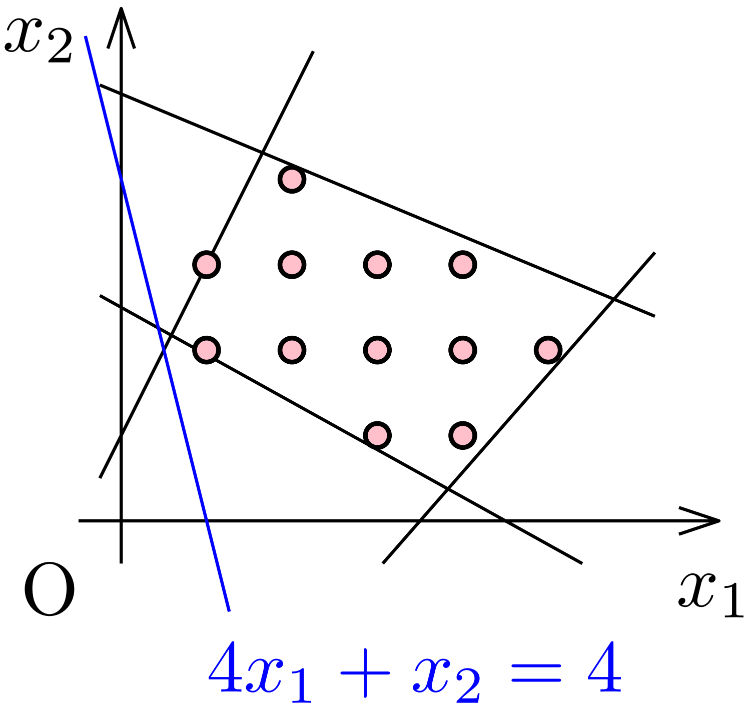


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

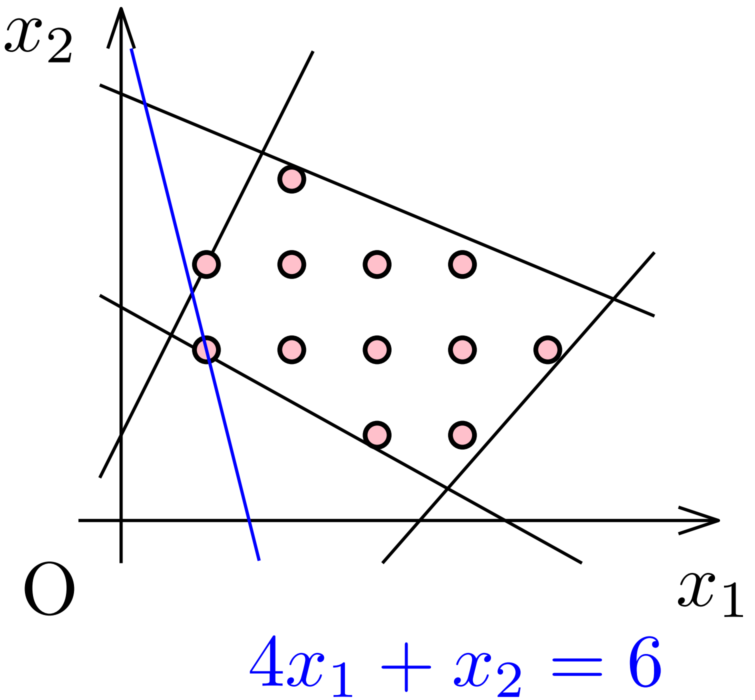


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

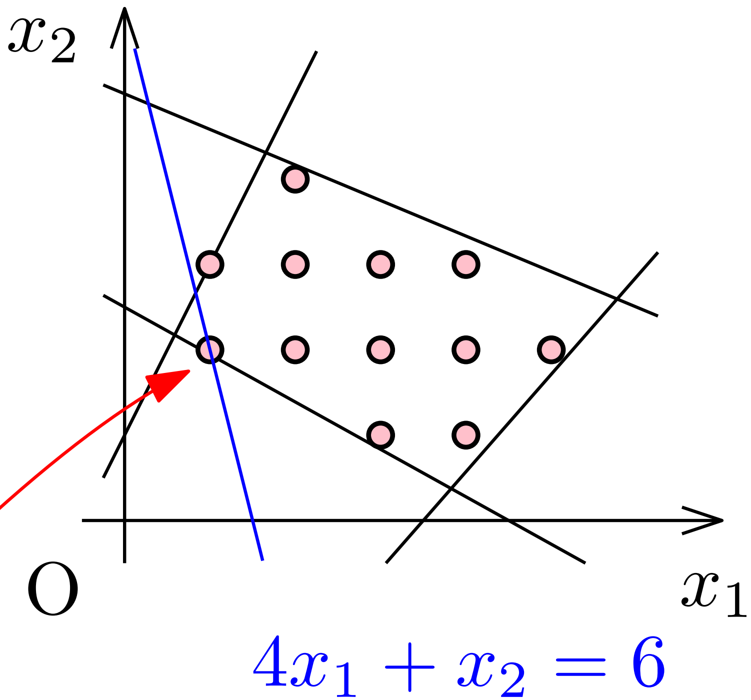


$n = 2$ のとき

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

変数の数 $= 2$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
 & 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
 & -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
 & -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



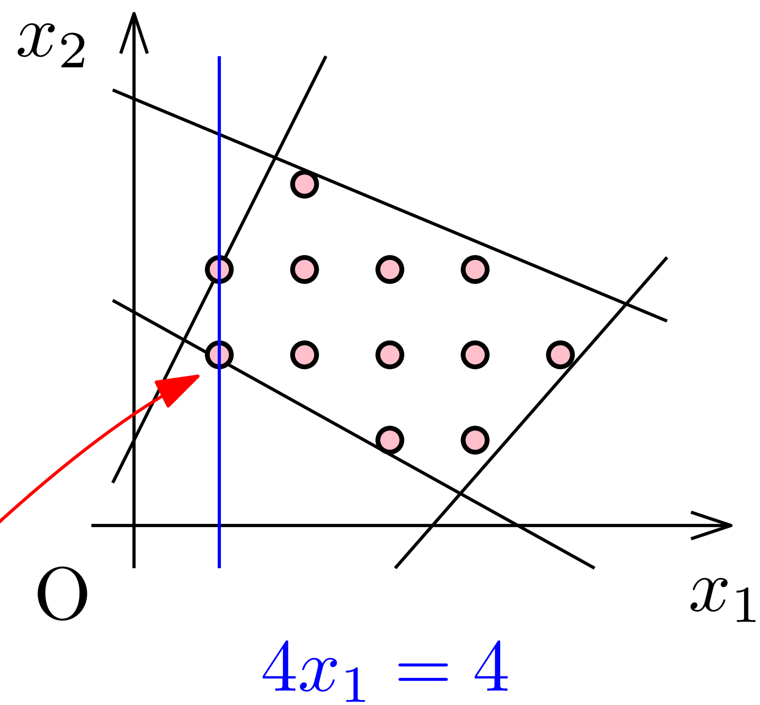
$(x_1, x_2) = (1, 2)$ は最適解

最適値 は 6

$n = 2$ のとき：最適解が複数存在する例

$n = 2$ のとき，整数計画問題は図を描いて解ける

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 4x_1 \\
\text{subject to} & 10x_1 + 18x_2 \geq 45, \\
& 2x_1 - x_2 \geq -1, \\
& -5x_1 - 12x_2 \geq -60, \\
& -8x_1 + 7x_2 \geq -28, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



$(x_1, x_2) = (1, 2)$ は最適解 $(x_1, x_2) = (1, 3)$ も最適解

最適値 は 4

次回予告

次回の内容

線形計画法の復習 (1)

- 線形不等式系と凸多面集合

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

整数計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

アルゴリズムの考え方 (予告)

整数計画問題を解くために,
線形計画問題を繰り返し解く