離散最適化基礎論 **2023 年 1 月 13 日**
演習問題 **岡本 吉央**

問題 1

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を変数とする，次の整数計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{maximize} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
& \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 1, \\
& & x_2 + x_3 \le 1, \\
& & x_3 + x_4 \le 1, \\
& & x_4 + x_5 \le 1, \\
& & x_5 + x_1 \le 1, \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}.
\end{array}
$$

以下の問いに答えよ．

1. 問題 (P) の任意の許容解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ に対して，

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 2$$

   が成り立つことを証明せよ．
2. 問題 (P) の最適値が 2 であることを証明せよ．

問題 2

次のように表される線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}, \\
& & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数である．この問題のラグランジュ緩和として次のものを考える．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda})) & \text{minimize} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ はラグランジュ乗数であり，$\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}$ を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

1. ラグランジュ緩和 $(\mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}))$ が最適解を持つとき，$\boldsymbol{c} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}$ が成り立つことを証明せよ．
2. 次で定義されるラグランジュ双対問題 (LD) を考える．

   $$
   \begin{array}{lll}
   \text{(LD)} & \text{maximize} & \min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\} \\
   & \text{subject to} & \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}.
   \end{array}
   $$

   問題 (LD) が最適解を持つとき，$\boldsymbol{\lambda}^*$ が (LD) の最適解であることと，$\boldsymbol{\lambda}^*$ が次の問題 (D) の最適解であることが同値であることを証明せよ．

   $$
   \begin{array}{lll}
   \text{(D)} & \text{maximize} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\
   & \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{c}, \\
   & & \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}.
   \end{array}
   $$

問題 3

次の整数計画問題を Gomory の小数カットを繰り返し適用することで解いてみよ．ただし，線形計画問題は図を描くことによって解いてもよいものとする．(注意：これは最大化問題である．全体で線形計画問題を 5 回程度解く必要があるかもしれない．)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 + x_2 \leq 0, \\
& 3x_1 + x_2 \leq 5, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{array}
$$

問題 4

次の語句を簡単に説明せよ．

1. 凸多面集合.
2. Minkowski–Weyl の定理.
3. 列生成法.
4. 劣勾配と劣微分.