

9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.  
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にしなうこと.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

**問題 1** 任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

が成り立つことを次の2つの方法で証明せよ.

1. 二項定理によって.
2. 組合せ的解釈に基づく二重の数え上げによって.

**問題 2** 次の漸化式を考える.

$$t_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq t_{\lfloor n/2 \rfloor} + t_{\lfloor n/2 \rfloor} + 5n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき,  $t_n = O(n \log n)$  が成り立つことを証明せよ.

**問題 3** 次の漸化式を考える.

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  の一般項  $b_n$  を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いる方法によらない解答であっても, 部分点を与える.)

**問題 4** 位数13の巡回群  $C_{13}$  の部分群をすべて挙げよ. また, それで「すべて」となる理由も説明せよ.

**問題 5** 有限集合  $X$  上の置換群  $G$  と有限集合  $Y$  上の置換群  $H$  が同型であるとする. 任意の同型写像  $f: G \rightarrow H$  と  $X$  上の恒等置換  $e \in G$  に対して,  $f(e)$  が  $Y$  上の恒等置換であることを証明せよ.

**問題 6** 任意の自然数  $n \geq 1$  を考える. 正六角形の頂点を  $n$  色で塗り分ける方法は何通りあるか? ただし, 平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす.

以上